



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
DAVIS

LEÇONS

SUR L'INTÉGRATION DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE

LEÇONS
SUR L'INTÉGRATION
DES ÉQUATIONS
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DU PREMIER ORDRE,

FAITES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS AUX CANDIDATS A L'AGRÉGATION,

PAR
donard F. D.
E. GOURSAT,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ET RÉDIGÉES
par les E. F.
PAR C. BOURLET, *ed.*
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ

Tome I

C
PARIS
A. HERMANN, LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE

8 — rue de la Sorbonne — 8

1891

UNIV. L.

CORNIA

DAVIS

17.38

Reproduced by
DUOPAGE PROCESS
in the
U.S. of America

Micro Photo Division
Bell & Howell Company
Cleveland 12, Ohio

D.P. # 1259

1

a.c.l.

LEÇONS

SUR LES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CHAPITRE PREMIER

Théorèmes généraux sur l'existence des intégrales.

1. Les équations aux dérivées partielles ont d'abord été étudiées par d'Alembert et Euler, à propos de problèmes de physique. Parmi les travaux les plus importants antérieurs à Cauchy, nous citerons, en outre, ceux de Lagrange, Laplace, Monge, Ampère et Pfaff. En particulier les Mémoires de Lagrange sur les équations du premier ordre sont fondamentaux. Mais les premières recherches rigoureuses sur le degré de généralité de la solution d'une équation aux dérivées partielles ou d'un système d'équations aux dérivées partielles sont dues à Cauchy⁽¹⁾. Les théorèmes trouvés par Cauchy ont été démontrés depuis par M. Darboux⁽²⁾ et par M^{me} de Kowalewski⁽³⁾. Nous allons reproduire la démonstration de M^{me} de Kowalewski.

2. Nous dirons que la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ des n variables x_1, x_2, \dots, x_n est holomorphe, ou régulière, ou encore développable, au voisinage du point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, si elle est développable suivant les puissances croissantes et positives de $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \dots, x_n - x_n^0$ pour toutes les valeurs de x_1, x_2, \dots, x_n , telles que

$$|x_i - x_i^0| < \delta \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

(1) Cauchy. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XIV, XV et XVI.

(2) G. Darboux. *Comptes rendus*, t. LXXX.

(3) M^{me} Kowalewski, *Journal de Crelle*, t. LXXXI.

2 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

et nous dirons que x_1, x_2, \dots, x_n appartiennent au domaine du point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, de rayon δ .

3. Avant de donner la démonstration du théorème général, nous traiterons d'abord deux cas particuliers.

Théorème I. — Étant donné, d'une part, le système d'équations aux dérivées partielles

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n A_{kj} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \\ (i, k = 1, 2, \dots, n), \\ (i = 2, 3, \dots, n), \end{cases}$$

contenant les m fonctions u_1, u_2, \dots, u_m des n variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n et dans lesquelles les coefficients A_{kj} désignent des fonctions des seules variables u_1, u_2, \dots, u_m ; et, d'autre part, m fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ des variables x_1, x_2, \dots, x_n régulières au voisinage du point

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \dots, \quad x_n = a_n,$$

et se réduisant respectivement à b_1, b_2, \dots, b_m pour

$$x_1 = a_1, \quad \dots, \quad x_n = a_n;$$

il existe un système, et un seul, de fonctions u_1, u_2, \dots, u_m satisfaisant aux équations (1), développables au voisinage du point

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \dots, \quad x_n = a_n,$$

et se réduisant respectivement à $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ pour

$$x_1 = a_1,$$

pourvu que les coefficients A_{kj} soient développables au voisinage du point

$$u_1 = b_1, \quad u_2 = b_2, \quad \dots, \quad u_m = b_m.$$

Remarquons d'abord que nous pouvons toujours supposer $a_1 = 0$ et $b_1 = 0$, car cela revient à remplacer $x_1 - a_1$ par x_1 et $\varphi_1 - b_1$ par φ_1 . Cela étant, admettons que les fon-

lions u_1, u_2, \dots, u_n , satisfaisant aux conditions de l'énoncé, existent; on voit alors aisément que les conditions initiales, jointes aux équations (1), permettent de déterminer les coefficients des développements de toutes les fonctions u_1, \dots, u_n , que nous supposons exister. En effet, nous savons que, d'après la formule de Taylor, le coefficient de $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ serait, à un facteur numérique près, dans u_1 ,

$$\left(\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} u_1}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}} \right)_{x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0},$$

ce que nous désignerons, pour abréger, par

$$\left(\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} u_1}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}} \right)_0.$$

Il suffit donc de savoir calculer ces quantités. Or, les conditions initiales nous donnent déjà toutes celles de ces quantités où x_1 ne figure pas, car, puisque pour $x_1 = 0$, u_1 doit se réduire à φ_1 , on doit avoir

$$u_1 = \varphi_1 + x_1 A_1 + x_1^2 A_2 + \dots,$$

donc tous les termes de la forme $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ de u_1 sont ceux de φ_1 , et nous connaissons les coefficients de la forme

$$\left(\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} u_1}{\partial x_2^{a_2} \partial x_3^{a_3} \dots \partial x_n^{a_n}} \right)_0.$$

De plus, les équations (1), auxquelles les fonctions u_1, \dots, u_n satisfont par hypothèse, nous permettront de calculer toutes les autres dérivées partielles, où figure au moins une fois x_1 , en fonction de celles qui sont connues. En effet, en dérivant les deux membres de l'équation

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^n A_{k,1} \frac{\partial u_k}{\partial x_1}$$

a_1 fois par rapport à x_1 , a_2 fois par rapport à x_2 , et ainsi de suite, a_n fois par rapport à x_n , et en faisant ensuite $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, on aura

$$\left(\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} u_1}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}} \right)_0.$$

4 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

en fonction des dérivées déjà connues; ensuite, en dérivant une fois par rapport à x_1 , a_1 fois par rapport à x_2 et ainsi de suite, et en faisant $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, on aura les quantités

$$\left(\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} u_1}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}} \right),$$

en fonction des précédentes, et ainsi de suite, on calculera, de proche en proche, tous les coefficients de u_1 . Ceci nous montre que, s'il existe un système de fonctions u_1, u_2, \dots, u_m satisfaisant à l'énoncé, il en existe un seul, car les coefficients des développements de ces fonctions sont déterminés d'une manière unique par les conditions initiales et les équations (1).

Imaginons alors, qu'après avoir calculé ces coefficients comme nous venons de l'indiquer, on écrive les développements correspondants: je dis que si ces développements sont convergents au voisinage de $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, ils représentent des fonctions u_1, u_2, \dots, u_m , qui satisfont aux conditions de l'énoncé. En effet, les fonctions u_1, \dots, u_m ainsi obtenues satisfont évidemment aux conditions initiales; d'ailleurs elles satisfont aux équations (1), car si on calcule les quantités

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \sum_{k=1}^m A_{k1} \frac{\partial u_k}{\partial x_1}$$

correspondantes, ces quantités seront certaines fonctions $F_i(x_1, \dots, x_n)$ des seules variables x_1, \dots, x_n holomorphes dans le domaine du point $x_i = 0$, et, d'après la manière même dont on a calculé les coefficients des u_i , ces fonctions sont nulles ainsi que toutes leurs dérivées partielles pour

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

De tout ceci il résulte que pour démontrer le théorème énoncé il nous suffit de démontrer que les développements obtenus par la méthode précédente sont convergents. A cet effet nous allons comparer ces développements à d'autres dont la convergence se montre aisément.

Supposons les quantités A_{ki} régulières pour les valeurs de u_1, u_2, \dots, u_m , dont le module est inférieur ou égal à r et soit M un nombre

plus grand que le plus grand module de toutes ces fonctions pour toutes les valeurs de u_1, \dots, u_n appartenant au domaine de rayon r . Considérons alors la fonction

$$H = \frac{M}{1 - \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{r}},$$

qui est développable suivant les puissances croissantes de u_1, u_2, \dots, u_n pour toutes les valeurs telles que

$$|u_i| < \frac{r}{m}.$$

Ce développement sera

$$H = M \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{r} \right)^k \right\},$$

et le coefficient de $u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2} \dots u_n^{\beta_n}$ dans ce développement sera celui du même terme dans

$$M \left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{r} \right)^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n},$$

c'est-à-dire

$$\frac{M}{r^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}} \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n)!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_n!}.$$

Ce coefficient est donc supérieur à $\frac{M}{r^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}}$ et, par suite,

est plus grand que le module du coefficient correspondant dans $A'_{t,r}$. D'autre part, soit ρ le rayon du domaine de convergence des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ et N une limite supérieure du module de ces fonctions : posons

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{Nt}{\rho - t},$$

avec

$$t = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Nous voyons que

$$\Phi(0, 0, \dots, 0) = 0;$$

d'ailleurs, on peut écrire

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \frac{N\varphi}{\rho - 1} - N = \frac{N}{1 - \frac{x_1 + \dots + x_n}{\rho}} - N,$$

donc la fonction $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ joue, par rapport aux fonctions φ_i , le même rôle que H par rapport aux $A_{i,1}$.

Ceci posé, considérons le système auxiliaire d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial x_1} = H \sum_{k=1}^m \frac{\partial v_k}{\partial x_1}, \\ (i, k = 1, 2, \dots, m), \\ (l = 2, 3, \dots, n), \end{cases}$$

où l'on a

$$H = \frac{M}{1 - \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_m}{r}},$$

et cherchons un système de fonctions v_1, v_2, \dots, v_m satisfaisant à ce système (2) et aux conditions initiales

$$(3) \quad v_1 = v_2 = \dots = v_m = \Phi(x_1, \dots, x_n),$$

pour $x_1 = 0$.

On montrera, comme précédemment, que, s'il existe un système de fonctions v_1, v_2, \dots, v_m satisfaisant aux conditions précédentes, il en existe un seul et qu'on pourra calculer les coefficients des développements de proche en proche. D'ailleurs, de la façon même dont nous calculons ces coefficients, un coefficient quelconque de v_i est un nombre positif supérieur au module du coefficient correspondant dans u_i . En effet, les coefficients des développements des u_i se déduisent des coefficients des développements des fonctions $A_{i,1}$ et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ par les seules opérations d'addition et de multiplication. Si l'on remplace dans toutes ces opérations un coefficient quelconque de $A_{i,1}$ par le coefficient correspondant de H et un coefficient quelconque de φ_i par le coefficient correspondant de $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, les résultats obtenus seront précisément les coefficients des v_i . On en

conclut que si les développements de r_1, r_2, \dots, r_n , calculés comme nous l'avons indiqué, sont convergents, il en sera de même *a fortiori* des développements de u_1, u_2, \dots, u_n . La condition nécessaire et suffisante pour que les développements de v_1, v_2, \dots, v_n soient convergents est, manifestement, que le système (2) admette un système d'intégrales satisfaisant aux conditions (3). Nous sommes donc ramenés, pour démontrer le théo. me, à démontrer l'existence d'un système d'intégrales holomorphes pour le système particulier (2). Ceci est aisé.

Nous pouvons écrire le système (2)

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial v_n}{\partial x_1} = H \sum_{i,j} \frac{\partial r_i}{\partial x_j}.$$

Ceci nous prouve d'abord que les différences $v_1 - v_2, v_1 - v_3, \dots, v_1 - v_n$ sont indépendantes de x_1 ; d'ailleurs, comme pour $x_1 = 0$ elles doivent être nulles en vertu des conditions initiales (3), elles sont identiquement nulles et on a

$$v_1 = v_2 = \dots = v_n.$$

On est donc ramené à intégrer l'équation unique

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_l} = m H \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial x_l},$$

($l = 2, 3, \dots, n$).

Comme la fonction $\Phi(x_2, \dots, x_n)$ ne dépend que de t , il est naturel de chercher une solution de la forme

$$v_1 = \phi(x_2, t)$$

et on a, pour déterminer ϕ , l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{M m (n-1)}{1 - \frac{m \phi}{r}} \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

qui s'écrit

$$(4) \quad \left(1 - \frac{m \phi}{r}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - M m (n-1) \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Il est aisé de vérifier que le premier membre de cette équation est

précisément le déterminant fonctionnel des deux fonctions

$$\phi \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{m\phi}{r}\right)t + Mm(n-1)x_1.$$

Cette équation exprime que la fonction ϕ est telle que

$$\left(1 - \frac{m\phi}{r}\right)t + Mm(n-1)x_1 = F(\phi),$$

F étant une fonction arbitraire.

Ici, il nous faudra choisir F de telle façon que pour $x_1 = 0$ on ait $\phi = \frac{Nt}{\rho - t}$; il faudra donc avoir identiquement :

$$\left(1 - \frac{mNt}{r(\rho - t)}\right)t = F\left(\frac{Nt}{\rho - t}\right),$$

c'est-à-dire, en posant $z = \frac{Nt}{\rho - t}$,

$$\left(1 - \frac{m}{r}z\right)\frac{\rho z}{N + z} = F(z).$$

Finalement, nous voyons que la fonction ϕ qui s'annule pour $x_1 = t = 0$ et qui satisfait à l'équation

$$\left(1 - m\frac{\phi}{r}\right)t + Mm(n-1)x_1 = \left(1 - \frac{m}{r}\phi\right)\frac{\rho\phi}{N + \phi}$$

est l'intégrale demandée. Cette équation s'écrit

$$\left(1 - m\frac{\phi}{r}\right)(N + \phi)t + Mm(n-1)x_1(N + \phi) = \left(1 - \frac{m\phi}{r}\right)\rho\phi.$$

Pour $x_1 = t = 0$ cette équation a une racine égale à 0 et l'autre racine égale à $\frac{r}{m}$ et par conséquent différente de 0. On en conclut que la racine qui s'annule pour $x_1 = t = 0$ est développable au voisinage de $x_1 = 0, t = 0$. Soit

$$\phi_0(x_1, t) = \phi_0(x_1, x_2 + \dots + x_n)$$

cette racine. Le système (2) est par conséquent satisfait par les

fonctions

$$v_1 = v_2 = \dots = v_n = \phi_0(x_1, x_2 + \dots + x_n),$$

qui remplissent d'ailleurs les conditions (3), et sont développables au voisinage de

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots \quad x_n = 0.$$

4. THÉORÈME II. — Étant donné, d'une part, un système de m équations linéaires aux dérivées partielles

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^m A_{lk} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + B_l, \\ (i, k = 1, 2, \dots, m), \\ (l = 2, 3, \dots, n), \end{cases}$$

où les quantités A_{lk} et B_l désignent des fonctions des variables x_1, x_2, \dots, x_n et de u_1, u_2, \dots, u_m , régulières au voisinage de

$$\begin{aligned} x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \dots, \quad x_n = a_n, \\ u_1 = b_1, \quad u_2 = b_2, \quad \dots, \quad u_m = b_m, \end{aligned}$$

et, d'autre part, m fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ de x_1, x_2, \dots, x_n , développables au voisinage du point a_1, a_2, \dots, a_n , et se réduisant respectivement à b_1, b_2, \dots, b_m pour

$$x_1 = a_1, \quad \dots, \quad x_n = a_n;$$

il existe un système de fonctions u_1, u_2, \dots, u_m des variables x_1, x_2, \dots, x_n , et un seul, satisfaisant aux équations (5), régulières au voisinage de

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \dots, \quad x_n = a_n,$$

et se réduisant respectivement à $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ pour $x_1 = a_1$.

Pour démontrer ce théorème, nous allons montrer qu'on peut le ramener au théorème précédent. A cet effet, introduisons n fonctions inconnues nouvelles t_1, t_2, \dots, t_n , et désignons par (A'_{lk}) et (B') ce que deviennent les fonctions A_{lk} et B_l quand on y remplace $x_1, x_2,$

10 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

\dots, x_n par t_1, t_2, \dots, t_n respectivement. Considérons ensuite le système des $m + n$ équations

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{k,l} (A_{kl}) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + (B) \frac{\partial t_l}{\partial x_j}, \\ (i, k = 1, 2, \dots, m), \\ (l = 2, 3, \dots, n), \\ \frac{\partial t_1}{\partial x_1} = \frac{\partial t_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial t_2}{\partial x_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial t_n}{\partial x_1} = 0, \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$(6') \quad \begin{cases} u_1 = \varphi_1, & u_2 = \varphi_2, & \dots, & u_m = \varphi_m, \\ t_1 = a_1, & t_2 = x_2, & \dots, & t_n = x_n, \end{cases}$$

pour $x_1 = a_1$.

D'après le théorème I, il existe un système, et un seul, de fonctions $u_1, \dots, u_m, t_1, t_2, \dots, t_n$ satisfaisant aux équations (6) et aux conditions (6'). A cause des dernières équations (6), les fonctions t_2, t_3, \dots, t_n sont indépendantes de x_1 , et comme, pour $x_1 = a_1$, elles doivent se réduire respectivement à x_2, x_3, \dots, x_n , il faut nécessairement que l'on ait toujours

$$t_2 = x_2, \quad \dots, \quad t_n = x_n;$$

on en conclut que $\frac{\partial t_2}{\partial x_1} = 1$ et, par suite, que $\frac{\partial t_1}{\partial x_1} = 1$ et que $t_1 = x_1$,

puisque, pour $x_1 = a_1$, on doit avoir $t_1 = a_1$. Le système de solutions des équations (6), dont l'existence est prouvée par le théorème I, est donc de la forme

$$\begin{cases} u_1 = \Phi_1, & u_2 = \Phi_2, & \dots, & u_m = \Phi_m, \\ t_1 = x_1, & t_2 = x_2, & \dots, & t_n = x_n. \end{cases}$$

Si dans les m premières équations (6) on remplace $u_1, \dots, u_m, t_1, t_2, \dots, t_n$ par les expressions précédentes, les relations obtenues expriment précisément que les m fonctions

$$u_1 = \Phi_1, \quad \dots, \quad u_m = \Phi_m$$

forment un système d'intégrales des équations (5).

5. Après avoir traité ces deux cas particuliers, nous arrivons au théorème général.

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles de la forme suivante :

$$(*) \quad \frac{\partial^1 u_1}{\partial x_1^1} = \Phi_1, \quad \frac{\partial^1 u_2}{\partial x_1^1} = \Phi_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial^1 u_m}{\partial x_1^1} = \Phi_m$$

où les quantités Φ_i désignent des fonctions des quantités u_1, u_2, \dots, u_m , des variables x_1, x_2, \dots, x_n , des dérivées partielles de u_1 jusqu'à l'ordre r_1 , des dérivées partielles de u_2 jusqu'à l'ordre r_2 , et ainsi de suite, des dérivées de u_m jusqu'à l'ordre r_m , mais ne contenant pas les dérivées qui figurent dans les premiers membres.

Le théorème général peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME GÉNÉRAL. — Les quantités $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m$, $\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_m} u_1}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}}$ qui figurent dans les fonctions Φ_i , étant regardées comme des variables indépendantes, soit

$$a_1, a_2, \dots, a_n; \quad b_1, \dots, b_m, \quad b_{a_1 a_2 \dots a_n}$$

un système quelconque de valeurs de ces variables pour lequel les fonctions Φ_i soient holomorphes;

Soient, d'autre part

$$\begin{array}{ccccccc} \eta_{11} & \eta_{11}^1 & \eta_{11}^2 & \dots & \eta_{11}^{r_1-1}, \\ \eta_{12} & \eta_{12}^1 & \eta_{12}^2 & \dots & \eta_{12}^{r_1-1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{m1} & \eta_{m1}^1 & \eta_{m1}^2 & \dots & \eta_{m1}^{r_m-1}, \end{array}$$

des fonctions de x_1, x_2, \dots, x_n régulières au voisinage du point a_1, a_2, \dots, a_n et telles que l'on ait

$$\eta_i = b_i \quad \frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} \eta_{i1}}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}} = b_{a_1 a_2 \dots a_n}$$

pour $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$.

Il existe un système de fonctions u_1, u_2, \dots, u_m et un seul,

12. LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

satisfaisant au système (7), holomorphes au voisinage de

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \dots, \quad x_n = a_n,$$

et telles que l'on ait

$$u_1 = \varphi_1, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varphi_1', \quad \dots, \quad \frac{\partial^{r_1-1} u_1}{\partial x_1^{r_1-1}} = \varphi_1^{(r_1-1)},$$

pour $x_1 = a_1$.

Il est aisé de voir que, s'il existe un tel système, il en existe un seul, car, en vertu des conditions initiales, le développement de u_1 , ordonné suivant les puissances de $x_1 - a_1$, doit être de la forme

$$u_1 = \varphi_1 + (x_1 - a_1) \varphi_1' + \dots + \frac{(x_1 - a_1)^{r_1-1}}{(r_1-1)!} \varphi_1^{(r_1-1)} + (x_1 - a_1)^{r_1} A_1 + \dots;$$

par suite, nous examinons les dérivées

$$\left(\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} u_1}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}} \right)_{x_1=a_1, x_2=a_2, \dots, x_n=a_n}$$

pour toutes les valeurs de

$$a_1 \leq r_1 - 1,$$

quels que soient les nombres a_2, \dots, a_n , et d'ailleurs, en différenciant les équations (7), on voit qu'on pourra calculer de proche en proche toutes les valeurs des autres dérivées où $a_1 \leq r_1$, pour $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$, en fonction des précédentes. Ces coefficients sont donc déterminés d'une manière unique, et, s'il existe un système d'intégrales, il en existe un seul.

Le mode de raisonnement employé plus haut nous montre encore que, si ces développements sont convergents, les fonctions qu'ils représentent satisfont à toutes les conditions du problème. Au lieu de démontrer directement cette convergence, nous ramènerons le système proposé (7) à un système d'équations linéaires.

Pour rendre la démonstration plus intelligible dans le cas général, nous examinerons d'abord un cas particulier.

Considérons l'équation du second ordre

$$(8) \quad r = F(x, y, z, p, q, s, t),$$

où nous posons

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

et dans laquelle F désigne une fonction développable pour le point $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$.

Soient, d'autre part, $\varphi_0(y)$ et $\varphi_1(y)$ deux fonctions de y holomorphes au voisinage de $y = y_0$ et telles que

$$\begin{aligned} \varphi_0(y_0) &= z_0, & \dot{\varphi}_0(y_0) &= q_0, & \varphi_0'(y_0) &= t_0, \\ \varphi_1(y_0) &= p_0, & \varphi_1'(y_0) &= s_0. \end{aligned}$$

Il existe une fonction z satisfaisant à l'équation (8), holomorphe au voisinage de x_0, y_0 , et telle que, pour $x = x_0$, z se réduise à $\varphi_0(y)$ et $\frac{\partial z}{\partial x}$ à $\varphi_1(y)$.

En effet, considérons le système auxiliaire

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = p, & \frac{\partial p}{\partial x} = r, & \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}, & \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial y}, & \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y}, \\ \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial y}. \end{cases}$$

Ce système est de la forme des systèmes considérés dans le théorème II; par suite, on pourra trouver un système d'intégrales satisfaisant aux équations (9) et aux conditions initiales suivantes :

$$(10) \quad \begin{cases} z = \varphi_0(y), & p = \varphi_1(y), & q = \varphi_0'(y), & s = \varphi_1'(y), \\ t = \varphi_0''(y) \text{ et } r = F(x_0, y, \varphi_0(y), \varphi_1(y), \varphi_0'(y), \varphi_1'(y), \varphi_0''(y)), \end{cases}$$

pour $x = x_0$.

Soient

$$\begin{aligned} z &= Z = \Phi(x, y), & p &= P(x, y), & q &= Q(x, y), \\ r &= R(x, y), & s &= S(x, y), & t &= T(x, y). \end{aligned}$$

ce système. Je dis que $z = \Phi(x, y)$ est une intégrale de (8), satisfaisant aux conditions initiales énoncées. En effet, puisque ce système

14 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

de fonctions satisfait aux équations (9), on a

$$P(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

par suite,

$$R(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

et

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right),$$

on en conclut que la différence $Q - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ est une fonction de y seulement; d'ailleurs, en vertu des conditions (10), cette différence est nulle pour $x = x_0$; donc, elle doit être identiquement nulle et on a

$$Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

De même,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right);$$

donc, la différence $S - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ est une fonction de y qui doit s'annuler pour $x = x_0$, en vertu de (10), et, par suite, est constamment nulle,

$$S = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y};$$

on voit ensuite que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right),$$

et, par suite, comme précédemment, que

$$T = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2},$$

en vertu de (10). Enfin, on aura

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x},$$

ce qui prouve que la différence

$$R - F(x, y, \Phi, P, Q, S, T)$$

est une fonction de y qui, devant s'annuler pour $x = x_0$, en vertu des conditions (10), est identiquement nulle. En résumé, on voit que $x = \Phi$ est une intégrale de (8) qui satisfait, d'ailleurs, aux conditions initiales données.

Examinons maintenant le cas général. Remplaçons le système (7) par le système suivant où nous introduisons, comme inconnues auxiliaires, toutes les dérivées partielles de u , jusqu'à l'ordre r_i :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = p'_{1, a_1, 0}, \quad \frac{\partial p'_{1, a_1, 0}}{\partial x_1} = p'_{2, a_1, 0}, \quad \dots, \quad \frac{\partial p'_{a_1, 0, 0}}{\partial x_1} = p'_{a_1+1, a_1, 0}$$

$$a_1 < r_n \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\frac{\partial p'_{a_1, a_1, a_2}}{\partial x_1} = \frac{\partial p'_{a_1+1, a_1, a_2-1}}{\partial x_2},$$

pour toutes les valeurs de a_1 et a_2 telles que

$$a_2 > 0 \quad \text{et} \quad a_1 + a_2 \leq r_n$$

$$\frac{\partial p'_{a_1, a_1, a_2-1, a_2}}{\partial x_1} = \frac{\partial p'_{a_1+1, a_1, a_2-1, a_2}}{\partial x_{n-1}},$$

pour toutes les valeurs de a_1, a_{n-1}, a_n telles que

$$a_{n-1} > 0, \quad a_1 + a_{n-1} + a_n \leq r_n$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\frac{\partial p'_{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}}{\partial x_1} = \frac{\partial p'_{a_1+1, a_2-1, a_3, \dots, a_n}}{\partial x_2},$$

avec

$$a_i > 0 \quad \text{et} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq r_i \\ (i = 1, 2, \dots, m).$$

Ajoutons-y les équations que l'on obtient en différentiant les équations (7) par rapport à x_i et en y remplaçant ensuite les dérivées

16 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

par rapport à x_1 de u_1 et de $p'_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ par les valeurs précédentes, de telle façon que dans les seconds membres il ne figure aucune dérivée par rapport à x_1 des quantités u_i et $p'_{a_1, a_2, \dots, a_n}$.

Le système sera de la forme

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \phi_i \\ \frac{\partial p'_{a_1, a_2, \dots, a_n}}{\partial x_1} = \Pi'_{a_1, a_2, \dots, a_n} \end{cases}$$

étudiée dans le théorème II. Donc, ce système admettra un système d'intégrales, régulières au voisinage du point a_1, a_2, \dots, a_n , et telles que, pour $x_1 = a_1$, on ait :

$$(12) \quad \begin{cases} u_i = \varphi_i \\ p'_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \frac{\partial^{a_1 + \dots + a_n} \varphi_i}{\partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}}, \quad a_1 < r_1 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq r_1 \end{cases}$$

les valeurs initiales des fonctions $p'_{a_1, a_2, \dots, a_n}$ se tirant des équations (7) elles-mêmes. On montrera de la même façon que dans le cas particulier précédent que, si

$$u_1 = \Phi_1, \quad u_2 = \Phi_2, \quad \dots, \quad u_n = \Phi_n$$

et

$$p'_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \Gamma'_{a_1, a_2, \dots, a_n}$$

forment un système d'intégrales des équations (11), satisfaisant aux conditions (12), les fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ sont des intégrales du système (7), satisfaisant aux conditions de l'énoncé du théorème général.

6. Le théorème général, que nous venons de démontrer, ne prouve l'existence de l'intégrale que dans un domaine limité environnant le point a_1, a_2, \dots, a_n . Mais, d'après ce que l'on sait sur les fonctions analytiques, on pourra, en général, en choisissant dans le domaine de a_1, a_2, \dots, a_n , un autre point a'_1, a'_2, \dots, a'_n , démontrer l'existence de l'intégrale dans un nouveau domaine entourant le point a'_1, a'_2, \dots, a'_n , et non contenu tout entier dans le précédent, et, en conti-

quant de la sorte, on pourra, en général, atteindre tel point donné à l'avance que l'on voudra, a_1, a_2, \dots, a_n .

7. GÉNÉRALISATION. — Considérons les équations

$$(7) \quad \frac{\partial^r u_i}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}} = \Phi_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

où les Φ_i désignent maintenant des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m$, des quantités

$$\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} u_i}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}}, \quad (x_i < r_i, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq r_i),$$

et, en outre, d'un nombre quelconque de paramètres arbitraires $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Soient, d'ailleurs,

$$\varphi_i, \quad \varphi_i', \quad \dots, \quad \varphi_i^{r-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

des fonctions de x_1, \dots, x_n et des r paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, régulières au voisinage du point $a_1, \dots, a_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_r^0$. Il existe un système de fonctions u_1, \dots, u_m des variables x_1, x_2, \dots, x_n et contenant les paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, régulières non seulement par rapport à x_1, x_2, \dots, x_n , mais encore par rapport aux paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ au voisinage du point $a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_r^0$, satisfaisant aux équations (7'), et aux conditions initiales du théorème général.

En effet, il suffit de considérer les quantités u_i comme fonctions des $n + r$ variables x_1, x_2, \dots, x_n et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, et les équations (7') comme des équations aux dérivées partielles entre les m fonctions u_i et ces $n + r$ variables. En particulier, on peut supposer que les quantités Φ_i sont indépendantes de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ et que ces paramètres n'entrent que dans les fonctions φ_i . On en conclut qu'on peut toujours trouver un système d'intégrales des équations (7) contenant autant de paramètres qu'on voudra, et qui soient des fonctions holomorphes de ces paramètres.

8. APPLICATION I. — Considérons le système

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

18 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

d'équations différentielles dans lesquelles f_1, \dots, f_n désignent des fonctions holomorphes au voisinage du point $x = 0, y_i = 0$. Nous pouvons considérer, dans ces équations, y_1, y_2, \dots, y_n comme des fonctions de x et de n paramètres arbitraires $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$. D'après ce que nous venons de dire, on pourra trouver n fonctions y_1, y_2, \dots, y_n satisfaisant aux équations (13), holomorphes par rapport à x et y_i^0 , au voisinage du point $x = 0, y_i^0 = 0$ et telles que pour $x = 0$ on ait $y_i = y_i^0$. En particulier, ces fonctions seront développables en séries de la forme

$$y_i = y_i^0 + x A_i^1 + x^2 A_i^2 + \dots,$$

les quantités A_i^1, A_i^2, \dots étant des fonctions régulières de $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$. Ceci nous montre que les intégrales des équations différentielles (13) sont développables non seulement par rapport à x , mais encore par rapport aux valeurs initiales.

9. APPLICATION II. — Fonctions implicites. Étant donné un système de p relations

$$(14) \quad \begin{cases} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p) = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, p), \end{cases}$$

où les premiers membres sont développables au voisinage des valeurs $x_i = x_i^0, u_i = u_i^0$ et sont tels que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_p)}{D(u_1, u_2, \dots, u_p)}$$

soit différent de 0 pour ces valeurs, il existe un système de fonctions u_1, u_2, \dots, u_p des variables x_1, x_2, \dots, x_n , holomorphes au voisinage du point $x_i = x_i^0$, se réduisant respectivement à $u_1^0, u_2^0, \dots, u_p^0$, pour $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$, et satisfaisant aux relations (14).

Nous supposons la proposition vraie pour le cas d'une seule variable ($n = 1$) (la démonstration de ce cas se trouve dans tous les Cours de calcul intégral), et nous allons montrer que, si elle est vraie pour $(n - 1)$ variables, elle est encore vraie pour n .

Admettons donc la proposition pour $(n - 1)$ variables et faisons dans les équations (14) $x_1 = x_1^0$, nous obtiendrons le système

$$(15) \quad F_i(x_1^0, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p) = 0,$$

qui sera satisfait par p fonctions

$$\varphi_1(x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_p(x_2, x_n, \dots, x_n),$$

régulières au voisinage du point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$.

D'autre part, considérons le système d'équations aux dérivées partielles

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + \frac{\partial F_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial u_p} \frac{\partial u_p}{\partial x_1} = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, p). \end{array} \right.$$

Le déterminant des coefficients des quantités $\frac{\partial u_i}{\partial x_1}$ dans ces équations est précisément $\frac{D(F_1, \dots, F_p)}{D(u_1, \dots, u_p)}$: puisqu'il est différent de 0, nous pourrions résoudre ces équations par rapport à $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_p}{\partial x_1}$, et les mettre sous la forme équivalente

$$(16') \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p),$$

où les Φ_i désignent des fonctions régulières au voisinage des valeurs x_1^0, u_1^0 . D'après le théorème général, il existe un système de p fonctions u_1, u_2, \dots, u_p vérifiant les équations (16') et, par suite, les équations (16), telles que pour $x_1 = x_1^0$ on ait $u_i = \varphi_i(x_2, \dots, x_n)$, et holomorphes au voisinage du point x_1^0, \dots, x_n^0 . Soient $u_i = \Phi_i$ ces intégrales; je dis que les fonctions Φ_i vérifient les relations (14). En effet, puisqu'elles vérifient les équations (16), elles sont telles que les fonctions $F_i(x_1, \dots, x_n, \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ sont fonctions des seules variables x_2, \dots, x_n et, puisque pour $x_1 = x_1^0$ on a $\Phi_i = \varphi_i$ et que les quantités φ_i vérifient les relations (15), ces fonctions F_i sont nulles pour $x_1 = x_1^0$, par suite sont identiquement nulles. On a donc, identiquement,

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p) = 0.$$

10. APPLICATION III. — Nous avons vu, dans le § 8, que les intégrales des équations différentielles (13) peuvent se mettre sous la forme

$$(17) \quad y_i = y_i^0 + x\Lambda_i^1 + x^2\Lambda_i^2 + \dots$$

où les quantités A_f sont des fonctions holomorphes des paramètres y^f : on en conclut, en vertu du paragraphe précédent, qu'on peut résoudre les équations (17) par rapport aux paramètres y^f et, par conséquent, mettre l'intégrale générale des équations (13) sous la forme

$$\begin{aligned} y_1^0 &= \phi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n^0 &= \phi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned}$$

où $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ désignent des fonctions holomorphes des variables x, y_1, y_2, \dots, y_n dans le domaine du point $x=0, y_i=0$, proposition que l'on admet généralement sans démonstration, dans les Cours de calcul intégral.

11. Pour qu'on puisse bien se rendre compte du degré de généralité de l'intégrale dont nous avons démontré l'existence dans le § 5, nous allons examiner quelques exemples particuliers.

EXEMPLE I. — Considérons une équation aux dérivées partielles du premier ordre entre la fonction z et les variables x et y :

$$(18) \quad F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Supposons qu'elle contienne p , et résolvons-la par rapport à p :

$$p = f(x, y, z, q).$$

Le théorème général nous apprend que cette équation admet une intégrale régulière au voisinage de $x = x_0$, $y = y_0$, qui, pour $x = x_0$, se réduit à une fonction arbitraire donnée à l'avance $\phi(y)$, et une seule, sous certaines conditions de continuité que nous supposons satisfaites. Ceci peut se traduire, en langage géométrique, de la façon suivante : Étant donnée la courbe plane C dont les équations sont

$$x = x_0, \quad z = \phi(y),$$

il existe une surface intégrale S , et une seule, passant par la courbe C . J'excepte, évidemment, le cas où l'équation (18), résolue par rapport à p , donnerait plusieurs valeurs pour p . Par exemple, si l'équation (18) était algébrique et du second degré en p , elle donnerait pour p deux valeurs de la forme

$$p = f_1(x, y, z, q), \quad p = f_2(x, y, z, q).$$

Il y aurait donc deux surfaces intégrales S_1 et S_2 passant par C . La condition géométrique précédente est très particulière, mais elle peut se généraliser. En effet, je dis qu'étant donnée une courbe quelconque C , plane ou gauche, on peut, en général, trouver une surface intégrale passant par C . Faisons le changement de variables suivant :

$$y - \lambda(x) = u, \quad z = x,$$

si

$$y = \lambda(x) \quad \text{et} \quad z = \mu(x)$$

sont les équations de C . Soient p_1, q_1 les dérivées partielles de s par rapport aux nouvelles variables u et x .

On a

$$ds = p dx + q dy,$$

d'où

$$ds = [p + q\lambda'(x)] dx + q du.$$

On a donc

$$\begin{cases} p_1 = p + q\lambda'(x), \\ q_1 = q, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} p = p_1 - q_1 \lambda'(x), \\ q = q_1, \end{cases}$$

ce qui prouve que s satisfait à la nouvelle équation du premier ordre

$$F(x, \lambda(x) + u, z, p_1 - q_1 \lambda'(x), q_1) = 0,$$

qui, en général, sera résoluble par rapport à q_1 . Cette équation admettra donc une intégrale qui, pour $u = 0$, se réduira à $\mu(x)$, et, par suite, l'équation (18) admet une surface intégrale passant par la courbe C ,

$$y - \lambda(x) = 0, \quad z = \mu(x).$$

12. EXEMPLE II. — Considérons une équation du second ordre

$$(19) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Il est aisé de voir que l'on peut toujours supposer que cette équation contient effectivement r ou t , car s'il n'en était pas ainsi on pourrait toujours par un changement linéaire de variables faire en sorte que cette condition soit remplie. Supposons, par exemple, que l'équation contienne r , et résolvons-la par rapport à r .

$$r = f(x, y, z, p, q, s, t).$$

Le théorème général nous apprend qu'il existe une intégrale z holomorphe au voisinage du point x_0, y_0 et telle que, pour $x = x_0$, on ait

$$z = \varphi_0(y), \quad p = \varphi_1(y),$$

φ_0 et φ_1 étant deux fonctions arbitraires données à l'avance. En langage géométrique, ceci exprime que, par la courbe C dont les équations sont

$$x = x_0, \quad z = \varphi_0(y),$$

passent, non plus une seule surface intégrale S , mais bien une infinité de surfaces dépendant d'une fonction arbitraire $\varphi_1(y)$. Nous pourrions achever de déterminer la surface S de la façon suivante : l'équation du plan tangent en un point quelconque de la courbe C de coordonnées $x_0, y, z = \varphi_0(y)$ est manifestement

$$Z - \varphi_0(y) = \varphi_1(y) [X - x_0] + \varphi_1'(y) [Y - y],$$

puisque, en vertu des conditions initiales, p et q se réduisent respectivement à $\varphi_1(y)$ et $\varphi_1'(y)$ pour $x = x_0$; par suite, on voit que si on se donne le plan tangent tout le long de la courbe C , la fonction $\varphi_1(y)$ est parfaitement déterminée et, par conséquent, la surface S . Donc, il existe une surface intégrale S passant par la courbe C et ayant, en chacun des points de cette courbe, un plan tangent déterminé. En d'autres termes, il existe une surface intégrale S passant par la courbe C et tangente, tout le long de cette courbe, à une surface développable donnée passant également par C , et, en général, ces conditions déterminent complètement la surface.

Comme dans le cas précédent, on pourra encore étendre ceci à une courbe quelconque C dont les équations sont

$$y = \lambda(x), \quad z = \mu(x).$$

En effet, si on se donne le plan tangent tout le long de C , il faudra trouver une intégrale z telle que si on y remplace y par $\lambda(x)$, z et q se réduisent respectivement à $\mu(x)$ et $\nu(x)$, $\nu(x)$ étant une fonction donnée de x . Nous ferons encore le changement de variables

$$y - \lambda(x) = u, \quad x = x,$$

et on verra aisément que l'équation (19) sera remplacée par une autre équation du second ordre à laquelle devra satisfaire z considéré comme fonction de u et de x . Cette équation admettra, en général, une intégrale telle que pour $u = 0$, on ait

$$z = \mu(x), \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \nu(x).$$

Ainsi, les surfaces minima sont définies, comme on sait, par une équation aux dérivées partielles du second ordre : il y a donc une infinité de surfaces minima passant par une courbe donnée, mais il n'y en a qu'une passant par une courbe donnée et tangente tout le long de cette courbe à une développable donnée.

13. Plus généralement, considérons une équation aux dérivées partielles $F = 0$ entre la fonction z et les n variables x_1, x_2, \dots, x_n ; soit p l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé qui entre dans l'équation $F = 0$; nous admettrons, ce qu'on peut toujours faire, qu'il existe une dérivée de la forme $\frac{\partial^p z}{\partial x_i^p}$ dans cette équation (1).

Supposons, par exemple, que l'équation contienne $\frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}$ et résolvons-la par rapport à $\frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}$:

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^p} = \gamma;$$

(1) Pour la démonstration de ce point accessoire, voir Jordan, Cours de l'École polytechnique, t. III, § 205, p. 200.

le théorème général de Cauchy nous apprend qu'il existe une intégrale holomorphe et telle que, pour $x_1 = a_1$, les fonctions $z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1^{p-1}}$ se réduisent à p fonctions arbitraires, données à l'avance,

$$\eta_0(x_2, \dots, x_n), \quad \eta_1(x_2, \dots, x_n), \quad \dots, \quad \eta_{p-1}(x_2, \dots, x_n),$$

des variables x_2, x_3, \dots, x_n . L'intégrale générale de cette équation dépend donc de p fonctions arbitraires de $(n - 1)$ variables.

14. Intégrales singulières. — Nous n'avons considéré jusqu'ici que les intégrales des équations aux dérivées partielles dont l'existence est démontrée par le théorème général de Cauchy. Il est naturel de se demander si ce sont les seules qui existent.

Considérons, pour fixer les idées, une équation du premier ordre entre z et n variables x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$(20) \quad F(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

où on pose

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},$$

et où F désigne un polynôme indécomposable. Soit

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

une intégrale quelconque, régulière au voisinage du point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, et soient $z^0, p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0$ les valeurs de z, p_1, p_2, \dots, p_n pour $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$. Nous désignerons ce système de valeurs $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z^0, p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0$ sous le nom d'élément de l'intégrale. Nous poserons en outre

$$Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}.$$

Supposons $(P_1)_0 \neq 0$: d'après le théorème sur les fonctions implicites (§ 9) on pourra résoudre l'équation (20) par rapport à p_1 et la mettre sous la forme

$$(20') \quad p_1 = f(z, x_1, \dots, x_n, p_2, \dots, p_n),$$

la fonction f étant régulière pour z^0, x_1^0, p_1^0 , et alors l'équation (20') admettra, d'après le théorème de Cauchy, une intégrale et une seule, holomorphe dans le domaine du point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, qui pour $x_1 = x_1^0$ se réduise à $\Phi(x_1^0, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Cette intégrale sera nécessairement $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Donc, dans ce cas, l'intégrale Φ est donnée par le théorème de Cauchy.

Si $(P_1)_0$ était nul, on chercherait un autre élément de l'intégrale pour lequel P_1 ne s'annulerait pas et, si on peut en trouver un, on pourra raisonner sur celui-là comme sur le précédent et, par conséquent, démontrer la proposition précédente. La méthode ne tomberait en défaut que si tous les éléments de l'intégrale Φ annulaient P_1 , c'est-à-dire si l'intégrale Φ satisfaisait à l'équation aux dérivées partielles $P_1 = 0$. Mais alors, si on peut trouver une dérivée P_i telle que Φ ne satisfasse pas à l'équation $P_i = 0$, on prendra un élément de Φ pour lequel $(P_i)_0$ soit différent de 0, et on raisonnant avec x_i comme nous l'avons fait avec x_1 , on prouvera que Φ est donné par le théorème de Cauchy.

On voit donc que la démonstration précédente ne tombe réellement en défaut que si la fonction Φ satisfait à la fois aux n équations aux dérivées partielles

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad \dots, \quad P_n = 0.$$

Dérivons l'équation (20) par rapport à x_i : on aura une équation

$$X_i + ZP_i + P_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_i} + \dots + P_n \frac{\partial P_n}{\partial x_i} = 0,$$

à laquelle devra satisfaire la fonction Φ , puisqu'elle satisfait à l'équation (20). D'ailleurs, si Φ satisfait aux équations $P_i = 0$, cette équation se réduira à

$$X_i + ZP_i = 0.$$

Donc, si la fonction Φ satisfait aux équations $F = 0$ et $P_i = 0$, elle satisfait au système des $2n + 1$ équations aux dérivées partielles du premier ordre suivant :

$$(21) \quad \begin{cases} F = 0, & P_i = 0, & X_i + ZP_i = 0, \\ & (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Par définition, nous dirons qu'une intégrale $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui satisfait à toutes les équations (21) est une *intégrale singulière* de l'équation (20).

REMARQUE. — Nous avons spécifié que nous ne considérons qu'une équation $F = 0$, *indécomposable*, car, dans d'autres cas, ce que nous venons de dire serait sujet à caution. Ainsi, une équation de la forme

$$F \equiv (H)^m = 0,$$

est telle que

$$P_i = m (H)^{m-1} \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

et, par suite, toute intégrale de l'équation $F = 0$, c'est-à-dire $H = 0$, annule P_i .

Si l'équation aux dérivées partielles n'était pas mise sous forme entière, il pourrait aussi arriver qu'il existe des intégrales telles que le premier membre cesse d'être holomorphe dans le voisinage de tout élément de l'intégrale. Nous en verrons des exemples plus loin. Pour éviter ces difficultés, nous supposons, dans la recherche des solutions singulières, que l'équation a été mise sous forme entière.

15. Étant donnée une intégrale *non singulière* d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, il y a toujours une infinité d'intégrales de cette même équation infiniment voisines de l'intégrale considérée.

Soit

$$F(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

l'équation aux dérivées partielles et $z \equiv \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une intégrale *non singulière* de cette équation. Prenons un élément $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, p_1^0, \dots, p_n^0$ de cette intégrale pour lequel P_i ne soit pas nul et soit

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \Phi(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Considérons ensuite une fonction $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r)$ des variables x_1, \dots, x_n et de r paramètres a_1, a_2, \dots, a_r , développable au voisinage du point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, a_1^0, a_2^0, \dots, a_r^0$, et se réduisant à $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour $a_1 = a_1^0, \dots, a_r = a_r^0$. Il est facile

de construire une telle fonction, il suffit pour cela d'ajouter à ϕ un développement convergent quelconque qui s'annule pour $\alpha_i = \alpha_i^0$. D'après le théorème de Cauchy, il existe une intégrale Ψ dépendant des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, holomorphe au voisinage du point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0$, et qui se réduit à $\phi(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour $x_i = x_i^0$. Cette intégrale se réduira manifestement à $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour $\alpha_i = \alpha_i^0, \dots, \alpha_n = \alpha_n^0$ et, puisqu'elle est holomorphe, on pourra déterminer un nombre positif ρ tel que, pour toutes les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ telles que

$$|\alpha_i - \alpha_i^0| < \rho,$$

on ait

$$|\Phi - \Psi| < \epsilon,$$

pour les valeurs de x_1, x_2, \dots, x_n suffisamment voisines de x_1^0, \dots, x_n^0 , ϵ étant un nombre donné à l'avance : c'est ce que nous exprimons en disant que l'intégrale Ψ est infiniment voisine de Φ . Cette propriété appartient à toutes les intégrales non singulières ; donc, si une intégrale est telle qu'il n'existe pas d'intégrale infiniment voisine d'elle, cette intégrale sera nécessairement singulière.

16. Dans certaines questions sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, en particulier dans les méthodes de Jacobi, il y a souvent avantage à ce que ces équations ne contiennent pas explicitement la fonction inconnue, mais seulement ses dérivées. Voici l'artifice qu'on emploie pour la faire disparaître.

Soit l'équation du premier ordre

$$(22) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0;$$

trouver une intégrale de cette équation, cela revient à trouver une fonction $V(z, x_1, \dots, x_n)$ telle que la fonction z définie par la relation

$$(23) \quad V(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

satisfasse à l'équation (22). Les dérivées partielles de z seront alors données par les formules

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial z} p_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

c'est-à-dire

$$p_i = - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial z}}.$$

La fonction V des $(n + 1)$ variables z, x_1, x_2, \dots, x_n devra satisfaire à l'équation

$$(24) \quad F \left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial z}}, \dots, - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial z}} \right) = 0.$$

Soit V une intégrale de l'équation (24); on voit que l'équation $V = 0$ donnera une intégrale de l'équation (22); mais rien ne prouve que ce procédé nous donnera toutes les intégrales de l'équation (22), car il n'est pas nécessaire que la fonction V satisfasse *identiquement* à l'équation (24), il suffit qu'elle vérifie cette équation pour toutes les valeurs de z, x_1, x_2, \dots, x_n liées par la relation (23). Nous allons montrer, effectivement, que ce procédé nous donne toutes les intégrales non singulières de (22), mais il ne nous donne pas en général les intégrales singulières. En vertu du théorème démontré dans le § 15, toute intégrale non singulière appartient à une famille d'intégrales de l'équation (22) qui peut dépendre d'autant de paramètres arbitraires qu'on voudra, en particulier à une famille dépendant d'un seul paramètre α . Soit

$$V(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha$$

cette famille. L'équation (24) devra être vérifiée quel que soit le paramètre α , en tenant compte de la relation précédente et, comme cette équation (24) ne contient pas α , il est clair qu'elle devra être vérifiée *identiquement*.

D'un autre côté, si V est une intégrale de l'équation (24), il en sera de même de $V + C$, où C est une constante quelconque, de sorte que toute intégrale de l'équation (22) obtenue de cette façon sera nécessairement comprise dans une intégrale dépendant d'un paramètre arbitraire,

$$V + C = 0.$$

CHAPITRE II

Équations linéaires. Systèmes complets.

17. Dans l'étude des équations aux dérivées partielles, on a surtout en vue de ramener leur intégration à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Le problème, ainsi posé, est complètement résolu pour les équations du premier ordre dont nous allons nous occuper. Nous commencerons par les équations linéaires, dont la théorie est plus simple. Cette théorie est due, dans ses traits essentiels, à Lagrange ⁽¹⁾; elle a été complétée par Cauchy ⁽²⁾ et par Jacobi ⁽³⁾.

Considérons d'abord l'équation linéaire et homogène suivante

$$(1) \quad X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

entre la fonction inconnue f et les n variables x_1, x_2, \dots, x_n . Les quantités X_1, X_2, \dots, X_n sont des fonctions des seules variables x_1, x_2, \dots, x_n . L'intégration de l'équation (1) ou l'intégration du système d'équations différentielles suivant :

$$(2) \quad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}$$

sont deux problèmes équivalents.

Soit, en effet,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$$

(1) *Théorie des fonctions analytiques. Leçons sur le calcul des fonctions.*

(2) *Comptes rendus*, t. XV.

(3) *Journal de Crelle*, t. II et XIII. *Gesammelte Werke*, Bd IV.

une intégrale première du système (2); je dis que F est une intégrale de l'équation (1). La différentiation de l'équation $F = C$ nous donne

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

et, en remplaçant dx_1, \dots, dx_n par les quantités proportionnelles X_1, \dots, X_n tirées des équations (2), on arrive à la relation

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} X_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} X_n = 0,$$

qui doit être vérifiée quand on y remplace x_1, x_2, \dots, x_n par un système quelconque d'intégrales des équations (2). Mais puisqu'on peut choisir arbitrairement les valeurs initiales de toutes les variables, l'équation précédente doit être vérifiée identiquement et F est une intégrale de l'équation (1).

Réciproquement, soit φ une intégrale de l'équation (1), $\varphi = C$ est une intégrale du système (2). En effet, on a identiquement

$$X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0;$$

on aura donc, pour un système quelconque d'intégrales des équations (2),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$d\varphi = 0.$$

Donc, pour toutes ces intégrales, on a

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{constante},$$

c'est-à-dire que $\varphi = C$ est une intégrale du système (2).

D'autre part, soient f_1, f_2, \dots, f_k k intégrales de l'équation (1); $\Pi(f_1, f_2, \dots, f_k)$ sera aussi une intégrale de cette même équation, Π désignant une fonction absolument arbitraire. En effet, on a

$$X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, k);$$

par suite,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Pi}{\partial f_i} \left[X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right] = 0,$$

ce qui s'écrit

$$X_1 \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} = 0.$$

Ceci nous montre que si f_1, f_2, \dots, f_{n-1} sont $(n - 1)$ intégrales distinctes de l'équation (1), on aura une intégrale

$$F = \Pi(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}),$$

dépendant d'une fonction arbitraire de $n - 1$ variables, et qui a, par conséquent, le même degré de généralité que l'intégrale générale de l'équation (1). Il est d'ailleurs aisé de montrer directement que l'on obtient ainsi toutes les intégrales de cette équation. En effet, soit F une intégrale quelconque de l'équation (1), on aura

$$X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

On a d'ailleurs les $(n - 1)$ relations

$$X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0,$$

$$(i = 1, 2, \dots, n - 1);$$

puisque les quantités X_1, X_2, \dots, X_n ne sont pas toutes nulles, ceci prouve que le déterminant fonctionnel de F, f_1, \dots, f_{n-1} par rapport à x_1, x_2, \dots, x_n est nul :

$$\frac{D(F, f_1, f_2, \dots, f_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0.$$

Il existe donc une relation identique entre les n fonctions $F, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$

$$\Phi(F, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) = 0,$$

qui contient évidemment F puisque les fonctions f_1, f_2, \dots, f_{n-1} sont

32 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

distinctes. On en conclut que F est une certaine fonction $\Pi (f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$. Donc, pour trouver toutes les intégrales de l'équation (1), il suffit de trouver l'intégrale générale du système (2)

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad \dots, \quad f_{n-1} = C_{n-1},$$

et l'intégrale générale de (1) sera donnée par la formule

$$f = \Pi (f_1, f_2, \dots, f_{n-1}),$$

où Π désigne une fonction arbitraire.

REMARQUE. — Ce qui précède nous montre aussi que tout progrès fait dans l'intégration de l'équation (1) ou du système (2) entraîne un progrès correspondant dans l'autre problème, car si f_1, f_2, \dots, f_k sont k intégrales de (1), $f_1 = C_1, \dots, f_k = C_k$ sont k intégrales de (2) et réciproquement.

18. Considérons maintenant des équations linéaires quelconques. Soit

$$(3) \quad P_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial z}{\partial x_n} - R = 0$$

une équation linéaire du premier ordre entre la fonction z et les n variables x_1, x_2, \dots, x_n , où R, P_1, P_2, \dots, P_n désignent des fonctions de z, x_1, x_2, \dots, x_n . Faisons disparaître la fonction inconnue par le procédé indiqué au § 16. Pour cela, cherchons les fonctions V telle que la fonction z définie par la relation

$$(4) \quad V(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

soit une intégrale de l'équation (3). On trouve, pour déterminer V , la relation

$$(5) \quad P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

D'après ce que nous avons vu au § 17, si on considère le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R},$$

et si

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad \dots, \quad u_n = C_n$$

est l'intégrale générale de ce système, l'intégrale générale de l'équation (5) sera

$$V = \Phi(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

Φ étant une fonction absolument arbitraire. Par suite (§ 16) la relation

$$\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$$

donnera toutes les intégrales NON SINGULIÈRES de l'équation (3).

Nous allons donner de ce théorème une démonstration plus directe. Tout revient à montrer que, si dans n intégrales distinctes de l'équation (5) u_1, u_2, \dots, u_n on remplace z par une intégrale de l'équation (3), ces fonctions u_1, u_2, \dots, u_n deviendront certaines fonctions de x_1, x_2, \dots, x_n , liées entre elles par une relation identique. Imaginons que cette substitution ait été faite, et calculons le déterminant fonctionnel Δ de u_1, u_2, \dots, u_n par rapport à x_1, x_2, \dots, x_n , en y considérant z comme une fonction de x_1, \dots, x_n . On aura :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z} P_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial z} P_2 & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_1}{\partial z} P_n \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial z} P_1 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial z} P_2 & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \frac{\partial u_2}{\partial z} P_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \frac{\partial u_n}{\partial z} P_1 & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_n}{\partial z} P_2 & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial z} P_n \end{vmatrix}$$

ce qui donne, en développant,

$$\Delta = \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} + \sum_{i=1}^{n-1} P_i \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n)}.$$

Mais, u_1, u_2, \dots, u_n étant n intégrales de l'équation (5), on a les n identités

$$P_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + R \frac{\partial u_i}{\partial z} = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, n),$$

24 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

et, en résolvant ces n identités par rapport à P_1, P_2, \dots, P_n , R on en tire

$$\frac{R}{D(u_1, u_2, \dots, u_n)} = \frac{-P_i}{D(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n)} = M,$$

($i = 1, 2, \dots, n$),

on désignant par M la valeur commune de ces rapports. Il en résulte que l'on a

$$\Delta = \frac{1}{M} \left\{ R - \sum_{i=1}^n P_i P_i \right\}.$$

Si s satisfait à l'équation (3), on voit que Δ sera nul, à moins que M ne soit nul aussi. Donc, toutes les intégrales s qui n'annulent pas M sont telles que, si on les substitue dans u_1, u_2, \dots, u_n , les fonctions ainsi obtenues sont liées par une relation. Toutes ces intégrales sont donc fournies par la relation

$$\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0.$$

Examinons maintenant si M peut être nul. Soit

$$V(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

une relation définissant une intégrale de l'équation (3), et soit $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, s^0$ un système de valeurs satisfaisant à cette relation et telles que tous les coefficients P_1, \dots, P_n, R soient holomorphes sans être tous nuls; supposons, par exemple, que $(P_1)_0$ soit différent de zéro. On aura toujours, comme nous l'avons vu,

$$P_1 = -M \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(z, x_1, \dots, x_n)}.$$

Nous pourrions alors, pour les valeurs de z, x_1, x_2, \dots, x_n situées dans le voisinage de s^0, x_1^0, \dots, x_n^0 , résoudre l'équation (5) par rapport à $\frac{\partial V}{\partial x_1}$:

$$(5') \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = - \frac{P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial z}}{P_1},$$

et le théorème de Cauchy nous apprend que cette équation (5)' admet

une infinité d'intégrales holomorphes dans le domaine du point x_1^0, \dots, x_n^0, z^0 . On peut toujours supposer que l'on a pris pour u_1, \dots, u_n des intégrales satisfaisant à cette condition; le déterminant

$$\frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(z, x_1, \dots, x_n)}$$

restera fini et, comme par hypothèse P_1 est différent de 0, on en conclut que M ne peut être nul. Le raisonnement ne serait en défaut que dans les deux cas suivants :

1° S'il existait une intégrale telle que, pour tout système de valeurs z^0, x_1^0, \dots, x_n^0 vérifiant la relation

$$V(z, x_1, \dots, x_n) = 0,$$

on ait

$$P_1 = \dots = P_n = R = 0.$$

Dans ce cas, les coefficients P_i, R seraient divisibles par un facteur commun, et il est clair qu'en égalant ce facteur à zéro, on aurait une intégrale de l'équation (3).

2° Il en serait encore de même si l'intégrale définie par la relation

$$V(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

était telle que, pour toutes les valeurs de z, x_1, \dots, x_n satisfaisant à cette relation, un certain nombre des coefficients P_1, P_2, \dots, P_n, R cessent d'être holomorphes. Ce cas peut effectivement se présenter; prenons, par exemple, l'équation

$$(A) \quad p(x^2 + z^2 - 1) + q(xy + \sqrt{1 - z^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}) = 0.$$

L'équation en V est :

$$(B) \quad (x^2 + z^2 - 1) \frac{\partial V}{\partial x} + (xy + \sqrt{1 - z^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}) \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

et elle admet pour intégrale générale

$$V = \Phi \left(z, \frac{xy + \sqrt{1 - z^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}{x^2 + z^2 - 1} \right).$$

D'un autre côté, l'équation (A) admet l'intégrale

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

qui n'est pas fournie par la relation $V = 0$, quelle que soit la fonction Φ . Nous voyons bien que, au voisinage de toutes les valeurs de x, y, z , qui satisfont à la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

les coefficients de l'équation (A) ne sont pas réguliers.

19. Pour compléter ce que nous venons de dire sur les équations linéaires, nous allons montrer comment on pourra déterminer la fonction arbitraire Φ de façon que l'intégrale satisfasse à certaines conditions données à l'avance.

On peut, en général, trouver une intégrale

$$\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

telle que la relation précédente soit vérifiée identiquement quand on établit entre les variables z, x_1, \dots, x_n deux relations quelconques

$$f(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \varphi(z, x_1, \dots, x_n) = 0.$$

En effet, ces relations permettent d'exprimer les quantités z, x_1, x_2, \dots, x_n en fonction de $(n - 1)$ variables arbitraires t_1, t_2, \dots, t_{n-1} par des formules de la forme

$$\begin{cases} z = \theta(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}), \\ x_i = \theta_i(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}), \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Trouver une intégrale s satisfaisant à la condition énoncée, cela revient alors à trouver une fonction Φ telle que, si u'_1, u'_2, \dots, u'_n désignent les fonctions de t_1, t_2, \dots, t_{n-1} que l'on déduit de u_1, u_2, \dots, u_n en y remplaçant z, x_1, x_2, \dots, x_n par $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, on ait identiquement

$$\Phi(u'_1, u'_2, \dots, u'_n) = 0.$$

Or, si on élimine t_1, t_2, \dots, t_{n-1} entre les n relations

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1(\theta, \theta_1, \dots, \theta_n), \\ u'_2 &= u_2(\theta, \theta_1, \dots, \theta_n), \\ &\dots\dots\dots \\ u'_n &= u_n(\theta, \theta_1, \dots, \theta_n), \end{aligned}$$

et la droite D dont les équations sont

$$(D) \quad \frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{R}.$$

A chaque point x, y, z de l'espace correspond ainsi une droite D. Soit $z = \varphi(x, y)$ une surface intégrale; le plan tangent au point x, y, z de cette surface a pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

et on voit que l'équation (6) exprime que ce plan contient la droite D. Donc, si on considère toutes les surfaces intégrales qui passent par un point donné de l'espace, les plans tangents en ce point à ces surfaces passent tous par la droite D relative à ce point.

Nous appellerons *courbe caractéristique* une courbe telle qu'en chacun de ses points elle soit tangente à la droite D relative à ce point. Il résulte de cette définition que les courbes caractéristiques vérifient le système d'équations différentielles

$$(7) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Une courbe de cette espèce est en général complètement déterminée quand on se donne un de ses points, c'est-à-dire les valeurs initiales de x, y, z . Ces courbes forment donc une congruence. Soient

$$(8) \quad u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b$$

les équations de cette congruence, où a et b désignent des paramètres arbitraires, équations qui s'obtiendraient par l'intégration du système (7). Toute surface engendrée par les courbes de la congruence, associées suivant une loi tout à fait arbitraire, est une intégrale de l'équation (3). C'est évident, car par tout point d'une telle surface passe une courbe caractéristique C située sur la surface et, par suite, le plan tangent en ce point contient la tangente à C, c'est-à-dire la droite D relative à ce point. Réciproquement, si S est une surface intégrale, il existe une infinité de courbes caractéristiques situées sur S, car le plan tangent en un point quelconque M contient la droite D correspondante; par suite, en chaque point de S, la droite D correspondante à ce point est tangente à la surface, et on pourra

trouver une infinité de courbes tracées sur la surface et tangentes en chacun de leurs points à la droite D correspondante. Ceci nous montre géométriquement que toutes les surfaces intégrales s'obtiennent en liant les paramètres u et v par une relation absolument arbitraire $\varphi(u, v) = 0$, c'est-à-dire que $\varphi(u, v) = 0$ donne toutes les surfaces intégrales de l'équation (3). Il y aurait cependant une exception si la surface considérée satisfaisait aux trois équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, car, dans ce cas, à tout point x, y, z qui annule P, Q, R , il ne correspond plus, en réalité, de droite D , cette droite est indéterminée.

Ainsi nous venons de voir que toutes les surfaces intégrales d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre sont les surfaces d'une certaine congruence de courbes. Réciproquement, étant donnée une congruence quelconque, toutes les surfaces de cette congruence satisfont à une certaine équation linéaire du premier ordre. En effet, soient

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b$$

les équations de la congruence. Une surface quelconque de la congruence aura une équation de la forme

$$(A) \quad \varphi(u, v) = 0,$$

où φ désigne une fonction absolument arbitraire. Je dis que z , considérée comme une fonction de x et de y , définie par l'équation (A), satisfait à une équation linéaire du premier ordre; on aura, en effet, pour cette fonction z ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p \right) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q \right) &= 0; \end{aligned}$$

comme on ne peut pas avoir simultanément $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, sans

(*) Les intégrales exceptionnelles signalées à la page 33 correspondent au cas où les équations (1) admettraient elles-mêmes des relations singulières. Ce point sera développé en détail plus loin.

que q soit indépendant de u et de v , il faut nécessairement que le déterminant suivant soit nul :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} + \frac{D(u, v)}{D(z, y)} p + \frac{D(u, v)}{D(x, z)} q = 0.$$

EXEMPLES. — 1° Toutes les droites parallèles à une droite donnée forment une congruence dont les équations sont

$$\begin{cases} u = cx - az = \alpha, \\ v = cy - bz = \beta, \end{cases}$$

a, b, c étant les paramètres directeurs de la droite donnée. On en conclut que tous les cylindres dont les génératrices sont parallèles à la droite

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

satisfont à l'équation

$$ap + bq = c.$$

De même, toutes les droites qui passent par un point fixe x_0, y_0, z_0 forment une congruence dont les équations sont

$$\begin{cases} \frac{z - z_0}{x - x_0} = a, \\ \frac{z - z_0}{y - y_0} = \beta. \end{cases}$$

D'où il résulte que tous les cônes ayant pour sommet le point x_0, y_0, z_0 satisfont à l'équation

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0.$$

2° Toutes les surfaces qui coupent orthogonalement la famille de surfaces

$$f(x, y, z) = a,$$

où α désigne un paramètre variable, satisfait à l'équation du premier ordre

$$P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Les caractéristiques de cette équation sont données par les équations différentielles

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Ce sont donc les trajectoires orthogonales de la famille de surfaces $f = \alpha$; résultat évident *a priori*.

3° Cherchons les relations que doivent vérifier P, Q, R pour que les caractéristiques soient des droites. Soit

$$Pp + Qq = R$$

une équation satisfaisant à cette condition. Posons, pour abréger,

$$u = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad v = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad w = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$

de telle façon qu'on ait

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

L'équation cherchée prendra la forme

$$up + vq = w.$$

Soit, alors, m un point de coordonnées x, y, z et D la droite correspondante dont les cosinus directeurs seront évidemment u, v, w . Pour que les caractéristiques soient des droites, il faut qu'en un point voisin m' pris sur la caractéristique, u, v, w soient les mêmes; il faut donc que l'on ait

$$du = 0, \quad dv = 0, \quad dw = 0,$$

pour les systèmes de valeurs de x, y, z satisfaisant aux relations

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

La condition $du = 0$ s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0,$$

ou

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

En tenant compte de la relation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

qui donne

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

on peut encore écrire cette condition

$$v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = w \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Les conditions $dv = 0$, $dw = 0$ fournissent deux relations analogues à la précédente et finalement on arrive à deux équations distinctes seulement :

$$(9) \quad \frac{\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}}{u} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}}{v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}}{w}.$$

Si ces relations sont vérifiées quels que soient x, y, z , on obtiendra immédiatement les caractéristiques en prenant les droites D issues de tous les points d'une surface, par exemple d'un des plans de coordonnées ⁽¹⁾.

4° On satisfait aux équations (9) en prenant pour u, v, w les dérivées partielles d'une fonction θ qui devra vérifier la relation

$$\Delta \theta = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 = 1.$$

(1) Si les relations (9) ne se réduisent pas à des identités, elles définissent une courbe ou une surface, qui est le lieu des points où les caractéristiques ont un contact du second ordre avec la tangente. On peut se proposer de même de trouver les conditions que doivent vérifier P, Q, R pour que les caractéristiques soient des cercles, ou des coniques, ou simplement des courbes planes. Dans ce dernier cas, on voit aisément que l'on obtient par des calculs algébriques l'intégrale générale des équations (7), sauf dans un cas particulier où on aura seulement une intégrale première.

Il en résulte que les caractéristiques de l'équation

$$p \frac{\partial \theta}{\partial x} + q \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

seront des droites. Si nous nous reportons aux conclusions du deuxième exemple, nous voyons que ces caractéristiques sont les trajectoires orthogonales de la famille de surfaces

$$\theta(x, y, z) = \alpha,$$

et puisque les caractéristiques sont des droites, on en conclut que la famille $\theta = \alpha$ est une famille de surfaces parallèles.

21. On rencontre souvent dans des problèmes de géométrie des équations du premier ordre qui se décomposent en plusieurs équations linéaires. Ainsi, par exemple, cherchons l'équation aux dérivées partielles des surfaces qui coupent orthogonalement la famille de surfaces

$$(A) \quad f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

dont l'équation contient le paramètre arbitraire α au degré m . Pour avoir cette équation, il faudra éliminer α entre l'équation (A) et l'équation

$$(B) \quad p \frac{\partial f}{\partial x} + q \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Soit

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0$$

l'équation ainsi obtenue; je dis que φ est le produit de m facteurs linéaires par rapport à p et q . En effet, en un point quelconque de l'espace x_0, y_0, z_0 , passent m surfaces de la famille (A) correspondant aux valeurs du paramètre α racines de l'équation

$$f(x_0, y_0, z_0, \alpha) = 0.$$

Soient ON_1, ON_2, \dots, ON_m les normales à ces m surfaces au point $O(x_0, y_0, z_0)$, $u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; \dots; u_m, v_m, w_m$, leurs cosinus directeurs. Toute surface orthogonale à une des surfaces de la famille, en O , devra être tangente à l'une des droites $ON_1, ON_2,$

44 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

..., ON_m et par suite satisfaisant à l'une des équations

$$u_i p + v_i q - w_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

On en conclut que φ est égal au produit

$$P = (u_1 p + v_1 q - w_1) \dots (u_m p + v_m q - w_m),$$

abstraction faite d'un facteur indépendant de p et de q .

De telles équations font correspondre, à chaque point de l'espace, m droites D_1, D_2, \dots, D_m , et elles expriment que le plan tangent à la surface intégrale contient une de ces m droites. Nous pourrions alors généraliser ce que nous avons dit au § 2.) et désigner sous le nom de *courbe caractéristique* une courbe telle qu'en chacun de ses points elle soit tangente à l'une des m droites correspondantes. Les considérations employées plus haut nous montrent encore que toute surface intégrale est un lieu de caractéristiques. Il est à remarquer que, pour former les équations différentielles de ces courbes, il n'est pas nécessaire de savoir effectuer la décomposition de $\varphi(x, y, z, p, q)$. En effet, soit $Pp + Qq - R$ un facteur linéaire de φ . En exprimant que $\varphi(x, y, z, p, q)$ est divisible par $Pp + Qq - R$, on aura des équations de condition homogènes en P, Q et R , qui, pour chaque point (x, y, z) , fourniront m systèmes de valeurs pour $\frac{P}{R}$ et $\frac{Q}{R}$. En remplaçant dans ces équations P, Q, R par les quantités proportionnelles dx, dy, dz , on aura les équations différentielles des caractéristiques.

22. La détermination des intégrales qui satisfont à des conditions données se trouve ainsi ramenée à un problème de géométrie. Ainsi, pour avoir la surface intégrale qui passe par une courbe donnée, il suffira de prendre les caractéristiques qui passent par les divers points de cette courbe. Il y aura indétermination si la courbe donnée est elle-même une caractéristique, et dans ce cas seulement. De même, on obtiendra une surface intégrale tangente à une surface, en prenant toutes les caractéristiques tangentes à cette surface.

23. Nous pouvons, en employant un langage géométrique conventionnel, étendre ces considérations à une équation linéaire à

n variables. Nous dirons qu'un système de valeurs $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, des variables x_1, x_2, \dots, x_n sont les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions. Nous désignerons sous le nom de *courbe* l'ensemble des points dont les coordonnées sont des fonctions d'une seule variable, et nous appellerons *surface* l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont à une seule relation

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Considérons alors l'équation

$$P_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial z}{\partial x_n} - R = 0,$$

où P_1, \dots, P_n, R sont fonctions de x_1, \dots, x_n, z . Soit

$$V(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

une relation définissant une intégrale. Nous appellerons *surface intégrale* la surface définie par cette relation. Nous avons vu que, si on considère le système d'équations différentielles suivant

$$\frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R},$$

et si

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad \dots, \quad u_n = C_n \quad (C)$$

est l'intégrale générale de ce système, l'intégrale générale de l'équation proposée sera définie par la relation

$$\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

où Φ désigne une fonction arbitraire.

Les équations (C) définissent une courbe dans l'espace à $n + 1$ dimensions; c'est cette courbe que nous appellerons *courbe caractéristique*, et on voit que la surface intégrale la plus générale s'obtient en associant suivant une loi arbitraire les courbes caractéristiques. On verra d'ailleurs aisément que, réciproquement, si on considère dans l'espace à $n + 1$ dimensions une famille de courbes dépendant de n paramètres arbitraires, les surfaces obtenues en associant suivant

1° Supposons $q \geq n$. Si parmi les q équations il y en a n indépendantes, le système n'aura évidemment que la solution unique

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{constante.}$$

Si le système proposé contient moins de n équations indépendantes, on pourra le remplacer par un système de n' équations ($n' < n$), équivalent au premier et composé d'équations indépendantes.

2° Supposons $q < n$ et supposons, de plus, ce qu'on peut toujours faire, les équations indépendantes. Nous allons montrer qu'on peut former de nouvelles équations linéaires qui devront être satisfaites par toutes les solutions des équations (10). En effet, soit f une intégrale des équations (10), on aura

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0,$$

et par suite

$$X_1[X_2(f)] = X_1[0] = 0,$$

$$X_2[X_1(f)] = X_2[0] = 0,$$

f satisfait donc à l'équation

$$(12) \quad X_1[X_2(f)] - X_2[X_1(f)] = 0.$$

Cette équation (12) est encore linéaire et du premier ordre. En effet, il est facile de vérifier que toutes les dérivées du second ordre de f disparaissent dans le premier membre.

- Le coefficient de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ est

$$a_2' a_2'' - a_2'' a_2' = 0,$$

et celui de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ est

$$a_2' a_1'' + a_1' a_2'' - a_2'' a_1' - a_1'' a_2' = 0.$$

D'ailleurs, le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial x_s}$ est.

$$\alpha'_1 \frac{\partial \alpha'_1}{\partial x_1} + \alpha'_2 \frac{\partial \alpha'_2}{\partial x_2} + \dots + \alpha'_s \frac{\partial \alpha'_s}{\partial x_s} \\ - \alpha''_1 \frac{\partial \alpha'_1}{\partial x_1} - \alpha''_2 \frac{\partial \alpha'_2}{\partial x_2} - \dots - \alpha''_s \frac{\partial \alpha'_s}{\partial x_s} = X_1(\alpha'_s) - X_s(\alpha'_s).$$

L'équation (12) peut donc s'écrire sous la forme

$$(12)' \quad X_1[X_s(f)] - X_s[X_1(f)] = \sum_{i=1}^{s-1} \{ X_1(\alpha'_i) - X_s(\alpha'_i) \} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Imaginons que l'on ait formé toutes les équations, telles que l'équation (12), que l'on obtient en combinant deux quelconques des équations (10); ces équations admettront toutes les intégrales du système (10). Désignons par

$$X_{q+1}(f) = 0, \quad X_{q+2}(f) = 0, \quad \dots, \quad X_{q+s}(f) = 0,$$

toutes celles de ces nouvelles équations qui sont indépendantes entre elles et qui forment avec les équations (10) un système

$$(13) \quad X_1(f) = 0, \quad \dots, \quad X_q(f) = 0, \quad X_{q+1}(f) = 0, \quad \dots, \quad X_{q+s}(f) = 0,$$

d'équations indépendantes. Si $q + s = n$, le système (13) et, par suite, le système (10) n'admettra que la solution banale $f = C$. Si $q + s < n$, on pourra recommencer sur le système (13) les opérations faites sur le système (10), et ainsi de suite. En continuant de la sorte, on arrivera finalement, soit à un système de n équations indépendantes, et alors le système (10) n'admet que la solution $f = C$; soit à un système de r équations indépendantes, où $r < n$, et tel que toutes les combinaisons

$$X_1[X_s(f)] - X_s[X_1(f)]$$

soient des fonctions linéaires de $X_1(f), X_2(f), \dots, X_r(f)$. Dans le second cas, nous serons arrivés à un système tel que l'application de la méthode précédente ne donne aucune équation nouvelle. Un tel système a été appelé par Clebsch *système complet*.

Nous voyons, en résumé, que la recherche des intégrales d'un

système de la forme (10) se ramène à la recherche des intégrales d'un système complet.

23. La théorie des systèmes complets repose sur les propriétés suivantes. 1° Soit,

$$(14) \quad X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0, \quad \dots, \quad X_r(f) = 0$$

un système complet. Si on fait un changement de variables défini par des relations

$$(A) \quad x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

résolubles par rapport aux nouvelles variables y_1, y_2, \dots, y_n , le système (14) sera remplacé par un nouveau système qui sera aussi complet. En effet, on pourra considérer inversement y_1, y_2, \dots, y_n comme des fonctions de x_1, x_2, \dots, x_n :

$$y_k = \psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Remplaçons dans f, x_1, x_2, \dots, x_n en fonction de y_1, y_2, \dots, y_n , on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i};$$

puis, portons dans $X(f)$ ces expressions des quantités $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ et substituons à x_1, x_2, \dots, x_n les variables y_1, y_2, \dots, y_n . On aura un résultat de la forme

$$Y(f) = b_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + b_n \frac{\partial f}{\partial y_n},$$

où b_1, b_2, \dots, b_n désignent des fonctions de y_1, y_2, \dots, y_n , c'est-à-dire que l'on aura identiquement

$$X(f) = Y(f),$$

en vertu de la substitution (A), f désignant dans le premier membre une fonction de x_1, x_2, \dots, x_n et dans le second membre la même fonction exprimée au moyen de y_1, y_2, \dots, y_n . Le changement de variables (A) substituera donc au système (14) le système

$$(15) \quad Y_1(f) = 0, \quad Y_2(f) = 0, \quad \dots, \quad Y_r(f) = 0.$$

qui sera, évidemment, composé d'équations indépendantes. Je dis que le système (15) est un système complet. En effet, on a identiquement

$$X_1(f) = Y_1(f), \quad X_2(f) = Y_2(f),$$

quel que soit f . Donc on a aussi

$$\begin{aligned} X_1[X_2(f)] &= Y_1[X_2(f)] = Y_1[Y_2(f)] \\ X_2[X_1(f)] &= Y_2[X_1(f)] = Y_2[Y_1(f)] \end{aligned}$$

et, par suite,

$$X_1[X_2(f)] - X_2[X_1(f)] = Y_1[Y_2(f)] - Y_2[Y_1(f)].$$

en vertu de la substitution (A). D'ailleurs, puisque, par hypothèse, le système (14) est complet, on a identiquement

$$X_1[X_2(f)] - X_2[X_1(f)] = \lambda_1 X_1(f) + \dots + \lambda_r X_r(f).$$

On en conclut, en faisant le changement de variables (A), que l'on a aussi

$$Y_1[Y_2(f)] - Y_2[Y_1(f)] = \lambda'_1 Y_1(f) + \dots + \lambda'_r Y_r(f)$$

en désignant par $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_r$ ce que deviennent $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ quand on y remplace x_1, x_2, \dots, x_n en fonction de y_1, y_2, \dots, y_n . Le système (15) est donc aussi complet.

2° Si on remplace le système (14) par un système équivalent, le nouveau système sera un système complet. Nous appellerons système équivalent au système (14) un système

$$(16) \quad Z_1(f) = 0, \quad Z_2(f) = 0, \quad \dots, \quad Z_r(f) = 0,$$

tel que l'on ait identiquement

$$Z_2(f) = A_1^2 X_1(f) + A_2^2 X_2(f) + \dots + A_r^2 X_r(f),$$

les quantités A_i^2 étant des fonctions de x_1, \dots, x_n telles que le déterminant

$$D = \sum \pm A_1^1 A_2^2 \dots A_r^r$$

soit différent de 0. Il est clair qu'inversement $Z_1(f), \dots, Z_r(f)$ s'exprimeront linéairement au moyen de $X_1(f), \dots, X_r(f)$. La différence

$$Z_1(Z_2(f)) - Z_2(Z_1(f)),$$

avoir $\lambda_k = 0$ puisque le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ ($k \leq m$) dans le second membre est λ_k . Donc,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

On en conclut, en se reportant aux égalités (12)', que les coefficients b satisfont aux relations

$$(18) \quad X_i(b_i^h) - X_i(b_i^h) = 0, \quad \begin{cases} (i, k = 1, 2, \dots, m), \\ (h = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

27. THÉORÈME. — Tout système complet de m équations à $m + n$ variables indépendantes admet n intégrales distinctes.

Puisque tout système complet se ramène à un système jacobien, il nous suffit d'établir la proposition pour un système jacobien. Considérons alors le système (17); l'équation $X_1(f) = 0$ admet (§ 17) $(m + n - 1)$ intégrales distinctes y_1, y_2, \dots, y_{m+n} . Soit y_1 une fonction de x_1, x_2, \dots, x_n distincte des précédentes; prenons y_1, y_2, \dots, y_{m+n} comme nouvelles variables. L'équation $X_1(f) = 0$ sera remplacée par l'équation $\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$, puisque la nouvelle équation doit admettre les intégrales y_2, y_3, \dots, y_{m+n} . Imaginons, de plus, qu'on ait résolu les $(m - 1)$ équations restantes par rapport à $m - 1$ dérivées, soit $\frac{\partial f}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}$. Le système (17) sera alors remplacé par le système jacobien équivalent

$$(19) \quad \begin{cases} Y_1(f) = \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0, \\ Y_2(f) = \frac{\partial f}{\partial y_2} + c_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_{n+1}} + \dots + c_n^2 \frac{\partial f}{\partial y_{n+n}} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ Y_n(f) = \frac{\partial f}{\partial y_n} + c_1^n \frac{\partial f}{\partial y_{n+1}} + \dots + c_n^n \frac{\partial f}{\partial y_{n+n}} = 0, \end{cases}$$

dans lequel les quantités c_i sont des fonctions des seules variables y_1, y_2, \dots, y_{m+n} . En effet, le système (1') est complet (§ 25) et, puisqu'il est résolu par rapport à $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$, il est jacobien.

On a alors (§ 26)

$$Y_1(c_h^1) - Y_k(c_h^1) = 0, \quad \begin{cases} (h = 1, 2, \dots, n), \\ (k = 2, 3, \dots, n). \end{cases}$$

Mais c_h^1 est nul quel que soit h ; par suite,

$$Y_1(c_h^1) = \frac{\partial c_h^1}{\partial y_1} = 0.$$

La première des équations (19) nous montre que f ne doit pas dépendre de y_1 , et comme cette variable ne figure pas dans les équations

$$Y_1(f) = 0, \quad \dots, \quad Y_n(f) = 0,$$

nous pouvons en faire abstraction, et nous sommes ramenés à chercher les intégrales du nouveau système jacobien de $n - 1$ équations

$$Y_1(f) = 0, \quad \dots, \quad Y_n(f) = 0.$$

On ramènera de même ce système à un système jacobien de $n - 2$ équations à $m + n - 2$ variables, et ainsi de suite. Finalement, on arrivera à une seule équation linéaire à $n + 1$ variables, admettant les mêmes intégrales que le système proposé. Le théorème étant vrai pour $n = 1$, il s'ensuit qu'il est général. Nous voyons de plus que si q_1, q_2, \dots, q_n désignent n intégrales distinctes des équations (17), toute autre intégrale commune sera de la forme

$$f = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

Π désignant une fonction arbitraire.

Pour passer du système (17) au système (19), il faut avoir intégré l'équation linéaire $X_1(f) = 0$, ou, ce qui revient au même, le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{0} = \dots = \frac{dx_n}{0} = \frac{dx_{n+1}}{b_1^1} = \dots = \frac{dx_{m+n}}{b_1^1},$$

qui se réduit à un système de n équations du premier ordre. Pour passer du système (19) au système jacobien suivant, il faudrait encore intégrer un nouveau système de n équations du premier ordre,

et ainsi de suite. En définitive, pour intégrer par cette méthode le système (17), on aurait à intégrer successivement m systèmes de n équations différentielles du premier ordre, et à faire $m - 1$ changements de variables.

REMARQUE I. — Les n intégrales distinctes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ du système (17) sont encore distinctes si on les considère comme fonctions des seules variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}$. Supposons, en effet, qu'il existe une relation identique de la forme

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0,$$

on aurait alors

$$X_h(\Phi) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_h} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} X_h(\varphi_1) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} X_h(\varphi_2) + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_n} X_h(\varphi_n) = 0,$$

$$(h = 1, 2, \dots, m).$$

D'ailleurs, puisque $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont des intégrales du système (17), la relation précédente se réduira à

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_h} = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, m);$$

Φ serait donc indépendante de x_1, x_2, \dots, x_m et il y aurait une relation entre les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, ce qui n'est pas.

REMARQUE II. — D'après ce qui précède, il est clair que si m équations linéaires indépendantes à $(m + n)$ variables admettent n intégrales distinctes, le système formé par ces m équations est un système complet. Car, s'il n'était pas complet, il serait compris dans un système complet de plus de m équations et, par suite, ne pourrait admettre n intégrales distinctes.

28. Méthode de Mayer (1). — La méthode d'intégration précédente exige, nous l'avons vu, des calculs assez pénibles. Des méthodes

(1) Le procédé employé ici est identique au fond à celui de Mayer; la méthode même de ce géomètre sera exposée dans le chapitre suivant.

plus simples ont été données par Clebsch (1), Weiler (2) et Mayer (3). Celle qui exige le moins d'intégrations est due à Mayer; nous nous bornerons à celle-là.

THÉORÈME. — Soit $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n+1}^0$ un système de valeurs des variables x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , au voisinage desquelles les coefficients b_i du système (17) sont holomorphes; il existe n intégrales q_1, q_2, \dots, q_n du système jacobien

$$(17) \quad \begin{cases} x_i(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} + \dots + v_m \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

holomorphes au voisinage du point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m+1}^0$, et se réduisent respectivement à x_{m+1}, \dots, x_{m+n} pour

$$x_1 = x_1^0, \quad \dots, \quad x_n = x_n^0.$$

Ce théorème est vrai dans le cas de $m = 1$, car il se réduit à un cas particulier du théorème de Cauchy; pour montrer qu'il est général, il suffira de démontrer que, s'il est vrai pour $(m - 1)$ équations, il est encore vrai pour m . Supposons donc qu'il soit vrai pour $(m - 1)$ équations. Nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer

$$x_1^0 = x_2^0 = \dots = x_{n+1}^0 = 0.$$

L'équation $X_1(f) = 0$ admet les intégrales évidentes x_2, x_3, \dots, x_n et, d'après le théorème de Cauchy, elle admettra, en outre, n intégrales $x'_{n+1}, x'_{n+2}, \dots, x'_{n+n}$, holomorphes au voisinage de $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+n} = 0$, et se réduisant respectivement à $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+n}$ pour $x_1 = 0$

[illegible]

(*) C. L. Calkin, Über die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen (Journal de Crelle, t. LXV).

(9) Weller, *Schweizer's Zeitschrift für Mathematik*, Bd VII, 1882, et Bd IX.

*) Mayer, *Über unendliche integrable Systeme*, etc. (Mathematische Annalen, I. V).
Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, I. XI, 1^{re} série.

Poseons, pour la symétrie de la notation,

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad \dots, \quad x'_n = x_n,$$

et prenons les quantiles $x'_1, x'_2, \dots, x'_{m+1}$ pour nouvelles variables. Puisque le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(x'_{n+1}, x'_{n+2}, \dots, x'_{n+r})}{D(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+r})}$$

est égal à 1 pour $x_1 = 0$, on en conclut que, au voisinage de $x_1 = 0$, on pourra résoudre les équations (A) par rapport à $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+p}$ et les mettre sous la forme

[illegible]

par suite, toute fonction holomorphe de x_1, \dots, x_{n+p} est aussi une fonction holomorphe des nouvelles variables, et inversement. Ceci posé, l'équation $X_1(\zeta) = 0$ deviendra, avec les nouvelles variables,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0;$$

d'ailleurs, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \cdot \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i},$$

$$(i = 2, 3, \dots, m),$$

ct

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n+h}} = \frac{\partial f}{\partial x'_{n+1}} \frac{\partial x'_{n+1}}{\partial x_{n+h}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x'_{n+n}} \frac{\partial x'_{n+n}}{\partial x_{n+h}}.$$

$$(h = 1, 2, \dots, n).$$

Donc le système (17) sera remplacé, avec les nouvelles variables, par le système

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_1' \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} + \dots + c_n' \frac{\partial f}{\partial x_{n+n}} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + c_1^n \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} + \dots + c_n^n \frac{\partial f}{\partial x_{n+n}} = 0, \end{array} \right.$$

où les quantités c'_i désignent des fonctions des seules variables x'_1, \dots, x'_{n+1} (§ 27) et, comme les fonctions c'_i se déduisent de fonctions holomorphes par les seules opérations de l'addition et de la multiplication, on en conclut que ces fonctions sont régulières au voisinage du point

$$x'_1 = x'_2 = \dots = x'_{n+1} = 0.$$

Le théorème étant supposé vrai pour $(m - 1)$ équations, il existe un système de n intégrales $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, régulières au voisinage de $x'_1 = x'_2 = \dots = x'_{n+1} = 0$, satisfaisant aux $(m - 1)$ dernières équations (20) et se réduisant respectivement à $x'_{n+1}, \dots, x'_{n+1}$ pour $x'_1 = x'_2 = \dots = x'_n = 0$

$$\varphi_i = x'_{n+1} + x'_1 C_i + \dots$$

D'ailleurs, ce système d'intégrales satisfera évidemment à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = 0, \text{ puisqu'elles sont indépendantes de } x'_i.$$

Par suite, en remplaçant les variables $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1}$ par les variables x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , on en conclut que le système proposé admet le système d'intégrales

$$\varphi_i = x_{n+1} + x_i D_i + \dots, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

holomorphes au voisinage du point

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 0,$$

et se réduisant respectivement à x_{n+1}, \dots, x_{n+1} pour $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

29. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ les intégrales satisfaisant aux conditions précédentes. Nous dirons qu'un tel système d'intégrales forme un *système fondamental* relatif au point

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \dots, \quad x_{n+1} = x_{n+1}^0$$

Soit alors $\Phi(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+1})$ une fonction quelconque, holomorphe dans le voisinage du point $x_{n+1}^0, x_{n+2}^0, \dots, x_{n+1}^0$ la

fonction

$$V = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

aura une intégrale du système (17), holomorphe au voisinage du point

$$x_1 = x_1^0, \quad \dots, \quad x_{n+m} = x_{n+m}^0$$

et qui, pour

$$x_1 = x_1^0, \quad \dots, \quad x_n = x_n^0,$$

se réduira à la fonction $\Phi(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$. On peut donc énoncer la proposition suivante, qui est une extension du théorème général de Cauchy dans le cas d'une équation linéaire.

THÉORÈME. — Soit x_1^0, \dots, x_{n+m}^0 un système de valeurs pour lesquelles les coefficients b_i^j sont holomorphes, et $\Phi(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ une fonction holomorphe dans le voisinage du point $x_{n+1} = x_{n+1}^0, \dots, x_{n+m} = x_{n+m}^0$; les équations (17) admettent une intégrale commune holomorphe dans le domaine du point x_1^0, \dots, x_{n+m}^0 et se réduisant à $\Phi(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ pour

$$x_1 = x_1^0, \quad \dots, \quad x_n = x_n^0.$$

30. Cette proposition établie, soit $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n+m}^0$ un système de valeurs au voisinage desquelles les coefficients b_i^j , dans le système complet (17), sont holomorphes. La méthode de Mayer pour la recherche des n intégrales distinctes $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, qui satisfont à l'énoncé du théorème précédent, consiste à faire le changement de variables suivant :

$$(A) \quad x_1 = x_1^0 + y_1, \quad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \quad \dots, \quad x_n = x_n^0 + y_1 y_n;$$

on aura alors

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} y_n, \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial y_n} = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_n}. \end{cases}$$

La substitution directe des variables $y_1, y_2, \dots, y_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ aux variables $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ remplacera le système (17)

par le système équivalent

[illegible]

dans lequel les coefficients c_i^j sont des fonctions holomorphes dans le voisinage du système de valeurs

$$y_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_{n+1}^0, \quad \dots, \quad x_{n+n} = x_{n+n}^0,$$

$$y_1 = a_1, \quad \dots, \quad y_n = a_n,$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont des quantités arbitraires, car, quels que soient y_1, y_2, \dots, y_n , on a toujours, pour $x_1 = 0, x_2 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$. D'ailleurs, on voit qu'en vertu des relations (B) tous les coefficients c_i^j dans les équations $Y_1(f), Y_2(f), \dots, Y_n(f)$ contiennent en facteur y_1 . La substitution (A) remplacera les n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ par n fonctions $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ holomorphes au voisinage de

$$y_1 = 0, \quad x_{m+1} = x_m^0, \quad \dots, \quad x_{m+s} = x_m^s,$$

vérifiant les équations (21) et se réduisant respectivement à x_{n+1} , x_{n+2} , ..., x_{n+n} pour $y_1 = 0$. La recherche des intégrales φ_1 , φ_2 , ..., φ_n est donc ramenée à celle des intégrales ϕ_1 , ϕ_2 , ..., ϕ_n . Soit ϕ_1 une de ces intégrales. C'est une intégrale de l'équation $Y_1(f) = 0$ qui se réduit à x_{n+1} quand on fait $y_1 = 0$; or, le théorème de Cauchy nous apprend que l'équation $Y_1(f) = 0$ admet une intégrale régulière et une seule qui pour $y_1 = 0$ se réduit à x_{n+1} , c'est donc nécessairement ϕ_1 . Nous concluons de là que, pour trouver les n intégrales ϕ_1 , ϕ_2 , ..., ϕ_n qui satisfont au système (21) et aux conditions énoncées, il suffira de chercher n intégrales de l'équation unique $Y_1(f) = 0$ se réduisant respectivement à x_{n+1} , x_{n+2} , ..., x_{n+n} pour $y_1 = 0$. Ceci revient à dire qu'il suffira d'intégrer l'équation $Y_1(f) = 0$ ou, ce qui revient au même, le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dy_1}{1} = \frac{dy_2}{0} = \dots = \frac{dy_n}{0} = \frac{dx_{n+1}}{c_1'} = \dots = \frac{dx_{n+s}}{c_s'}.$$

Ce système admet les $(m - 1)$ intégrales évidentes

$$y_1 = C_1, \quad y_2 = C_2, \quad \dots, \quad y_m = C_m;$$

par suite, il suffira d'intégrer le système

$$\frac{dy_1}{1} = \frac{dx_{m+1}}{c_1^1} = \dots = \frac{dx_{m+n}}{c_n^1},$$

où on considérera y_1, y_2, \dots, y_m comme des paramètres. Donc, on peut énoncer la proposition suivante :

L'intégration d'un système complet de m équations, à $(m + n)$ variables indépendantes, se ramène à l'intégration d'un système de n équations différentielles du premier ordre.

REMARQUE. — On peut vérifier directement que les n intégrales $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ de l'équation $Y_1(f) = 0$, qui se réduisent respectivement à x_{m+1}, \dots, x_{m+n} pour $y_1 = 0$, satisfont aux $(m - 1)$ équations $Y_2(f) = 0, \dots, Y_m(f) = 0$.

D'une manière générale, soit

$$Y_1(f) = 0, \quad \dots, \quad Y_m(f) = 0$$

un système jacobien de m équations. On a identiquement

$$Y_1(Y_2(f)) = Y_2(Y_1(f));$$

si on remplace f par une intégrale quelconque ϕ de l'équation $Y_1(f) = 0$, la relation précédente se réduit à

$$Y_1(Y_2(\phi)) = 0,$$

de sorte que $Y_2(\phi)$ sera aussi une intégrale de la même équation. Cela posé, l'intégrale ϕ_2 de $Y_2(f) = 0$ qui se réduit à x_{m+2} pour $y_1 = 0$ est de la forme

$$\phi_2 = x_{m+2} + y_1 P_2$$

P_2 désignant une fonction holomorphe de $y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$ dans le voisinage des valeurs $0, x_1, \dots, x_m, c_{m+1}^0, \dots, c_{m+n}^0$. D'après ce que nous venons de dire, $Y_1(\phi_2)$ sera aussi une intégrale de l'équa-

tion $Y_1(f) = 0$. D'ailleurs on a

$$Y_1(\phi_2) = Y_1(x_{n+2}) + y_1 Y_1(P_2) + P_2 Y_1(y_1), \quad (i = 2, 3, \dots, m),$$

et comme

$$\begin{aligned} Y_1(y_1) &= 0, \\ Y_1(\phi_2) &= c_2' + y_1 Y_1(P_2). \end{aligned}$$

Puisque c_2' contient en facteur y_1 , comme nous l'avons fait remarquer plus haut, on a donc

$$Y_1(\phi_2) = y_1 Q_2,$$

Q_2 désignant une fonction holomorphe; $Y_1(\phi_2)$ est alors une intégrale régulière de l'équation $Y_1(f) = 0$ qui s'annule pour $y_1 = 0$. D'autre part, l'équation $Y_1(f) = 0$ admet l'intégrale évidente $f = 0$ satisfaisant à la condition précédente; comme, d'après le théorème de Cauchy, cette équation ne peut admettre qu'une seule intégrale holomorphe s'annulant pour $y_1 = 0$, on a nécessairement

$$Y_1(\phi_2) = 0, \quad (i = 2, 3, \dots, m),$$

ce qui démontre le théorème.

31. Pratiquement, voici comment il faudra appliquer la méthode de Mayer. On commencera par intégrer le système

$$(22) \quad \frac{dy_1}{1} = \frac{dx_{n+1}}{c_1'} = \dots = \frac{dx_{n+m}}{c_m'},$$

où on considère y_2, y_3, \dots, y_m comme des paramètres; soient f_1, f_2, \dots, f_n n intégrales distinctes quelconques de ce système. Les fonctions

$$y_1, \dots, y_m, \quad \phi_1, \dots, \phi_m$$

forment $(m + n - 1)$ intégrales distinctes de l'équation $Y_1(f) = 0$. Par suite toute autre intégrale de cette équation pourra s'exprimer au moyen des précédentes et on devra avoir des relations de la forme

$$\begin{aligned} f_i(y_1, y_2, \dots, y_m, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) &= F_i(y_1, \dots, y_m, \phi_1, \dots, \phi_m), \\ (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Pour avoir les intégrales ϕ_1, \dots, ϕ_m , il suffira de connaître la forme

des fonctions F_i ; or, pour $y_1 = 0$, on a, par hypothèse,

$$\phi_1 = x_{m+1} \quad \dots \quad \phi_n = x_{m+n},$$

donc, on doit avoir identiquement

$$f_i(0, y_2, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = F_i(y_2, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}).$$

Cette identité nous détermine la fonction F_i et on a donc

$$F_i(y_2, y_3, \dots, y_m, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = f_i(0, y_2, \dots, y_m, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n).$$

On en conclut qu'étant donnée une intégrale quelconque de l'équation $Y_1(f) = 0$, pour l'exprimer au moyen de

$$y_2, \dots, y_m, \quad \phi_1, \dots, \phi_n,$$

il suffit d'y remplacer y_1 par 0, et x_{m+1}, \dots, x_{m+n} par ϕ_1, \dots, ϕ_n respectivement.

Par conséquent, pour trouver les intégrales $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, il suffira, après avoir trouvé les n intégrales f_1, f_2, \dots, f_n , de résoudre les n relations

$$f_i = f_i(0, y_2, \dots, y_m, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

par rapport à $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$.

EXEMPLE. — Soit à intégrer le système ⁽¹⁾

$$(A) \begin{cases} X_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_2 + x_3 - 3x_1) \frac{\partial f}{\partial x_2} + (x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_1) \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \\ X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x_2} + (x_2 x_3 - x_1) \frac{\partial f}{\partial x_3} + (x_1 x_2 x_3 + x_2 - x_1 x_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

Si on forme

$$X_1[X_2(f)] - X_2[X_1(f)],$$

on trouve que cette quantité n'est pas identiquement nulle. En l'égalant à 0, on obtient une nouvelle équation

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

⁽¹⁾ Insehnetsky, Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, p. 126.

Cette équation, jointe aux précédentes, permet de remplacer le système (A) (§ 24) par le système équivalent

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = -(x_1 + 3x_1^2) \frac{\partial f}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = -x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4}, \end{cases}$$

qui est un système jacobien, comme il est aisé de le vérifier. Les coefficients étant holomorphes au voisinage de

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

nous ferons, pour intégrer, le changement de variables suivant :

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1 y_2, \quad x_3 = y_1 y_3.$$

Il suffit de calculer l'équation qui donne $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ dans le nouveau système; on trouve

$$Y_1(f) = \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} (2y_1 y_2 + 3y_1^2 + y_1 y_2^2) = 0.$$

Il faut donc intégrer l'équation

$$\frac{dy_1}{1} = \frac{dx_2}{2y_1 y_2 + 3y_1^2 + y_1 y_2^2},$$

dont l'intégrale générale est

$$C = x_1 - y_1^2 y_2 - y_1^2 - \frac{y_1^2 y_2^2}{2}.$$

Nous avons immédiatement l'intégrale ϕ qui, pour $y_1 = 0$, se réduit à x_1 . En revenant aux anciennes variables, nous voyons que le système (A) admet l'intégrale

$$\phi = x_1 - x_1 x_2 - x_1^2 - \frac{1}{2} x_1^2,$$

qui pour $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ se réduit à x_1 . Soit $f(x)$ une fonction

quelconque donnée à l'avance; le système (A) admettra l'intégrale

$$f(x_1 - x_1 x_2 - x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2)$$

qui, pour $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ se réduit à $f(x_1)$, et on aura ainsi l'intégrale générale de ce système.

32. Dans certaines questions, il arrive qu'on n'a pas besoin de l'intégrale générale d'un système complet, mais seulement d'une intégrale particulière. Mayer a montré que la connaissance d'une seule intégrale du système d'équations différentielles (22) permet de trouver au moins une intégrale du système (21) et, par suite, du système (17). Soit, en effet, $f(y_1, y_2, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$ une intégrale du système (22) et $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ le système fondamental d'intégrales de (21), on aura, comme on l'a vu plus haut,

$$f = f(0, y_1, \dots, y_m, \phi_1, \dots, \phi_n).$$

Réolvons cette relation par rapport à ϕ_1 ,

$$\phi_1 = \theta_1(y_1, y_2, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}, \phi_2, \dots, \phi_n).$$

Si ϕ_2, \dots, ϕ_n ne figurent pas dans θ_1 , on aura une intégrale, si ϕ_2, \dots, ϕ_n figurent dans θ_1 , écrivons que ϕ_1 satisfait à l'équation $Y_k(f) = 0$, en tenant compte que $\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ y satisfont aussi. On aura

$$Y_k(\phi_1) = \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} Y_k(y_1) + \dots + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{m+n}} Y_k(x_{m+n}) = 0,$$

k étant un des nombres 1, 2, ..., m . Si le second membre d'une de ces relations n'est pas identiquement nul, il devra contenir effectivement une des quantités ϕ_2, \dots, ϕ_n , car sans cela il y aurait une relation entre les variables indépendantes $y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$, ce qui est impossible. Supposons, par exemple, qu'elle contienne ϕ_2 , et résolvons-la par rapport à ϕ_2 , nous en tirerons

$$\phi_2 = \theta_2(y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}, \phi_1, \dots, \phi_n),$$

et on devra avoir

$$Y_k(\phi_2) = \frac{\partial \theta_2}{\partial y_1} Y_k(y_1) + \dots + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{m+n}} Y_k(x_{m+n}) = 0.$$

Si le second membre n'est pas nul identiquement, on pourra résoudre, par exemple, par rapport à ϕ_1 , et ainsi de suite; si on peut continuer, on arrivera finalement à une équation qui donnera ϕ_n et, par suite, en remontant, on aura $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$, c'est-à-dire qu'on aura non seulement une intégrale, mais toutes les intégrales du système (21). On ne pourra être arrêté dans ces opérations que si on trouve une expression

$$\phi_i = \theta_i(y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}, \phi_{i+1}, \dots, \phi_n),$$

telle que toutes les quantités

$$Y_k(\phi_i) = \frac{\partial \theta_i}{\partial y_1} Y_k(y_1) + \dots + \frac{\partial \theta_i}{\partial x_{m+n}} Y_k(x_{m+n}),$$

$$(k = 1, 2, \dots, m),$$

soient identiquement nulles. Mais, dans ce cas, il suffira de remplacer dans θ_i les quantités $\phi_{i+1}, \phi_{i+2}, \dots, \phi_n$ par des constantes arbitraires pour avoir une intégrale.

33. Supposons qu'on connaisse μ intégrales u_1, u_2, \dots, u_μ d'un système complet; faisons un changement de variables en prenant pour nouvelles variables u_1, u_2, \dots, u_μ et $(m + n - \mu)$ fonctions $u'_{\mu+1}, \dots, u'_{m+n-\mu}$, formant avec les précédentes un système de fonctions indépendantes. Le nouveau système ne contiendra aucune des dérivées $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_\mu}$ puisqu'il devra admettre les μ intégrales u_1, u_2, \dots, u_μ . On pourra donc considérer ce nouveau système comme un système de m équations à $(m + n - \mu)$ variables où u_1, u_2, \dots, u_μ seront des paramètres arbitraires. Il suffira, alors, pour terminer l'intégration du système, l'intégrer un système de $(n - \mu)$ équations différentielles du premier ordre ou, si l'on veut seulement une intégrale de plus, de trouver une intégrale de ce système.

Étant donné un système de n équations différentielles du premier ordre, appelons opération d'ordre n la recherche d'une intégrale première de ce système. Nous pourrions exprimer les résultats obtenus sous la forme abrégée suivante : La recherche de l'intégrale générale d'un système complet de m équations à $(m + n)$ variables

indépendantes exige que l'on fasse successivement des opérations d'ordre $n, n-1, \dots, 2, 1$. La recherche d'une seule intégrale exige une opération d'ordre n . Enfin, quand on connaît μ intégrales, la recherche d'une nouvelle intégrale exige une opération d'ordre $(n-\mu)$.

34. La méthode de Mayer, que nous venons d'exposer, est certainement la plus simple de toutes les méthodes d'intégration des systèmes jacobiens; cependant nous ferons connaître encore la méthode employée par Jacobi pour trouver une intégrale d'un système jacobien.

Considérons le système jacobien

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} X_i(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + b'_1 \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} + \dots + b'_n \frac{\partial f}{\partial x_{n+n}} = 0, \\ (i &= 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \right.$$

et, en particulier, l'équation

$$X_1(f) = 0.$$

Nous connaissons déjà $(m-1)$ intégrales évidentes de cette équation, à savoir : x_1, x_2, \dots, x_n . Supposons que nous ayons déterminé une autre intégrale φ_1 . D'après ce que nous avons vu, la fonction $\varphi_2 = X_1(\varphi_1)$ sera aussi une intégrale de l'équation $X_1(f) = 0$; il en sera de même de $\varphi_3 = X_1(\varphi_2)$ et ainsi de suite; en posant, d'une manière générale,

$$\varphi_i = X_1(\varphi_{i-1}),$$

nous formerons une suite de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots$ qui seront toutes des intégrales de l'équation $X_1(f) = 0$. D'ailleurs, comme l'équation $X_1(f) = 0$ n'a que $(n+n-1)$ intégrales distinctes, il devra nécessairement arriver, en continuant de la sorte, que l'on trouve une intégrale non distincte des précédentes. Supposons que cela arrive après i opérations, de telle sorte que l'on ait

$$\varphi_{i+1} = H(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, x_1, \dots, x_n). \quad (i \leq n).$$

Cherchons alors à déterminer une fonction

$$U(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, x_1, \dots, x_n)$$

satisfaisant à l'équation $X_1(f) = 0$: on devra avoir

$$X_1(0) = \frac{\partial 0}{\partial \varphi_1} X_1(\varphi_1) + \frac{\partial 0}{\partial \varphi_2} X_1(\varphi_2) + \dots + \frac{\partial 0}{\partial \varphi_i} X_1(\varphi_i) + \frac{\partial 0}{\partial x_n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(23) \quad \frac{\partial 0}{\partial \varphi_1} \varphi_1 + \frac{\partial 0}{\partial \varphi_2} \varphi_2 + \dots + \frac{\partial 0}{\partial \varphi_{i-1}} \varphi_{i-1} + \frac{\partial 0}{\partial \varphi_i} \Pi + \frac{\partial 0}{\partial x_n} = 0,$$

et on sera ramené à trouver une intégrale du système d'équations différentielles

$$\frac{d\varphi_1}{\varphi_1} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_2} = \dots = \frac{d\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-1}} = \frac{d\varphi_i}{\Pi} = \frac{dx_n}{1}, \quad (i \leq n),$$

qui peut lui-même être remplacé par l'équation unique

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dx_n^2} = \Pi \left(\varphi_1, \frac{d\varphi_1}{dx_n}, \dots, \frac{d^{i-1} \varphi_1}{dx_n^{i-1}}, x_1, \dots, x_n \right).$$

Soit $\phi_1 = C$ une intégrale de ce système; ϕ_1 sera une intégrale de l'équation (23) et, par suite, des deux équations $X_1(f) = 0$, $X_2(f) = 0$.

On formera ensuite une suite de fonctions

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, \dots, \text{ où } \phi_i = X_2(\phi_{i-1}),$$

qui seront toutes des intégrales du système

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0,$$

et comme ce système n'admet que $m + n - 2$ intégrales distinctes, on arrivera à une fonction ϕ_i telle que

$$\phi_{i+1} = \Phi(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (i \leq n).$$

Cherchons de même à déterminer une fonction

$$\theta(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, x_1, \dots, x_n)$$

satisfaisant à l'équation $X_2(f) = 0$; nous voyons que θ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi_1} \phi_1 + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial \phi_{i-1}} \phi_{i-1} + \frac{\partial \theta}{\partial \phi_i} \Phi + \frac{\partial \theta}{\partial x_n} = 0,$$

68 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.
dont l'intégration se ramène à celle de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \phi_1}{dx_2^2} = \Phi \left(\phi_1, \frac{d\phi_1}{dx_2}, \dots, \frac{d^{n-1} \phi_1}{dx_2^{n-1}}, x_2, \dots, x_n \right).$$

Une intégrale α_1 de l'équation en θ sera une intégrale commune aux trois équations

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0, \quad X_3(f) = 0,$$

et, en continuant de la sorte, on trouvera évidemment une intégrale du système jacobien.

REMARQUE I. — Si la dernière équation que l'on trouve dépend de $(n + 1)$ variables, il suffira de l'intégrer complètement pour avoir toutes les intégrales du système jacobien.

REMARQUE II. — La méthode générale peut dans certains cas se simplifier. Supposons que dans la suite des opérations on ait trouvé une intégrale φ des équations

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0, \quad \dots, \quad X_{n-1}(f) = 0.$$

Si $X_n(\varphi) = 0$, cette intégrale satisfait aussi à l'équation $X_n(f) = 0$.
Si $X_n(\varphi) = m$, m étant une constante, $\varphi - m x_n$ sera une intégrale commune aux équations

$$X_1(f) = 0, \quad \dots, \quad X_n(f) = 0,$$

car elle satisfait aux $(n - 1)$ premières et on a

$$X_n(\varphi - m x_n) = X_n(\varphi) - m = 0.$$

Plus généralement, si on a

$$X_n(\varphi) = F(\varphi, x_n, x_{n+1}, \dots, x_n),$$

cherchons à déterminer une fonction

$$\theta(\varphi, x_n, \dots, x_n),$$

qui satisfait toujours aux $(n - 1)$ premières équations, de façon à vérifier $X_n(f) = 0$. On devra avoir

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} X_n(\varphi) + \frac{\partial \theta}{\partial x_n} = 0.$$

s'est-à-dire

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} F + \frac{\partial \theta}{\partial x_n} = 0,$$

et, pour trouver une intégrale de $X_n(f) = 0$, on est ramené à intégrer l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{d\varphi}{F} = dx_n.$$

En particulier, si F ne dépend que de φ , on a l'intégrale générale par une quadrature

$$C = \int \frac{d\varphi}{F(\varphi)} - x_n.$$

Exercices.

Intégrer les systèmes suivants, où on a posé

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} :$$

$$1^\circ \quad 2x_1x_2^2p_1 + x_2^2x_3p_2 + x_3^2x_4p_3 = 0,$$

$$2x_2p_2 - x_1p_2 + x_3p_3 = 0,$$

$$x_1x_2^2p_3 + x_1x_3x_4p_3 + x_1x_4x_5p_3 = 0.$$

(COLLET.)

$$2^\circ \quad (x_1^2 - x_2^2)p_1 - (x_1x_2 - x_2x_3)p_2 + (x_2x_3 - x_3x_4)p_3 = 0,$$

$$(x_2^2 - x_3^2)p_2 + (x_2x_3 - x_3x_4)p_3 + (x_3x_4 - x_4x_5)p_4 = 0.$$

(COLLET.)

$$3^\circ \quad x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4 = 0,$$

$$x_2p_1 + x_3p_2 - x_4p_3 - x_5p_4 = 0.$$

(COLLET.)

$$4^\circ \quad 2x_1p_1 + x_2^2p_2 = 0,$$

$$x_2^2p_1 - 2x_2p_2 + (x_1^2x_2 - 2x_2^2)p_3 - 2x_1x_2p_4 = 0.$$

(GRANDBOIS.)

CHAPITRE III

Équations linéaires aux différentielles totales.

35. Toute équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre est équivalente, comme on l'a vu, à un certain système d'équations différentielles ordinaires. À tout système complet on peut de même rattacher un système d'équations linéaires aux différentielles totales.

Considérons le système d'équations aux différentielles totales

$$(1) \quad \begin{cases} dx_{n+1} = b_1^1 dx_1 + b_2^1 dx_2 + \dots + b_n^1 dx_n, \\ dx_{n+2} = b_1^2 dx_1 + b_2^2 dx_2 + \dots + b_n^2 dx_n, \\ \dots\dots\dots \\ dx_{n+m} = b_1^m dx_1 + b_2^m dx_2 + \dots + b_n^m dx_n, \end{cases}$$

où on regarde x_1, \dots, x_n comme des variables indépendantes, x_{n+1}, \dots, x_{n+m} comme des fonctions de ces variables, et où les coefficients b_i^j sont des fonctions quelconques de x_1, \dots, x_{n+m} . Ce système est évidemment équivalent au système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_1} = b_1^1, & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_2} = b_2^1, & \dots, & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} = b_n^1, \\ \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_1} = b_1^2, & \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_2} = b_2^2, & \dots, & \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_n} = b_n^2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial x_{n+m}}{\partial x_1} = b_1^m, & \frac{\partial x_{n+m}}{\partial x_2} = b_2^m, & \dots, & \frac{\partial x_{n+m}}{\partial x_n} = b_n^m. \end{cases}$$

Cherchons les conditions pour que le système (1) admette un système d'intégrales où les valeurs initiales de toutes les variables puissent

être prises arbitrairement. Il est d'abord aisé de trouver des conditions nécessaires; en effet, des équations (2) on déduit

$$\frac{\partial^2 x_{m+1}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial b_1}{\partial x_2} + \frac{\partial b_2}{\partial x_{m+1}} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial b_1}{\partial x_{m+1}} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_2},$$

c'est-à-dire, en tenant compte des équations (2),

$$\frac{\partial^2 x_{m+1}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial b_1}{\partial x_2} + \frac{\partial b_2}{\partial x_{m+1}} b_1^2 + \dots + \frac{\partial b_1}{\partial x_{m+1}} b_n^2,$$

et, en posant

$$X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x_2} + b_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \dots + b_n^2 \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}},$$

$$\frac{\partial^2 x_{m+1}}{\partial x_1 \partial x_2} = X_2(b_1).$$

On trouverait de même

$$\frac{\partial^2 x_{m+1}}{\partial x_2 \partial x_1} = X_1(b_1^2),$$

et, par suite, tout système satisfaisant aux équations (1) ou (2) doit satisfaire aux relations

$$(3) \quad X_2(b_1) = X_1(b_1^2), \quad \begin{matrix} (i, k = 1, 2, \dots, m), \\ (h = 1, 2, \dots, n), \end{matrix}$$

qui expriment que

$$\frac{\partial^2 x_{m+1}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 x_{m+1}}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

Pour que l'on puisse prendre arbitrairement les valeurs initiales de toutes les variables, il faut que ces conditions (3) soient vérifiées identiquement, car sans cela elles donneraient des relations entre les valeurs initiales. Les conditions (3) sont donc nécessaires; nous allons montrer qu'elles sont suffisantes. Une démonstration directe de ce théorème a été donnée par M. Bouquet ⁽¹⁾. Nous le déduirons de la théorie des systèmes complets. Les conditions (3) expriment précisément que le système d'équations aux dérivées partielles

$$(4) \quad X_i(f) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

⁽¹⁾ *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. III, 1^{re} série, p. 205; 1872.

est un système jacobien (§ 26). Le système (4) admet donc n intégrales distinctes f_1, f_2, \dots, f_n et les équations

(5) $f_1 = C_1, f_2 = C_2, \dots, f_n = C_n$

définissent $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}$ en fonction de x_1, x_2, \dots, x_m et des n constantes arbitraires C_1, C_2, \dots, C_n puisque, comme nous l'avons vu (§ 27), f_1, f_2, \dots, f_n sont encore distinctes si on les considère comme des fonctions des seules variables x_{m+1}, \dots, x_{m+n} . Soient

$$x_{n+i} = \varphi_i(x_1, \dots, x_n, C_1, \dots, C_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ces fonctions : je dis qu'elles satisfont aux équations (1). En effet, puisqu'elles vérifient les équations (3), on a

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} = 0, \end{array} \right.$$

et il faut vérifier que si on tire de ces équations $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$, les formules obtenues sont identiques aux formules (1). Au lieu d'opérer ainsi, nous montrerons, ce qui revient au même, que si on porte dans les équations (6) les valeurs de $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ données par les équations (1), elles sont vérifiées. D'une manière générale, si dans la différentielle totale $d\Phi$ d'une fonction quelconque Φ on remplace $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ par les valeurs (1), on trouve pour résultat

$$d\Phi = Y_1(\Phi) dx_1 + Y_2(\Phi) dx_2 + \dots + Y_n(\Phi) dx_n.$$

La substitution dans les premiers membres des équations (6) donnera donc 0, puisque f_1, \dots, f_n sont des intégrales du système (4). Comme les équations (5) contiennent n constantes arbitraires, on pourra choisir les valeurs de ces n constantes de façon que $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}$ prennent des valeurs données à l'avance $x_{m+1}^0, \dots, x_{m+n}^0$ pour $x_1 = x_1^0, \dots, x_m = x_m^0$. Les conditions (3) sont donc suffisantes, et le système (1) est dit, alors, *complètement intégrable*.

Pour donner à la proposition précédente la forme précise sous laquelle elle a été énoncée par M. Bouquet, il suffit de particulariser les intégrales f_1, f_2, \dots, f_n . Nous savons, en effet, que le système jacobien (4)

admet n intégrales holomorphes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ qui, pour $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$, se réduisent respectivement à $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+n}$, à condition que les coefficients b_i^j soient holomorphes au voisinage du point $x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+n}^0$. Si nous considérons les intégrales du système (1) définies par les équations

$$\varphi_1 = x_{n+1}^0, \quad \dots, \quad \varphi_n = x_{n+n}^0$$

nous sommes conduits à la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Étant donné le système d'équations aux différentielles totales (1), où les coefficients b_i^j satisfont identiquement aux relations (3) et sont holomorphes au voisinage du point $x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+n}^0$; il existe un système de fonctions $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+n}$ des variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n , et un seul, satisfaisant au système (1), holomorphes au voisinage du point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ et prenant respectivement les valeurs $x_{n+1}^0, x_{n+2}^0, \dots, x_{n+n}^0$ pour*

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n = x_n^0.$$

L'intégration du système (1) se ramène donc à celle du système jacobien (4). Réciproquement si on a intégré le système (1) on aura immédiatement l'intégrale générale du système (4). Soient, en effet,

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad \dots, \quad f_n = C_n$$

les relations qui donnent l'intégrale générale du système (1), je dis que f_i est une intégrale du système (4). En effet, on a $df_i = 0$ pour tous les systèmes d'intégrales des équations (1), et, par suite,

$$X_1(f_i) dx_1 + \dots + X_n(f_i) dx_n = 0.$$

Comme x_1, x_2, \dots, x_n sont des variables indépendantes, on en conclut que

$$X_1(f_i) = 0, \quad \dots, \quad X_n(f_i) = 0,$$

pour tous les systèmes d'intégrales des équations (1), et, puisqu'on peut choisir arbitrairement les valeurs initiales de toutes les variables,

aient lieu identiquement.

38. Tout ce qui précède nous montre que l'intégration du système complètement intégrable (1) et celle du système jacobien (4) sont deux problèmes équivalents. Si f est une intégrale du système (4), $f = C$ est une intégrale du système (1) et réciproquement. La théorie de l'intégration des systèmes jacobiens doit donc pouvoir se déduire de celle des systèmes complètement intégrables. C'est ainsi, en effet, que Mayer est parvenu à la méthode d'intégration des systèmes jacobiens que nous avons exposée plus haut. Nous allons donner rapidement la théorie de l'intégration des systèmes complètement intégrables.

Considérons le système

tiré du système (1). Imaginons qu'on ait intégré ces équations en les considérant comme formant un système d'équations différentielles ordinaires par rapport à x_1 , où x_1, x_2, \dots, x_n désignent des paramètres arbitraires, et soit

l'intégrale générale de ce système, où on doit considérer $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ comme des constantes par rapport à x_1 , c'est-à-dire comme des fonctions de x_2, \dots, x_n . Remarquons que q_1, q_2, \dots, q_n sont n intégrales de $X_1(f) = 0$. Faisons un changement de variables et remplaçons les inconnues $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+n}$ par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. On aura

d'ailleurs, q_i étant une intégrale de (7), on a

$$X_1(a_1) = 0.$$

serons; de plus, si on fait le changement de variables (10), les coefficients du second membre dans les nouvelles équations doivent être indépendants de x_1 . Ce second membre ne changera donc pas si nous faisons $x_1 = x_1^0$ et comme, pour $x_1 = x_1^0$, x_{n+1}, \dots, x_{n+k} deviennent égaux à $x_{n+1}^0, \dots, x_{n+k}^0$, on en conclut que, par le changement de variables (10), les équations (1) sont remplacées par les équations

[illegible]

où $(b_i^0)_0$ représente le résultat de la substitution de $x_1^0, x_{m+1}^0, \dots, x_{m+n}^0$ à $x_1, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$ dans b_i^0 . Le système (11) peut être écrit sans qu'on ait intégré les équations (7), et on reconnaît aussitôt que les conditions d'intégrabilité sont vérifiées pour ces nouvelles équations.

Le système (11) s'intègre immédiatement dans le cas particulier où toutes les quantités (b_i^*) sont nulles. Son intégrale générale est évidemment

$$x_{n+1}^0 = C_1, \quad \dots, \quad x_{n+n}^0 = C_n,$$

C_1, C_2, \dots, C_n étant des constantes arbitraires, et, alors, l'intégrale générale du système (1) est donnée par les formules (10) où $x_{n+1}^0, \dots, x_{n+k}^0$ désignent des constantes absolues. Or, on peut toujours, par un changement de variables convenable, ramener le cas général à ce cas particulier. Il suffit, pour cela, de faire au préalable le changement de variables

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \quad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \quad \dots, \quad x_n = x_n^0 + y_1 y_n.$$

on aura alors

$$\begin{cases} dx_1 = dy_1, \\ dx_i = y_1 dy_1 + y_2 dy_2, \quad \dots, \quad dx_n = y_1 dy_n + y_n dy_1. \end{cases}$$

Ces formules nous montrent que tous les coefficients de dy_1, dy_2, \dots, dy_n dans le nouveau système contiennent un facteur y_1 et, par conséquent, s'annulent pour $y_1 = 0$. En résumé, l'intégration du système (1) se ramène à l'intégration d'un système unique de n équations différentielles du premier ordre.

L'application de cette proposition au système jacobien (4) conduit aux mêmes calculs que la méthode développée plus haut.

37. Considérons comme exemple l'équation

$$(12) \quad P \, dx + Q \, dy + R \, dz = 0.$$

Elle est équivalente au système

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R}.$$

Écrivons que ce système est complètement intégrable, nous devons avoir

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{P}{R} \right) + \left(-\frac{Q}{R} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{P}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{Q}{R} \right) + \left(-\frac{P}{R} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{Q}{R} \right).$$

Cette condition développée donne

$$(13) \quad P \left[\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right] + Q \left[\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right] + R \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right] = 0.$$

Supposons cette condition vérifiée identiquement : pour intégrer par la méthode de Mayer, nous poserons

$$x = x_0 + t, \quad y = y_0 + tu.$$

L'équation devient

$$(P) \, dt + (Q) [t \, du + u \, dt] + (R) \, dz = 0,$$

ou

$$[(P) + (Q) u] \, dt + t (Q) \, du + (R) \, dz = 0,$$

en désignant par (P) , (Q) , (R) ce que deviennent P , Q , R quand on remplace les variables x et y par les valeurs précédentes. Il nous faudra alors chercher l'intégrale de l'équation

$$(R) \frac{dz}{dt} + (P) + (Q) u = 0,$$

qui pour $t = 0$ se réduit à z_0 . Soit

$$F(z, u, t, z_0) = 0$$

l'équation qui donne cette intégrale; l'équation qui donnera l'inté-

grale générale de (12) sera

$$F\left(z, x - x_0, \frac{y - y_0}{z - z_0}, z_0\right) = 0,$$

z_0 désignant une constante arbitraire.

L'intégration de l'équation (12) est susceptible d'une interprétation géométrique. Soit $f(x, y, z) = C$ l'intégrale générale de cette équation, elle représente une famille de surfaces S que nous appellerons surfaces intégrales. Par tout point x_0, y_0, z_0 de l'espace passe une surface intégrale

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

et le plan tangent en un point quelconque x, y, z de chacune de ces surfaces a évidemment pour équation

$$(14) \quad P(X - x) + Q(Y - y) + R(Z - z) = 0.$$

La recherche de la fonction f est donc équivalente au problème suivant de géométrie :

A chaque point M de l'espace on fait correspondre un plan Π passant par ce point; déterminer une famille de surfaces telle que celle de ces surfaces qui passe au point M soit tangente au plan Π .

Nous pouvons conclure de ce qui précède que ce problème n'est pas toujours possible. Il est aisé de rattacher ce fait à la théorie des caractéristiques; nous retrouverons ainsi la condition d'intégrabilité. Faire correspondre à tout point de l'espace un plan passant par ce point, cela revient à se donner les cosinus directeurs A, B, C ; A_1, B_1, C_1 , de deux droites passant par ce point. S'il existe une famille de surfaces S

$$f(x, y, z) = C,$$

tangentes en chacun de leurs points au plan correspondant, la fonction f devra satisfaire aux deux équations

$$\begin{aligned} X(f) &= A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} + C \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ Y(f) &= A_1 \frac{\partial f}{\partial x} + B_1 \frac{\partial f}{\partial y} + C_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

qui expriment que le plan tangent contient les deux droites de paramètres A, B, C , et A_1, B_1, C_1 . Soit S une surface intégrale commune à ces deux équations; comme f satisfait à l'équation $X(f) = 0$, S pourra être engendrée par une famille de courbes (C) vérifiant les équations

$$(C) \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}$$

(voir § 20). De même, elle pourra être engendrée par une autre famille de courbes (D) satisfaisant aux équations

$$(D) \quad \frac{dx}{A_1} = \frac{dy}{B_1} = \frac{dz}{C_1}.$$

Soit alors M un point quelconque de l'espace, (C) et (D) les deux courbes de ces deux familles qui passent en M ; ces deux courbes devront être situées tout entières sur la surface S qui passe en M . Par les divers points M', M'', \dots , de (C) passent des courbes (D') , (D'') , ... qui engendrent une surface S' ; de même, par les divers points m', m'', \dots de (D) passent des courbes (C') , (C'') , ..., qui engendrent une surface S'' . Les deux surfaces S' et S'' devraient être confondues avec S . Il faudrait pour cela que toutes les courbes telles que (D') , (D'') , ..., rencontrent chacune des courbes (C') , (C'') , ..., ce qui n'aura évidemment pas lieu en général.

Pour achever les calculs, nous supposons, ce qui est toujours permis, qu'en ait ramené les deux équations aux dérivées partielles à la forme

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{\partial f}{\partial x} + A \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ Y(f) &= \frac{\partial f}{\partial y} + A_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas les courbes (C) , qui satisfont au système

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{A},$$

sont planes et situées dans des plans $y = y_0$, parallèles au plan des xz . De même les courbes (D) sont aussi des courbes planes situées dans des plans parallèles au plan des yz .

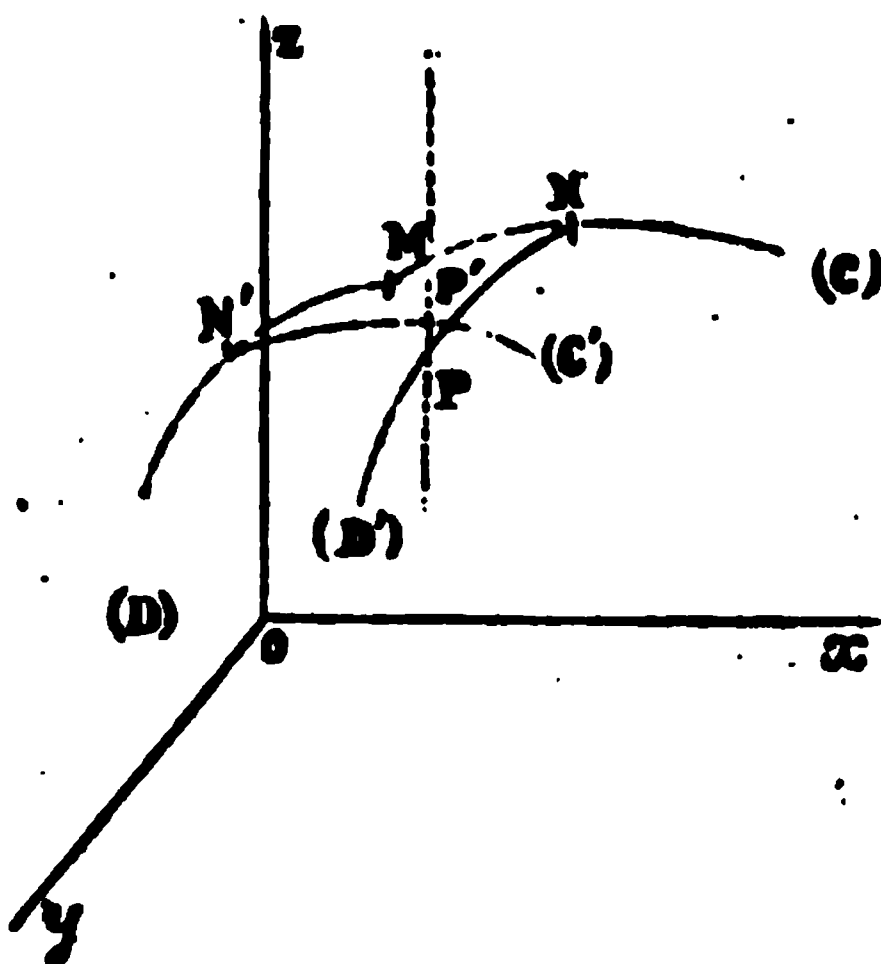
80 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Soit M un point de l'espace de coordonnées x, y, z , considérons les deux courbes (C) et (D) qui passent en M . Soit N un point voisin de M pris sur la courbe (C) , de coordonnées

$$x + \Delta x, \quad y, \quad z;$$

puis, soit P un point voisin de N et pris sur la courbe (D') passant par N . Ses coordonnées seront

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad Z.$$



D'autre part, considérons le point N' de (D) dont l'ordonnée est $y + \Delta y$, il aura pour coordonnées

$$x, \quad y + \Delta y, \quad z_0;$$

puis le point P' situé sur la courbe (C') qui passe par N' , dont l'abscisse est $x + \Delta x$, ses coordonnées seront

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad Z'.$$

Pour que les deux courbes (C') et (D') se rencontrent, il faut et il suffit que les deux points P et P' soient confondus, c'est-à-dire que

$$Z = Z'.$$

D'une manière plus générale, soit Φ une fonction quelconque des trois variables x, y, z et désignons par Φ_n la valeur de cette fonction pour les coordonnées (x, y, z) d'un point quelconque M . Il faudra que l'on ait identiquement

$$\Phi_r = \Phi_{r'}.$$

Calculons Φ_r et $\Phi_{r'}$; un calcul facile nous donne d'abord, en remarquant que, le long de la courbe C , $dy = 0$, $dz = A dx$,

$$\Phi_r = \Phi_n + \frac{\Delta x}{1} X(\Phi_n) + \frac{\Delta x^2}{2} X(X(\Phi_n)) + \dots + \frac{\Delta x^p}{1.2 \dots p} X^p(\Phi_n) + \dots,$$

$X^p(f)$ désignant le résultat de l'opération $X(f)$ appliquée p fois. On trouve de même

$$\Phi_r = \Phi_n + \frac{\Delta y}{1} Y(\Phi_n) + \dots + \frac{\Delta y^p}{1.2 \dots p} Y^p(\Phi_n) + \dots$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \Phi_r = \Phi_n + \frac{\Delta x}{1} X(\Phi_n) + \frac{\Delta y}{1} Y(\Phi_n) + \frac{\Delta x^2}{1.2} X^2(\Phi_n) + \Delta y \Delta x Y(X(\Phi_n)) \\ + \frac{\Delta y^2}{1.2} Y^2(\Phi_n) + \dots + \frac{1}{p!} [\Delta y Y(\Phi_n) + \Delta x X(\Phi_n)]^p + \dots, \end{aligned}$$

en employant la notation symbolique

$$[\Delta y Y(f) + \Delta x X(f)]^p = \Delta y^p Y^p(f) + \frac{p}{1} \Delta y^{p-1} \Delta x Y^{p-1}(X(f)) + \dots$$

On aura, d'une manière analogue,

$$\begin{aligned} \Phi_{r'} = \Phi_n + \frac{\Delta x}{1} X(\Phi_n) + \frac{\Delta y}{1} Y(\Phi_n) + \frac{\Delta y^2}{1.2} Y^2(\Phi_n) + \Delta x \Delta y X(Y(\Phi_n)) \\ + \frac{\Delta x^2}{1.2} X^2(\Phi_n) + \dots + \frac{1}{p!} [\Delta x X(\Phi_n) + \Delta y Y(\Phi_n)]^p + \dots, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Phi_{r'} - \Phi_r = \Delta x \Delta y \{ X(Y(\Phi_n)) - Y(X(\Phi_n)) \} + \dots \\ + \frac{1}{p!} \{ [\Delta x X(\Phi_n) + \Delta y Y(\Phi_n)]^p - [\Delta y Y(\Phi_n) + \Delta x X(\Phi_n)]^p \} + \dots \end{aligned}$$

Pour que cette différence soit nulle, quels que soient les accroisse-

ments Δx et Δy , il faut d'abord que l'on ait

$$X(Y(\Phi_n)) - Y(X(\Phi_n)) = 0$$

identiquement, car, si on regarde Δx et Δy comme infiniment petits du premier ordre, le second membre ne contiendra qu'un seul terme du second ordre; il faut donc que le système des équations $X(f) = 0$, $Y(f) = 0$ soit jacobien. Cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante, car elle exprime qu'on peut intervertir les deux opérations $X(\)$ et $Y(\)$ sans altérer le résultat final et, par suite, que l'on a toujours identiquement

$$X^2 Y^2(\Phi) = Y^2 X^2(\Phi);$$

la différence $\Phi_p - \Phi_r$ qui est une somme d'expressions de la forme

$$\Delta x^2 \Delta y^2 [X^2 Y^2(\Phi) - Y^2 X^2(\Phi)]$$

est donc identiquement nulle.

38. Tout ceci peut être étendu, en employant le langage hypergéométrique, aux systèmes complets à un nombre n de variables. Nous appellerons *multiplicité à p dimensions* l'ensemble des points dont les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n sont des fonctions de p paramètres indépendants. Une multiplicité à p dimensions sera définie par $(n - p)$ relations

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_{n-p}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

entre les coordonnées du point. D'après cela, une courbe est une multiplicité à une dimension et une surface une multiplicité à $(n - 1)$ dimensions. Si $n > 3$, on aura en outre des multiplicités à 2, 3, ..., $n - 2$ dimensions.

Considérons alors un système jacobien

$$X_1(f) = 0, \quad \dots, \quad X_q(f) = 0,$$

à n variables. Nous savons qu'un tel système admet $n - q$ intégrales distinctes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-q}$. Nous appellerons *multiplicité caractéristique* la multiplicité d'ordre q définie par les équations

$$\varphi_1 = C_1, \quad \varphi_2 = C_2, \quad \dots, \quad \varphi_{n-q} = C_{n-q},$$

où C_1, C_2, \dots, C_{n-q} sont des constantes arbitraires. Par chaque point

de l'espace x_1^0, \dots, x_n^0 passe une telle multiplicité

$$\varphi_1 = \varphi_1^0, \quad \dots, \quad \varphi_{n-g} = \varphi_{n-g}^0$$

et l'espace à n dimensions se trouve ainsi décomposé en ∞^{n-g} multiplicités à g dimensions. Considérons la surface intégrale

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-g}) = 0,$$

et un point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ de cette surface : on aura

$$F(\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_{n-g}^0) = 0,$$

ce qui prouve que la multiplicité caractéristique

$$\varphi_1 = \varphi_1^0, \quad \varphi_2 = \varphi_2^0, \quad \dots, \quad \varphi_{n-g} = \varphi_{n-g}^0$$

qui passe au point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, est située tout entière sur la surface. Donc, si une surface intégrale passe par un point, elle contient la multiplicité caractéristique qui passe par ce point. Nous voyons en outre que toute surface intégrale s'obtient en associant suivant une loi arbitraire les multiplicités caractéristiques.

Un raisonnement tout pareil à celui qui a été fait plus haut permet aisément de se rendre compte de l'existence de ces multiplicités. Prenons, pour fixer les idées, un système complet de trois équations

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0, \quad X_3(f) = 0.$$

Par un point quelconque x_1^0, \dots, x_n^0 passe une courbe caractéristique de la première équation $X_1(f) = 0$ (§ 23). De tous les points de cette courbe partent des courbes caractéristiques de l'équation $X_2(f) = 0$, dont l'ensemble forme une multiplicité à deux dimensions; de tous les points de cette multiplicité sont issues des courbes caractéristiques de $X_3(f) = 0$, et ces nouvelles courbes formeront une multiplicité à trois dimensions. Il est clair que toute surface intégrale passant par le point x_1^0, \dots, x_n^0 contiendra la multiplicité que nous venons de définir. Cette multiplicité ne doit pas dépendre de l'ordre dans lequel nous prenons les caractéristiques des trois équations. En les supposant résolues par rapport à trois dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$; un calcul analogue à celui qui a déjà été

fait nous donne les relations

$$X_i (X_k (f)) - X_k (X_i (f)) = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

comme conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi, et tout ceci s'étend évidemment au cas d'un nombre quelconque d'équations ⁽¹⁾.

On peut rattacher aux considérations précédentes une question de géométrie qui a fait l'objet d'un certain nombre de travaux. Étant donnée une famille de surfaces $\alpha = f(x, y, z)$, M. Bouquet a remarqué le premier qu'il n'était pas toujours possible de trouver deux autres familles de surfaces $\beta = \varphi(x, y, z)$, $\gamma = \psi(x, y, z)$, formant avec la première un système triple orthogonal. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, comme l'a démontré M. Darboux, que f satisfasse à une seule équation aux dérivées partielles du troisième ordre ⁽²⁾, équation qui a d'abord été calculée par M. Cayley.

Supposons, en effet, que la famille considérée de surfaces S fasse partie d'un système triple orthogonal $f = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\psi = \gamma$. Soit MN la normale à celle des surfaces S qui passe au point M , MT et MT' les axes de l'indicatrice de la surface S au point M . D'après le théorème de Dupin, l'une des surfaces S' ($\varphi = \beta$) ou S' ($\psi = \gamma$), qui passent en M , devra être tangente au plan NMT' et l'autre au plan MNT ; par exemple, S' sera tangente au plan MNT . La famille S étant donnée, le plan MNT est bien déterminé dès qu'on se donne le point M ; pour déterminer la famille S' , il faudra donc trouver une famille de surfaces tangentes en chacun de leurs points au plan MNT correspondant, ce qui, en général, nous venons de le voir, n'est pas possible. Les coefficients de l'équation du plan MNT dépendent évidemment des dérivées premières et secondes de la fonction $f(x, y, z)$ et, en écrivant la condition d'intégrabilité, il est clair qu'on sera conduit à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, linéaire par rapport aux dérivées du troisième ordre.

En prenant de même le plan MNT' , il semble qu'on obtiendra une nouvelle équation du troisième ordre. En réalité, ces deux

⁽¹⁾ Pour plus de détails sur ce sujet, voir Sophus Lie, *Théorie der Transformationsgruppen*, p. 95 et suivantes.

⁽²⁾ Darboux, *Sur les surfaces orthogonales* (*Annales de l'École normale supérieure*, 1^{re} série, t. III).

équations se réduiront à une seule; cela résulte de la proposition suivante :

Lorsqu'on a deux familles de surfaces se coupant mutuellement à angle droit, et suivant des lignes de courbure communes, il existe nécessairement une troisième famille de surfaces qui forme avec les deux premières un système triple orthogonal ⁽¹⁾.

EXEMPLES. — Intégrer les équations aux différentielles totales :

$$1^{\circ} \quad x_1 (x_2 - 1) (x_3 - 1) dx_1 + x_2 (x_3 - 1) (x_1 - 1) dx_2 + x_3 (x_1 - 1) (x_2 - 1) dx_3 = 0,$$

$$2^{\circ} \quad dx_1 + \frac{x_1}{x_2} dx_2 - \frac{x_1}{2x_3} dx_3 = 0,$$

$$3^{\circ} \quad dx_1 + \frac{x_1}{2x_2} dx_2 - \frac{x_1 x_2}{x_1 x_3} dx_3 - \frac{x_1^2}{2x_1 x_3} dx_3 = 0,$$

$$4^{\circ} \quad dx_1 + \frac{x_1}{x_2 \log x_1 x_2} dx_2 + \frac{x_1}{x_3 \log x_1 x_3} dx_3 + \frac{x_1}{x_2} \operatorname{ctg} \frac{x_1}{x_2} dx_2 - \frac{x_1 x_2}{x_1^2} \operatorname{ctg} \frac{x_1}{x_2} dx_3 = 0.$$

(COLLET.)

5^o Étant donné le système complètement intégrable

$$\begin{cases} dz = p dx + q dy, \\ dp = (a_1 p + a_2 q + a_3 z) dx + (b_1 p + b_2 q + b_3 z) dy, \\ dq = (b_1 p + b_2 q + b_3 z) dx + (c_1 p + c_2 q + c_3 z) dy, \end{cases}$$

où a_i, b_i, c_i sont des fonctions des seules variables indépendantes x et y ; si on connaît trois solutions linéairement distinctes z_1, p_1, q_1 ; z_2, p_2, q_2 ; z_3, p_3, q_3 , l'intégrale générale est de la forme

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3, \quad p = C_1 p_1 + C_2 p_2 + C_3 p_3, \\ q = C_1 q_1 + C_2 q_2 + C_3 q_3$$

C_1, C_2, C_3 étant trois constantes arbitraires.

(APPELL.)

(1) DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 292.

CHAPITRE IV

Équations de forme quelconque. Généralités. Méthode de Lagrange et Charpit.

39. Considérons une famille de surfaces, dépendant de deux paramètres a et b , définie par l'équation

$$(1) \quad V(x, y, z, a, b) = 0.$$

De l'équation (1) on tire, en supposant a et b constants,

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} = 0, & \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

et l'élimination de a et de b entre les équations (1) et (2) conduit en général à une seule relation

$$(3) \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui constitue une équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle satisfont toutes les surfaces représentées par l'équation (1).

Lagrange a montré que la connaissance de la fonction V suffit pour trouver toutes les intégrales de l'équation (3). En effet, puisque la relation (3) est le résultat de l'élimination de a et b entre les équations (1) et (2), intégrer cette équation revient à chercher trois fonctions z , a et b de x et y satisfaisant aux équations (1) et (2). Or, si on différentie l'équation (1) en tenant compte des relations (2), on aura

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

et le système des équations (1) et (4) sera équivalent au système des équations (1) et (2). Nous sommes donc ramenés finalement à trouver trois fonctions z , a et b vérifiant les trois équations (1) et (4). On peut satisfaire aux équations (4) de plusieurs manières :

1° En laissant a et b constants; z sera alors donnée par l'équation (1) et nous trouvons la famille des surfaces dont nous sommes partis. Cette intégrale a reçu de Lagrange le nom d'*intégrale complète*.

2° En prenant des valeurs de z , a , b satisfaisant à l'équation (1) et, en outre, aux relations

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0.$$

En éliminant a et b entre ces trois équations, on obtient une intégrale qui ne contient rien d'arbitraire et qui a été appelée par Lagrange *intégrale singulière*.

3° Si $\frac{\partial V}{\partial a}$ et $\frac{\partial V}{\partial b}$ ne sont pas nuls tous les deux, on aura

$$\frac{D(a, b)}{D(x, y)} = 0.$$

Il existe alors une relation entre a et b . Supposons qu'elle contienne b ,

$$b = \varphi(a);$$

on aura une intégrale en éliminant a et b entre les trois équations

$$(5) \quad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} \varphi'(a) = 0, \quad b = \varphi(a),$$

où φ désigne une fonction arbitraire; on obtiendra ainsi une intégrale, dépendant d'une fonction arbitraire, que Lagrange appelle *intégrale générale*.

D'après cela, il semblerait donc qu'il y a trois catégories distinctes d'intégrales : les intégrales complètes, les intégrales générales et l'intégrale singulière. Il n'en est rien, car il est facile de montrer qu'il n'y a pas de différence essentielle entre l'intégrale complète et l'intégrale générale. En effet, d'abord il est clair qu'il y a une infinité d'intégrales complètes qui peuvent se déduire de l'intégrale générale.

Prenons l'intégrale générale obtenue en posant

$$b = \varphi(a, a', b'),$$

φ étant une fonction donnée dépendant de deux paramètres arbitraires a' et b' ; cette intégrale sera donnée par une relation de la forme

$$V_1(x, y, z, a', b') = C$$

et dépendra, en général, de deux paramètres; ce sera donc une intégrale complète. L'ancienne intégrale complète qui correspond aux valeurs a_0, b_0 sera maintenant l'intégrale générale qu'on obtiendrait en partant de la relation

$$b_0 = \varphi(a_0, a', b').$$

Géométriquement, le procédé de Lagrange peut s'énoncer ainsi : Parmi les intégrales complètes, on prend une suite simplement infinie de surfaces en établissant une relation arbitraire entre a et b . L'enveloppe de ces surfaces constitue une intégrale générale. Au contraire, la solution singulière s'obtient en prenant l'enveloppe de toutes les intégrales complètes quand a et b varient de toutes les manières possibles. Il est clair que cette intégrale singulière sera l'enveloppe de toutes les autres intégrales, tant générales que complètes; elle sera donc la même, quelle que soit l'intégrale complète d'où l'on est parti.

Considérons, comme exemple, l'équation de Clairaut généralisée

$$(A) \quad z = px + qy + f(p, q),$$

qui admet l'intégrale complète

$$(B) \quad z = ax + by + f(a, b),$$

formée d'une famille de plans dépendant de deux paramètres. Ces plans enveloppent une certaine surface Σ , non développable. Les intégrales générales seront des surfaces développables circonscrites à Σ . L'intégrale singulière est la surface Σ elle-même. Il est alors aisé de vérifier que par toute courbe (C) de l'espace passe une surface intégrale, car l'enveloppe des plans, passant par les tangentes de (C) et tangents à la surface Σ , est une surface développable, passant par (C), et circonscrite à Σ . On peut vérifier aussi sur cette équation

qu'il y a une infinité de manières d'obtenir une intégrale complète : par exemple, les cylindres circonscrits à Σ ou les cônes circonscrits à Σ et dont le sommet est assujéti à rester sur une surface donnée sont des intégrales de l'équation (A) dépendant de deux paramètres, c'est-à-dire des intégrales complètes. Nous avons ainsi le moyen d'intégrer toutes les équations de la forme

$$F(p, q, z - px - qy) = 0,$$

qui expriment une propriété du plan tangent. Comme cas particulier, il pourrait arriver que la surface Σ se réduise à une courbe Γ ; l'intégrale singulière disparaît, ou plutôt se réduit à la courbe Γ . Enfin, si la courbe Γ est rejetée à l'infini, l'équation prend la forme

$$F(p, q) = 0;$$

elle admet pour intégrale complète tous les plans parallèles aux plans tangents d'un certain cône, et l'intégrale générale est formée de développables dont les génératrices sont parallèles à celles de ce cône.

40. En résumé, l'intégration de l'équation (3) est ramenée à la détermination d'une intégrale complète; les théorèmes généraux de Cauchy nous apprennent d'ailleurs *a priori* qu'il existe une infinité d'intégrales de cette espèce.

Lagrange (*) a donné le moyen de ramener une équation non linéaire à trois variables à une équation linéaire; la méthode a été ensuite perfectionnée par Charpit (**). Le procédé de Lagrange repose sur la remarque suivante : étant donnée une équation

$$q = f(x, y, z, p),$$

si, par un moyen quelconque, on est parvenu à trouver une valeur de p dépendant d'une constante arbitraire α , telle que l'équation

$$dz = p dx + f(x, y, z, p) dy$$

soit complètement intégrable, l'intégration introduira une nouvelle

(*) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1772; *Œuvres complètes*, t. III.

(**) Le mémoire de Charpit, présenté en 1784 à l'Académie des Sciences, n'a pas été publié. Voir Lacroix, *Calcul différentiel et intégral*, t. II, 2^e édition, p. 548; Jacobi, *Journal de Crelle*, t. XXIII; *Commentarii Mathematici*, t. IV, p. 181.

90 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

constante b et on aura une intégrale complète. Cette remarque bien simple permet déjà d'intégrer des équations assez compliquées.

1° Soit une équation de la forme

$$f(y, p, q) = 0, \quad \text{ou} \quad q = \varphi(p, y);$$

si on prend $p = a$, a étant une constante arbitraire, l'équation

$$dz = a dx + \varphi(a, y) dy$$

donnera une intégrale complète

$$z = ax + \int \varphi(a, y) dy + b.$$

Les équations de la forme

$$f(z, p, q) = 0$$

se ramènent facilement à ce cas.

2° Considérons l'équation

$$f(x, p) = f_1(y, q);$$

posons

$$f(x, p) = f_1(y, q) = a,$$

a désignant une constante arbitraire. On en tire

$$p = \varphi(x, a), \quad q = \varphi_1(y, a);$$

l'équation aux différentielles totales

$$dz = \varphi(x, a) dx + \varphi_1(y, a) dy$$

donne une intégrale complète

$$z = \int \varphi(x, a) dx + \int \varphi_1(y, a) dy + b.$$

42. D'une façon générale, pour trouver une intégrale complète d'une équation quelconque du premier ordre

$$(6) \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

proposons-nous de lui adjoindre une équation

$$(7) \quad \Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

telle que si on tire p, q des équations (6) et (7),

$$p = \varphi(x, y, z), \quad q = \psi(x, y, z),$$

l'équation

$$dz = p dx + q dy$$

soit complètement intégrable.

Il faudra pour cela que l'on ait

$$(8) \quad \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p.$$

D'ailleurs, en différentiant les équations (6) et (7), il vient

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

en y considérant x, y, z comme des variables indépendantes et p, q comme des fonctions de ces variables. On déduit de là

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(x, p)} + \frac{D(F, \Phi)}{D(q, p)} \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

et on trouve de même

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(z, p)} + \frac{D(F, \Phi)}{D(q, p)} \frac{\partial q}{\partial z} = 0, \quad \frac{D(F, \Phi)}{D(z, q)} + \frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{D(F, \Phi)}{D(y, q)} + \frac{D(F, \Phi)}{D(p, q)} \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Prenons, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q,$$

et remplaçons dans l'équation (8) $\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial z}$ par leurs valeurs :

on trouve que Φ doit vérifier la relation

$$(9) \quad P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (Pp + Qq) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - (X + pZ) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + qZ) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0.$$

Pour que la condition d'intégrabilité (8) soit satisfaite, il suffit que cette équation soit vérifiée en tenant compte des relations (6) et (7).

Il en sera de même « fortiori » si l'équation (9) est vérifiée identiquement. On connaît déjà une intégrale de cette équation, $F(x, y, z, p, q)$; supposons qu'on ait trouvé une autre intégrale Φ ; les deux équations

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \Phi - a = 0,$$

où a désigne une constante arbitraire, déterminent des fonctions p et q de x, y, z telles que l'équation

$$(10) \quad dz = p dx + q dy$$

soit complètement intégrable, pourvu que F et Φ soient des fonctions distinctes de p et de q . En intégrant l'équation (10), on introduira une nouvelle constante arbitraire b , et la fonction z de x et y ainsi définie sera une intégrale complète de l'équation (6). Trouver une intégrale de l'équation (9), cela revient à trouver une intégrale du système

$$(11) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ},$$

dont nous connaissons déjà une première intégrale

$$F(x, y, z, p, q) = C^0,$$

et qui, par suite, se ramène à un système de trois équations différentielles du premier ordre. Cette intégrale une fois trouvée, il ne reste plus qu'à intégrer une équation du premier ordre pour achever le problème.

EXEMPLE. — Soit l'équation

$$pq - z = 0,$$

le système (11) est alors

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}.$$

On a l'intégrale première

$$p = y - a;$$

on en tire l'équation aux différentielles totales

$$dz = (y - a) dx + \frac{z dy}{y - a},$$

d'où

$$dx = \frac{dz}{y-a} - \frac{z dy}{(y-a)^2} = d\left[\frac{z}{y-a}\right].$$

Donc

$$z = (x-b)(y-a)$$

est une intégrale complète.

Toutes les fois que l'équation (6) est de la forme

$$F(z, p, q) = 0,$$

les deux dernières équations (11) donnent immédiatement une intégrale de ce système, $p = aq$. L'équation

$$F(z, aq, q) = 0$$

donne alors

$$q = q(a, z), \quad p = a q(a, z);$$

on est conduit à l'équation

$$dz = q(a, z) [a dx + y],$$

et z s'obtient par une quadrature

$$\int \frac{dz}{q(a, z)} = ax + y + b.$$

REMARQUE. — Si l'équation (6) ne contient pas z , c'est-à-dire si elle est de la forme

$$F(x, y, p, q) = 0,$$

on cherchera une fonction Φ , également indépendante de z , qui sera déterminée par l'équation

$$P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} - X \frac{\partial \Phi}{\partial p} - Y \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0.$$

On a, alors, à intégrer le système

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{-dp}{X} = \frac{-dq}{Y},$$

dont on connaît une intégrale

$$F = C^0,$$

94. LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

et qui, par suite, se ramène à un système de deux équations différentielles du premier ordre. Une fois qu'on aura trouvé une intégrale de ce système, on aura z par une quadrature ⁽¹⁾.

42. Considérons, maintenant, d'une manière plus générale, une équation définissant z en fonction de n variables x_1, x_2, \dots, x_n et de n paramètres a_1, a_2, \dots, a_n

$$(12) \quad V(z, x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

Si on attribue à ces paramètres des valeurs constantes, on déduit de l'équation (12)

$$(13) \quad \frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où on pose $\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i$. L'élimination de a_1, a_2, \dots, a_n entre les $(n + 1)$ équations (12) et (13) conduit, en général, à une seule relation

$$(14) \quad F(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0.$$

Lagrange désigne encore sous le nom d'intégrale complète de l'équation (14) l'intégrale définie par l'équation (12). Nous allons montrer que, comme dans le cas de deux variables indépendantes, la connaissance d'une intégrale complète permet de trouver toutes les autres intégrales.

Puisque l'équation (14) est le résultat de l'élimination de a_1, a_2, \dots, a_n entre les équations (12) et (13), intégrer l'équation (14) revient à trouver toutes les fonctions z, a_1, a_2, \dots, a_n des variables x_1, x_2, \dots, x_n qui satisfont aux équations (12) et (13). Ces fonctions satisferont évidemment à l'équation obtenue en différentiant l'équation (12); et, en tenant compte des relations (13), on en conclut qu'elles satisfont à l'équation

$$(15) \quad \frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0.$$

Il est bien clair, d'ailleurs, que le système des équations (12) et (13)

(1) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 171.

est équivalent au système des équations (12) et (15); on est donc ramené à trouver des fonctions $x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ satisfaisant aux équations (12) et (15). On peut satisfaire à ces équations de plusieurs manières :

1° En prenant $\alpha_1 = C^1, \alpha_2 = C^2, \dots, \alpha_n = C^n$. On retrouve l'intégrale complète d'où l'on est parti.

2° En choisissant $s, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de façon que l'on ait simultanément

$$v = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0;$$

en éliminant $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ entre ces $n + 1$ équations, on trouve une intégrale z qui ne contient rien d'arbitraire et qui a été appelée par Lagrange *intégrale singulière*.

3° Si l'une des quantités $\frac{\partial V}{\partial a_i}$ est différente de 0, l'équation (15) exprime qu'il existe au moins une relation entre les n quantités a_1, a_2, \dots, a_n . Supposons, pour prendre le cas général, qu'il y ait k équations distinctes ($k \geq 1$) entre les quantités a_1, a_2, \dots, a_n et *k* seulement :

$$(16) \quad f_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad \dots, \quad f_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

Les différentielles da_1, da_2, \dots, da_n satisferont alors aux relations

$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \quad \dots, \quad df_k = 0,$$

et à celles-là seulement; donc, la relation (15) doit être une conséquence de celles-ci et on doit pouvoir trouver k facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ tels que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = \lambda_1 df_1 + \dots + \lambda_k df_k$$

c'est-à-dire

[illegible]

Les équations (12), (16) et (17) sont au nombre de $n + k + 1$; il y aura donc, en général, un système de fonctions $z, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ satisfaisant à ces équations. En éliminant $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ entre ces équations, on aura donc une relation qui donnera une intégrale z dépendant de k fonctions arbitraires. C'est l'intégrale générale de Lagrange.

EXEMPLES. — 1° Considérons la fonction

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + f(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Cette fonction satisfait à l'équation du premier ordre

$$z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n + f(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

qui est l'équation de Clairaut généralisée, et elle en est une intégrale complète. On pourra donc en déduire toutes les autres intégrales de la même équation

2° Toute équation de la forme

$$F(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

admet pour intégrale complète

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + b x_n + a_n$$

où b désigne une constante liée aux constantes arbitraires a_1, a_2, \dots, a_{n-1} par la relation

$$F(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b) = 0.$$

REMARQUE. — D'après ce qui précède, nous voyons que, si $k = 1$, on a une intégrale générale dépendant d'une fonction arbitraire de $(n - 1)$ variables; pour $k = 2$, l'intégrale dépend de deux fonctions arbitraires de $(n - 2)$ variables, etc... Il semble donc, au premier abord, qu'on ait ainsi $(n - 1)$ catégories distinctes d'intégrales générales. Nous montrerons plus loin qu'en réalité il n'y a aucune différence essentielle entre ces diverses intégrales. Nous ferons voir aussi plus tard que l'intégrale que Lagrange a nommée singulière satisfait aux équations que nous avons prises plus haut pour définition des intégrales singulières (§ 14).

43. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que l'élimination de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ entre les équations (12) et (13) ne conduisait qu'à

une seule relation entre $z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$. Les raisonnements qui précèdent ne sont valables que si cette condition est satisfaite. Il est donc utile, étant donnée une intégrale qui dépend de n paramètres, de savoir reconnaître si c'est une véritable intégrale complète. Soit

$$(12') \quad z = \Phi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n)$$

une intégrale contenant n paramètres; les relations (13) prendront alors la forme

$$(13') \quad p_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}.$$

1° Supposons que le déterminant fonctionnel

$$I = \frac{D\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right)}{D(a_1, a_2, \dots, a_n)}$$

soit différent de 0; on pourra résoudre les équations (13') par rapport à a_1, a_2, \dots, a_n et en portant ces valeurs dans l'équation (12') on aura une équation et une seule qui contiendra explicitement z .

2° Supposons $I = 0$; tous les mineurs du premier ordre de I ne pourront pas être nuls à la fois, car sans cela on pourrait déduire des relations (13') deux relations au moins entre $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$. Supposons, par exemple, que le mineur

$$\frac{D\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}}\right)}{D(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})}$$

soit différent de 0; on pourra résoudre les équations

$$p_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad p_{n-1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}},$$

par rapport à a_1, a_2, \dots, a_{n-1} et, en portant ces valeurs dans

$$p_n = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n},$$

a_n disparaîtra. On aura ainsi une relation

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

qui ne contiendra pas z . D'ailleurs, il faudra qu'en portant les valeurs de a_1, a_2, \dots, a_{n-1} dans l'équation (13') a_n ne disparaisse pas, car sans cela on aurait une nouvelle relation entre $z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$. Il faut alors que le déterminant

$$\frac{D \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}}, \Phi \right)}{D(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)}$$

soit différent de 0.

Exemple. — Considérons la fonction

$$z = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} + x_3 - a_3.$$

Les équations (13') sont alors

$$p_1 = \frac{x_1 - a_1}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}}, \quad p_2 = \frac{x_2 - a_2}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}}, \quad p_3 = 1.$$

Il est aisé de vérifier que, dans ce cas, tous les mineurs du premier ordre de I sont nuls. D'ailleurs, on voit immédiatement que z satisfait aux deux équations du premier ordre

$$p_1^2 + p_2^2 = 1, \quad p_3 = 1.$$

44. Considérons en particulier les équations de la forme

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

qui ne contiennent pas z . Si on connaît une intégrale dépendant de $(n - 1)$ constantes arbitraires, on aura encore une intégrale en ajoutant à celle-ci une constante arbitraire quelconque. On aura alors une intégrale de la forme

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) + a_n.$$

Pour que ce soit une intégrale complète, on voit de suite, d'après ce qui précède, qu'il faut et qu'il suffit que l'un des déterminants fonctionnels de $(n - 1)$ des quantités $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$, par rapport à a_1, a_2, \dots

..., a_{n-1} , soit différent de 0, par exemple que l'on ait

$$\frac{D \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}} \right)}{D(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})} \leq 0.$$

Ceci nous permet de compléter ce que nous avons dit (§ 16) sur l'artifice employé pour faire disparaître la fonction inconnue dans une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Étant donnée une équation du premier ordre

$$(18) \quad F(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

à n variables, contenant la fonction inconnue z , nous avons vu (§ 16) que la recherche d'une intégrale donnée par l'équation

$$V(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

se ramène à l'intégration de l'équation

$$(19) \quad F \left(z, x_1, x_2, \dots, x_n, -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}}{\frac{\partial V}{\partial z}}, \dots, -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial z}} \right) = 0$$

à $(n+1)$ variables, qui ne contient plus la fonction inconnue V , et que ce procédé pouvait laisser échapper les intégrales singulières. Nous allons montrer que, si on connaît une intégrale complète de l'équation (19), on en déduira une intégrale complète de l'équation (18). En effet, soit

$$V(z, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n) + a_{n+1}$$

une intégrale complète de (19), et supposons, d'après ce qui précède, que l'on ait

$$\frac{D \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)}{D(a_1, a_2, \dots, a_n)} \geq 0,$$

je dis que $V = 0$ donnera une intégrale complète de l'équation (18). C'est bien, en effet, une intégrale de (18) dépendant de n paramètres arbitraires; de plus, le déterminant fonctionnel des premiers membres

des équations (13) correspondantes, par rapport à a_1, a_2, \dots, a_n , n'est pas identiquement nul, car si on y fait $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$, ce déterminant se réduit au précédent qui est différent de 0.

45. Tout ce qui précède nous montre donc que l'intégration de l'équation (14) est ramenée à la recherche d'une intégrale complète de cette équation. Supposons l'équation (14) résolue par rapport à p_n

$$(20) \quad p_n = f(s, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, \dots, p_{n-1});$$

pour avoir une intégrale complète, il suffira de pouvoir trouver des fonctions p_1, p_2, \dots, p_{n-1} de s, x_1, x_2, \dots, x_n et de $(n-1)$ paramètres a_1, a_2, \dots, a_{n-1} telles que l'équation

$$(21) \quad ds = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_{n-1} dx_{n-1} + f dx_n$$

soit complètement intégrable. L'intégration de cette équation introduira une nouvelle constante arbitraire a_n et on aura ainsi une intégrale complète.

Il y a des cas simples où l'on voit immédiatement une solution. Considérons, par exemple, une équation de la forme

$$f_1(p_1, x_1) f_2(p_2, x_2) \dots f_n(p_n, x_n) = 1;$$

posons

$$f_1(p_1, x_1) = a_1, \quad \dots, \quad f_{n-1}(p_{n-1}, x_{n-1}) = a_{n-1},$$

et, par suite,

$$f_n(p_n, x_n) = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}.$$

En résolvant par rapport à p_1, p_2, \dots, p_n , on en tire

$$p_1 = q_1(x_1, a_1), \quad \dots, \quad p_n = q_n(x_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}),$$

la fonction

$$s = \int q_1(x_1, a_1) dx_1 + \dots + \int q_{n-1}(x_{n-1}, a_{n-1}) dx_{n-1} \\ + \int q_n(x_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) dx_n + a_n$$

sera une intégrale complète. C'est ainsi qu'on trouve pour l'équation

$$p_1 p_2 \dots p_n = x_1 x_2 \dots x_n$$

l'intégrale complète

$$2z = a_1 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}^2 + \frac{x_n^2}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + a_n.$$

D'une manière générale, pour étendre la méthode de Lagrange et Charpit aux équations à plus de trois variables, il conviendra de poser le problème comme il suit : étant donnée l'équation $F = 0$, trouver $n - 1$ autres relations entre $z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ contenant chacune une constante arbitraire, telles que les valeurs de p_1, \dots, p_n déduites de ces n relations rendent l'équation

$$dz = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$$

complètement intégrable. En réalité, cette extension n'a été faite que longtemps après Lagrange; elle constitue la seconde méthode de Jacobi, qui sera exposée dans un des chapitres suivants.

Exercices.

1° Trouver une intégrale complète des équations

$$F(z - px, y, p, q) = 0, \quad p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 2xy = 0,$$

$$p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0,$$

$$2(pq + py + qx) + x^2 + y^2 = 0, \quad xp^2 + yq^2 = 2pq,$$

$$z^2(p^2 + q^2) = x^2 + y^2, \quad q = xp + p^2, \quad p = (qy + z)^2, \\ p^2 - y^2q = x^2 - y^2.$$

2° Trouver les surfaces dont les normales appartiennent au complexe de droites formé par les normales à une famille de surfaces homofocales du second degré.

3° Trouver les surfaces telles que la trace de la normale sur un plan fixe P soit à une distance constante l de la trace du plan tangent sur le même plan P .

CHAPITRE V

Méthode de Cauchy. Caractéristiques.

46. La première méthode générale d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre est due à Pfaff⁽¹⁾. Considérant la question comme un cas particulier d'un problème plus général, il ramène la solution de ce nouveau problème à l'intégration complète de plusieurs systèmes d'équations différentielles simultanées, d'ordre $2n - 1, 2n - 3, \dots, 3, 1$. Peu de temps après, en 1819⁽²⁾, Cauchy a donné une méthode beaucoup plus simple en montrant que, pour le problème spécial de l'intégration des équations aux dérivées partielles, il suffisait d'intégrer le premier système que l'on rencontre dans le procédé de Pfaff. Nous allons exposer cette méthode de Cauchy.

47. Considérons d'abord l'équation à trois variables

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

et proposons-nous de trouver l'intégrale de cette équation qui, pour $x = x_0$, se réduit à une fonction donnée de y

$$z = \varphi(y).$$

Remarquons, de suite, que si nous remplaçons x et y par deux nouvelles variables indépendantes α et β , intégrer l'équation (1)

(1) *Abhandlungen der Berliner Akademie*, 1814-1815.

(2) *Bulletin de la Société Philomathique*, p. 10-21. Le Mémoire primitif de 1819 a été reproduit et complété dans le tome II des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématiques*, p. 226-272: 1841.

revient à trouver cinq fonctions x, y, z, p, q de x et de y vérifiant l'équation (1) et la relation

$$(2) \quad dz = p dx + q dy.$$

Cauchy, suivant une idée d'Ampère, conserve la variable x et remplace y par une nouvelle variable u qui sera déterminée plus loin. L'équation (2) s'écrit alors

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial u} du = p dx + q \left(\frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial u} du \right).$$

On doit donc avoir

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = p + q \frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial u} = q \frac{\partial y}{\partial u}. \end{cases}$$

D'ailleurs, puisque les fonctions y, z, p, q de x et u satisfont à l'équation (1), elles satisfont aussi aux deux équations qu'on en déduit en la dérivant par rapport à x et par rapport à u :

$$(4) \quad \begin{cases} X + Y \frac{\partial y}{\partial x} + Z \frac{\partial z}{\partial x} + P \frac{\partial p}{\partial x} + Q \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u} + P \frac{\partial p}{\partial u} + Q \frac{\partial q}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Il s'agit donc de trouver quatre fonctions y, z, p, q des variables x et u satisfaisant aux équations (3) et (4). L'artifice de Cauchy consiste à choisir la variable u de façon à obtenir un système de quatre équations où ne figurent que des dérivées partielles par rapport à la variable x . Nous avons déjà deux équations dans les systèmes (3) et (4), satisfaisant à cette condition; pour en avoir d'autres, nous nous servirons de la relation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial x}.$$

Des équations (3) on tire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u} = \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial x} + q \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u}$$

et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial u} + q \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial x},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Portons les valeurs de $\frac{\partial p}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial u}$ dans la seconde des relations (4);

il vient, en ordonnant par rapport à $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial q}{\partial u}$,

$$\frac{\partial y}{\partial u} \left[Y + qZ + P \frac{\partial q}{\partial x} \right] + \frac{\partial q}{\partial u} \left[Q - P \frac{\partial y}{\partial x} \right] = 0.$$

Choisissons alors la variable u , de façon que l'on ait

$$Q - P \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

ce qui est toujours possible; en effet, sur une surface intégrale déterminée, P et Q sont des fonctions déterminées de x et y ; si on considère cette équation comme une équation différentielle entre y et x et si

$$\phi(x, y) = C^{\text{te}}$$

en est l'intégrale générale, il suffira de définir la nouvelle variable u en posant

$$\phi(x, y) = \Pi(u),$$

Π étant une fonction quelconque. La variable u étant choisie ainsi, comme $\frac{\partial y}{\partial u}$ ne peut être identiquement nul, il faut nécessairement que l'on ait aussi

$$Y + qZ + P \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

En ajoutant ces deux nouvelles équations aux deux premières des équations (3) et (4), on voit que les fonctions y, z, p, q de x et de u

satisfont au système d'équations.

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \frac{\partial y}{\partial x} = Q, \\ P \frac{\partial z}{\partial x} = Pp + Qq, \\ P \frac{\partial q}{\partial x} = -Y - qZ, \\ P \frac{\partial p}{\partial x} = -X - pZ. \end{array} \right.$$

La variable x ne figurant pas dans ces équations, les intégrales y, z, p, q ne peuvent dépendre de x que par l'intermédiaire des valeurs initiales y_0, z_0, p_0, q_0 correspondant à la valeur x_0 de x . Les équations (5) peuvent s'écrire

$$(5') \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ},$$

nous retrouvons précisément le système auquel on est conduit dans la méthode de Lagrange et Charpit. Ces équations (5'), comme nous l'avons déjà remarqué, admettent l'intégrale évidente

$$F(x, y, z, p, q) = F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0).$$

Si donc les valeurs initiales satisfont à la relation

$$(6) \quad F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

les fonctions y, z, p, q vérifieront l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Soit alors

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = f_1(x, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ z = f_2(x, \dots, q_0), \\ p = f_3(x, \dots, q_0), \\ q = f_4(x, \dots, q_0). \end{array} \right.$$

les formules qui représentent les intégrales du système (5), correspondant aux valeurs initiales y_0, z_0, p_0, q_0 , vérifiant l'équation (6). Toute intégrale de l'équation (1) s'obtiendra en remplaçant, dans ces expressions, y_0, z_0, q_0, p_0 par des fonctions convenables de x , choisies de

telle façon que les équations (3) soient satisfaites. Or, la première des équations (3) est vérifiée, car c'est une des équations du système (3); par conséquent, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial z}{\partial u} = q \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Cauchy satisfait à cette équation en prenant

$$y_0 = u, \quad z_0 = q(u), \quad q_0 = q'(u),$$

p_0 étant déterminé par la condition (6). Pour démontrer que la relation précédente est bien vérifiée de cette façon, posons

$$U = \frac{\partial z}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u},$$

on aura

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial u} - q \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u};$$

d'ailleurs, puisque

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u} = \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial x} + q \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u}.$$

Portons dans $\frac{\partial U}{\partial x}$ cette valeur de $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u}$, il vient

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Remplaçons encore, dans cette expression, $\frac{\partial y}{\partial x}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$ par leurs expressions tirées de (5) et nous aurons

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{P} \left[P \frac{\partial p}{\partial u} + Q \frac{\partial q}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + qZ \frac{\partial y}{\partial u} \right].$$

Enfin, puisque les fonctions y, z, p, q satisfont à l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

on a, en différentiant par rapport à u ,

$$P \frac{\partial p}{\partial u} + Q \frac{\partial q}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} = -Z \frac{\partial z}{\partial u},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Z}{P} \left\{ \frac{\partial z}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u} \right\} = -\frac{Z}{P} U,$$

d'où, en intégrant,

$$U = U_0 e^{-\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx},$$

U_0 désignant la valeur de U pour $x = x_0$. Or, pour $x = x_0$, on a

$$U_0 = \frac{\partial z_0}{\partial u} - q_0 \frac{\partial y_0}{\partial u} = \varphi'(u) - \varphi'(u) = 0.$$

On a donc, pour toute valeur de x ,

$$U = 0.$$

REMARQUE. — M. Bertrand a fait remarquer que le raisonnement précédent n'est exact que si le facteur $e^{-\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx}$ n'est pas infiniment grand. Or, pour qu'il en soit ainsi, il faudrait que $\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx$ fût lui-même infiniment grand, ce qui ne peut arriver, au moins si on suppose x suffisamment voisin de x_0 , que si $\frac{Z}{P}$ est infini pour les valeurs initiales, c'est-à-dire si $P_0 = 0$. D'ailleurs, en vertu des équations (5'), on a $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$; on peut donc remplacer l'intégrale $\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx$ par l'intégrale $\int_{y_0}^y \frac{Z}{Q} dy$ qui restera finie si Q_0 est différent de 0, et, si Q_0 était nul, on prendrait un des deux autres rapports

$$\frac{-dp}{X + pZ}, \quad \frac{-dq}{Y + qZ};$$

on voit donc que le raisonnement précédent ne pourra tomber

réellement en défaut que si les valeurs initiales vérifient les quatre équations

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0.$$

S'il en est ainsi, le facteur considéré pourra réellement être infini. Mais si on laisse à la constante x_0 et à la fonction $\varphi(y)$ toute leur généralité, on voit que les seules intégrales auxquelles ne s'applique pas la méthode précédente sont celles dont tous les éléments vérifient les quatre équations écrites plus haut, c'est-à-dire les intégrales singulières.

EXEMPLE. — Prenons l'équation traitée par Cauchy

$$pq - xy = 0;$$

le système d'équations différentielles correspondant est

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{y} = \frac{dq}{x}.$$

En réduisant au même dénominateur $pq = xy$ et supprimant ce dénominateur, il vient

$$p dx = q dy = \frac{dz}{2} = x dp = y dq.$$

On tire successivement de ces équations

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dq}{q} = \frac{dy}{y}, \quad dz = \frac{p}{x} 2x dx = \frac{q}{y} 2y dy;$$

puis, en intégrant,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{x}{x_0}, \quad \frac{q}{q_0} = \frac{y}{y_0}, \quad z - z_0 = \frac{p_0}{x_0} (x^2 - x_0^2) = \frac{q_0}{y_0} (y^2 - y_0^2).$$

Pour avoir l'intégrale qui, pour $x = x_0$, se réduit à $\varphi(y)$, nous prendrons $y_0 = u$, $z_0 = \varphi(u)$, $q_0 = \varphi'(u)$, et, par suite, $p_0 = \frac{x_0 u}{\varphi'(u)}$

L'intégrale demandée sera représentée par les équations

$$z - \varphi(u) = \frac{u}{\varphi'(u)} (x^2 - x_0^2) = \frac{\varphi'(u)}{u} (y^2 - u^2),$$

qui peuvent encore s'écrire

$$\begin{aligned} [z - \varphi(u)]^2 &= (x^2 - x_0^2)(y^2 - u^2), \\ [z - \varphi(u)] \varphi'(u) &= u(x^2 - x_0^2); \end{aligned}$$

on remarquera que, si on regarde u comme un paramètre variable, la seconde équation est la dérivée de la première par rapport à ce paramètre.

48. En énonçant les résultats obtenus en langage géométrique, nous pouvons dire que nous avons déterminé une surface intégrale passant par une courbe plane donnée, située dans un plan parallèle au plan des yz . Nous avons vu qu'on pouvait se proposer, d'une façon plus générale, de déterminer une surface intégrale passant par une courbe gauche quelconque. Il est vrai que, par un changement de variables, cette question se ramène à la précédente; mais il suffit de modifier très peu le raisonnement de Cauchy pour traiter directement ce nouveau problème. En effet, il suit de ce qui précède qu'étant donnée une surface intégrale S , on peut toujours choisir une variable indépendante u , de telle façon que y, z, p, q , considérées comme fonctions de x et de u , vérifient les équations (5). Ces fonctions y, z, p, q ne pourront dépendre de u que par l'intermédiaire des valeurs initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 . Cauchy supposait que x_0 était pris constant, mais cette restriction n'est évidemment pas nécessaire.

On voit d'abord, comme plus haut, que les valeurs initiales doivent vérifier la relation

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

ce que nous supposons toujours. Soit alors

$$(8) \quad \begin{cases} f_1(x, y, z, p, q, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0, \\ f_2(x, \dots, x_0, \dots, q_0) = 0, \\ f_3(x, \dots, x_0, \dots, q_0) = 0, \\ f_4(x, \dots, x_0, \dots, q_0) = 0, \end{cases}$$

les formules qui donnent les intégrales du système (5), correspondant à ces valeurs initiales. Toute intégrale de l'équation (1) sera donnée

140 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

par le système (8), pourvu que x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 soient des fonctions convenablement choisies de u .

Pour plus de symétrie dans les calculs, posons, avec M. Darboux,

$$\frac{dx}{p} = \dots = \frac{-dq}{Y + qZ} = dt,$$

t désignant une variable auxiliaire dont nous supposons la valeur initiale égale à 0, ce qu'on peut toujours faire. En intégrant ces équations, on trouvera un système de la forme

$$(9) \quad \begin{cases} x = \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ y = \varphi_2(t, x_0, \dots, q_0), \\ z = \varphi_3(t, x_0, \dots, q_0), \\ p = \varphi_4(t, x_0, \dots, q_0), \\ q = \varphi_5(t, x_0, \dots, q_0), \end{cases}$$

qui sera équivalent au système (8). Ces cinq fonctions vérifient la relation

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

puisque $F = C^0$ est une intégrale du système considéré; on a aussi

$$\frac{\partial z}{\partial t} = p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Pour que les équations (9) donnent une intégrale à l'équation (1), il suffira donc que ces fonctions vérifient la relation

$$U = \frac{\partial z}{\partial u} - p \frac{\partial x}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u} = 0.$$

Or, on a

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} - p \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial t} - q \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Mais on a aussi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} = p \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial t} + q \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial t} + \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial t},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Remplaçons $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ et $\frac{\partial q}{\partial t}$ respectivement par P , $-(X + pZ)$, Q et $-(Y + qZ)$; il vient

$$\frac{\partial U}{\partial t} = P \frac{\partial p}{\partial u} + Q \frac{\partial q}{\partial u} + X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \left(p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial y}{\partial u} \right),$$

et comme

$$P \frac{\partial p}{\partial u} + Q \frac{\partial q}{\partial u} + X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} = -Z \frac{\partial z}{\partial u},$$

il reste

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -Z \left[\frac{\partial z}{\partial u} - p \frac{\partial x}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u} \right] = -ZU.$$

Donc, en intégrant,

$$U = U_0 e^{-\int Z dt}.$$

Pour que U soit nul, il faut et il suffit que

$$U_0 = 0,$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$(10) \quad \frac{\partial z_0}{\partial u} - p_0 \frac{\partial x_0}{\partial u} - q_0 \frac{\partial y_0}{\partial u} = 0.$$

Dans ce cas, l'objection de M. Bertrand ne se présente plus, car $\int -Z dt$ reste toujours fini, pourvu que Z reste fini, ce que nous supposons. Mais pour que le système (9) soit équivalent au système (8), il faut que tous les dénominateurs du système (5') ne soient pas tous nuls, pour les valeurs initiales, car alors la seule intégrale serait

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad q = q_0, \quad p = p_0,$$

et le système (9) ne serait plus équivalent au système (8).

Cherchons maintenant à déterminer une surface intégrale passant par la courbe gauche

$$x = \lambda(u), \quad y = \mu(u), \quad z = v(u).$$

Il suffira de prendre pour x_0 , y_0 , z_0 les valeurs $\lambda(u)$, $\mu(u)$, $v(u)$;

p_0 et q_0 seront déterminés par les équations

$$\begin{aligned} F(\lambda(u), \mu(u), v(u), p_0, q_0) &= 0, \\ v'(u) &= p_0 \lambda'(u) + q_0 \mu'(u). \end{aligned}$$

Les valeurs de p_0 et q_0 , données par ces formules, sont développables au voisinage de $u = u_0$ si le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_0} \mu'(u) - \frac{\partial F}{\partial q_0} \lambda'(u)$$

n'est pas nul pour ce système de valeurs.

Les deux premières des équations (9) pourront alors être résolues par rapport à t et à u , qui seront des fonctions développables de x et de y , car le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(x, y)}{D(t, u)} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial t}$$

se réduit au précédent pour $t = 0$, $u = u_0$. En portant ces valeurs dans l'expression de z , on aura pour z une fonction développable de x et y . Si ce déterminant est nul, l'intégrale ne cesse pas d'exister en général, mais elle présente une singularité au point correspondant.

Dans le cas particulier traité par Cauchy, le déterminant précédent se réduit à P_0 . Si donc P_0 n'est pas nul, on obtient pour z une fonction développable des variables x et y ; ce qui est bien conforme au théorème général.

REMARQUE. — La méthode de Cauchy fournit aussi une intégrale complète, car on satisfait à la relation

$$\frac{\partial z_0}{\partial u} = p_0 \frac{\partial x_0}{\partial u} + q_0 \frac{\partial y_0}{\partial u},$$

en prenant $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$, a , b , c étant trois constantes; p_0 et q_0 sont liés par la seule relation

$$F(a, b, c, p_0, q_0) = 0.$$

L'intégrale ainsi obtenue dépend des trois constantes a , b , c et il suffit de prendre pour l'une d'elles une constante absolue pour avoir une intégrale complète.

49. Caractéristiques. — Les résultats précédents sont susceptibles d'une interprétation géométrique importante. Si dans les équations (9) nous regardons x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 comme constants et t comme variable, les trois premières équations représentent une certaine courbe qui se déplace en engendrant la surface intégrale quand on fait varier u . Toute courbe de cette famille est complètement déterminée quand on se donne les valeurs y_0, z_0, q_0 qui correspondent à une valeur donnée x_0 de x, p , se déduisant de la relation $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$. Ces courbes dépendent donc de trois paramètres arbitraires; elles forment un complexe de courbes, et nous voyons que toute surface intégrale est engendrée par les courbes de ce complexe, que nous appellerons *caractéristiques*, associées suivant une certaine loi, sauf les intégrales singulières que nous avons laissées de côté.

Appelons *élément* l'ensemble d'un point (x, y, z) et d'un plan de coefficients angulaires (p, q) passant par ce point. De tout élément dont les coordonnées vérifient la relation $F = 0$, part une courbe caractéristique, en général bien déterminée, tangente à cet élément. Mais, d'après les dernières des formules (9), nous voyons que les valeurs de p et de q sont elles-mêmes déterminées complètement tout le long de cette caractéristique. On est donc conduit à l'importante proposition que voici : *Si deux surfaces intégrales sont tangentes, c'est-à-dire ont un élément commun, elles sont tangentes tout le long de la caractéristique issue de cet élément.*

L'intégrale complète obtenue en faisant $x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c$ n'est autre chose, on le voit, que le lieu des caractéristiques issues du point (a, b, c) . On reconnaît facilement que les tangentes aux diverses caractéristiques issues d'un point M forment, en général, un cône ayant son sommet en ce point; ce point M sera donc un point singulier pour la surface engendrée par ces caractéristiques.

50. La méthode de Cauchy s'étend au cas d'un nombre quelconque de variables. Il est commode, pour simplifier l'exposition, d'étendre immédiatement à ces équations la notion de caractéristique. Nous adopterons la méthode suivie par M. Darboux ⁽¹⁾. Considérons

(1) Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, p. 123 et suivantes (Journal des sciences étrangères, t. XXVII, 1884).

l'équation

$$(11) \quad F(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

que nous écrirons souvent plus brièvement

$$F(z, x_n, p_n) = 0,$$

et soit

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

une intégrale quelconque de cette équation. Nous appellerons *élément* de l'intégrale l'ensemble d'un système de valeurs $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ et des valeurs correspondantes $z^0, p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0$, en posant, comme plus haut,

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},$$

$$X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Supposons qu'on fasse varier les éléments à partir de certaines valeurs initiales z^0, x_i^0, p_i^0 , de façon à satisfaire toujours aux équations différentielles ⁽¹⁾

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = dt,$$

t désignant une variable auxiliaire dont la valeur initiale sera nulle. Il est clair que ces équations déterminent complètement ce qu'on peut appeler un système de courbes situées sur la surface intégrale, si l'on suppose connue z en fonction de x_1, x_2, \dots, x_n . C'est à cette suite simplement infinie d'éléments que nous donnerons le nom de *caractéristique*. Nous allons montrer que, sans connaître l'expression de z , on peut joindre aux équations précédentes d'autres équations différentielles qui permettent de définir complètement la variation des variables z, x_i, p_i , le long d'une caractéristique.

Partons d'un élément de l'intégrale z, x_i, p_i et attribuons aux variables des accroissements définis par les formules précédentes et

(1) Ce procédé est identique au fond à celui de Cauchy. Car il revient à prendre pour variables indépendantes x_i et $n-1$ autres variables u_1, \dots, u_{n-1} , choisies de telle façon que l'on ait $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{P_j}{P_i}$; les calculs faits dans le texte prouvent que l'on aura ensuite $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = -\frac{X_j + P_j Z}{P_i}$.

l'équation de la surface intégrale. On aura entre ces accroissements les relations

$$\begin{aligned} dz &= p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n \\ dp_i &= p_{i1} dx_1 + \dots + p_{in} dx_n \end{aligned}$$

en posant

$$P_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k};$$

d'ailleurs de l'équation (11) on déduit, en différentiant par rapport à x_i ,

$$X_i + p_i Z + P_{i1} p_1 + \dots + P_{in} p_n = 0.$$

Remplaçons P_{i1}, \dots, P_{in} par leurs valeurs $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$, il vient

$$(X_i + p_i Z) dt + p_{i1} dx_1 + \dots + p_{in} dx_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$(X_i + p_i Z) dt + dp_i = 0.$$

Ceci nous prouve que les éléments d'une intégrale satisfont, tout le long d'une caractéristique, au système d'équations différentielles

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} dt = \frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} &= \frac{dz}{p_1 P_1 + \dots + p_n P_n} \\ &= \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \dots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z}. \end{aligned} \right.$$

Ces équations ne dépendent pas de la fonction Φ et, par suite, on peut déterminer les éléments successifs le long d'une caractéristique sans connaître l'intégrale. La caractéristique issue d'un élément déterminé x_i^0, p_i^0, z^0 est donc bien déterminée. On en conclut que si deux intégrales ont un élément commun, elles ont en commun tous ceux qui sont situés sur la caractéristique issue de cet élément.

Si les dénominateurs des équations (12) restent finis et ne sont pas tous nuls pour les valeurs initiales, ce que nous supposons, on tirera de ces équations

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} x_i &= f_i(t, z^0, x_i^0, p_i^0), \\ p_i &= g_i(t, z^0, x_i^0, p_i^0), \\ z &= f(t, z^0, x_i^0, p_i^0), \end{aligned} \right. \quad (k, i = 1, 2, \dots, n),$$

116 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

les fonctions f_i, φ_i, f étant des fonctions continues de t et des valeurs initiales, au moins entre certaines limites.

Puisque chaque intégrale est un lieu de caractéristiques, il est clair que toute intégrale sera représentée par les formules (13), où l'on prend pour z^0, x_i^0, p_i^0 des fonctions de $n - 1$ variables indépendantes, choisies de telle façon que ces fonctions z, x_i, p_i vérifient les relations

$$\begin{cases} F(z, x_i, p_i) = 0, \\ dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0. \end{cases}$$

Comme

$$F(z, x_i, p_i) = C^0$$

est une intégrale du système (12), il suffira que l'on ait

$$F(z^0, x_i^0, p_i^0) = 0,$$

pour que la première équation soit vérifiée. D'autre part, on a aussi

$$\frac{dz}{dt} = p_1 \frac{dx_1}{dt} + \dots + p_n \frac{dx_n}{dt}.$$

Supposons que z^0, x_i^0, p_i^0 soient des fonctions de v variables u_1, u_2, \dots, u_v , et désignons par la lettre δ les différentielles correspondant à des accroissements $\delta u_1, \dots, \delta u_v$ de ces variables. Posons

$$U = \delta z - p_1 \delta x_1 - \dots - p_n \delta x_n$$

on a

$$\begin{aligned} dU &= d \delta z - p_1 d \delta x_1 - \dots - p_n d \delta x_n \\ &\quad - \delta p_1 \delta x_1 - \dots - \delta p_n \delta x_n, \end{aligned}$$

la lettre d désignant les différentielles quand t seul varie. D'ailleurs, on aura

$$\begin{aligned} 0 &= \delta dz - p_1 \delta dx_1 - \dots - p_n \delta dx_n \\ &\quad - \delta p_1 dx_1 - \dots - \delta p_n dx_n, \end{aligned}$$

et, comme on peut intervertir les opérations d et δ ,

$$dU = \sum_i (\delta p_i dx_i - d p_i \delta x_i),$$

$$dU = \sum_i [P_i \delta p_i + (X_i + p_i Z) \delta x_i] dt.$$

Puisque z, x, p vérifient l'équation (11), on aura

$$\sum_i (P_i \delta p_i + X_i \delta x_i) = -Z \delta z,$$

par suite,

$$dU = -ZU dt,$$

et

$$U = U_0 e^{-\int Z dt}.$$

Pour que U soit nul, il faut et il suffit que U_0 soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$\delta z^0 - p_1^0 \delta x_1^0 - \dots - p_n^0 \delta x_n^0 = 0.$$

En résumé, pour avoir une intégrale, il faut et il suffit que les valeurs initiales soient des fonctions de $(n-1)$ variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , satisfaisant aux relations

$$(14) \quad \begin{cases} F(x^0, x_1^0, p_1^0) = 0, \\ \delta z^0 - p_1^0 \delta x_1^0 - \dots - p_n^0 \delta x_n^0 = 0. \end{cases}$$

En particulier, si on veut avoir l'intégrale de Cauchy qui, pour $x_1 = x_1^0$, se réduit à une fonction donnée $\Phi(x_2, x_3, \dots, x_n)$, on pourra prendre comme variables indépendantes $x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$ et, alors, la deuxième des relations (14) donnera les conditions

$$z^0 = \Phi(x_2^0, \dots, x_n^0), \quad p_1^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1^0}, \quad \dots, \quad p_n^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n^0}.$$

La valeur de p_1^0 sera donnée par la première des formules (14), et cette valeur sera développable si P_1^0 est différent de 0. Les équations (13) donneront alors pour z, x_1, \dots, x_n des fonctions développables de t, x_2^0, \dots, x_n^0 . Le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(t, x_2^0, \dots, x_n^0)}$$

se réduit au début à P_1^0 , qui n'est pas nul par hypothèse. On pourra donc tirer t, x_1^0, \dots, x_n^0 en fonction de x_1, \dots, x_n et en portant ces valeurs dans l'expression de z , on voit que z sera une fonction holomorphe de x_1, x_2, \dots, x_n .

Comme dans le cas de trois variables, la solution précédente est loin de répondre à toutes les questions que l'on peut se proposer

Prenons-en un nombre quelconque k et supposons-les résolues par rapport à $s^0, x_1^0, \dots, x_{k-1}^0$,

En remplaçant dans la seconde des équations (14) et on égalant à zéro les coefficients de dx_1^2, \dots, dx_k^2 , on obtient $n - k + 1$ relations

qui, jointes à la relation $F(x^0, x_1^0, p_1^0)$, permettraient d'exprimer p_1^0, \dots, p_n^0 en fonction de $k - 2$ d'entre elles. On voit que toutes les valeurs initiales s'expriment en fonction $n - 1$ variables.

Les relations (14) étant satisfaites, les fonctions s, x, p , de n variables représentées par les formules (13) vérifient les équations

Elles donnent donc une intégrale de l'équation proposée. Toutefois, la méthode donne lieu aux remarques suivantes :

1° Il pourrait arriver que les fonctions f, φ, f_0 , qui contiennent les n variables indépendantes, se réduisent à des fonctions d'un moindre nombre de variables. Il est facile de voir dans quels cas cette circonstance se présentera. Les relations établies entre les valeurs initiales s^0, x_i^0, p_i^0 déterminent une multiplicité à $(n - 1)$ dimensions composée d'éléments. De chaque élément de cette multiplicité part

une caractéristique, et l'ensemble de ces caractéristiques forme précisément l'intégrale. Il est clair que cet ensemble forme, en général, une multiplicité à n dimensions, sauf dans le cas particulier où la multiplicité des valeurs initiales serait elle-même composée de caractéristiques.

2° Ce cas exceptionnel écarté, l'élimination de t, u_1, \dots, u_{n-1} entre les relations (13)

$$z = f, \quad x_i = f_i,$$

conduira, en général, à une seule relation

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

et la fonction Φ sera évidemment une intégrale. Il n'en serait plus de même si des équations (13) on pouvait déduire plusieurs relations entre les variables z, x_i . Cependant, par une extension du mot *intégrale*, due à M. Sophus Lie, nous ne rejeterons pas ces solutions. D'une manière générale, nous désignerons sous le nom d'*intégrale* tout système d'éléments vérifiant les relations

$$F(z, x_n, p_n) = 0, \quad dz = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n,$$

et dépendant de n variables indépendantes.

Nous reviendrons plus loin sur cette définition nouvelle de l'intégrale.

51. On satisfait aux équations (14) en prenant pour x_i^0, z^0 des constantes, les valeurs initiales étant liées par la seule relation

$$F(z^0, x_i^0, p_i^0) = 0.$$

L'intégrale ainsi obtenue, qui est formée par l'ensemble des caractéristiques issues d'un point, dépend de $n + 1$ constantes arbitraires. Si on attribue à l'une d'elles une valeur déterminée, on aura une intégrale complète de l'équation (11). Ce sera d'ailleurs une véritable intégrale complète, car si les éléments de cette intégrale vérifiaient une autre équation que l'équation (11),

$$F_1(z, x_n, p_n) = 0,$$

on devrait avoir, puisque pour $t = 0, z, x_n, p_n$ se réduisent respectivement à z^0, x_i^0, p_i^0 ,

$$F_1(z^0, x_i^0, p_i^0) = 0,$$

ce qui ne peut pas être, puisque les valeurs initiales p_1^0, \dots, p_n^0 sont liées par la seule relation

$$F(z^0, x_1^0, p_1^0) = 0.$$

REMARQUE I. — Il pourra arriver, dans certains cas, que cette intégrale ne soit pas une intégrale proprement dite, mais une intégrale au sens plus large de M. Lie. Supposons que $F(x_1, p_1)$ soit homogène par rapport aux variables p_1 et ne renferme pas z ; dans ce cas, des équations qui représentent l'ensemble des caractéristiques issues d'un point $(z^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ on pourra déduire au moins deux relations entre les variables z, x_1, \dots, x_n . Des équations différentielles des caractéristiques on tire d'abord, puisque

$$p_1 P_1 + \dots + p_n P_n = \mu F(x_1, p_1) = 0,$$

$z = z^0$. D'un autre côté, ces équations ne changent pas quand on change p_1 en λp_1 , λ désignant une constante quelconque. On peut donc, sans restreindre la généralité, supposer la valeur initiale de p_1 égale à l'unité par exemple, $p_1^0 = 1$. Alors x_1, \dots, x_n , dans les formules (13), dépendront de t et des $n - 1$ variables p_2^0, \dots, p_n^0 qui sont liées par la relation $F_0 = 0$. Ces n fonctions ne renferment donc que $n - 1$ variables indépendantes, et l'élimination de ces variables conduira au moins à une relation entre x_1, x_2, \dots, x_n . Il en sera encore de même si la fonction F , tout en contenant z , était homogène par rapport à p_1, \dots, p_n . En effet, si le lieu des caractéristiques issues d'un point $(z^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ était représenté par une seule relation entre z, x_1, \dots, x_n , cette relation serait nécessairement $z = z^0$, et on aurait pour tous les éléments de cette intégrale $p_1 = 0$, équations qui ne résultent pas de la relation $F(z, x_1, p_1) = 0$.

REMARQUE II. — On pourra toujours obtenir une infinité d'intégrales complètes par la méthode de Cauchy; on cherchera pour cela une intégrale se réduisant, pour $x_1 = x_1^0$, à une fonction donnée à l'avance

$$f(x_2, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n),$$

contenant n paramètres variables a_1, a_2, \dots, a_n .

52. La méthode de Cauchy nous a conduit à une notion nouvelle, celle des caractéristiques. Il est aisé de voir que cette notion peut,

d'une manière très naturelle, se déduire du procédé employé par Lagrange pour obtenir l'intégrale générale au moyen d'une intégrale complète.

Prenons d'abord une équation à trois variables. Nous avons vu que si $V(x, y, z, a, b) = 0$ est une intégrale complète, on obtient une surface intégrale en éliminant a entre les équations

$$(15) \quad \begin{cases} V(x, y, z, a, b) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} \varphi'(a) = 0, \end{cases}$$

où on a posé $b = \varphi(a)$. Ces deux équations (15) représentent une courbe dépendant d'un paramètre a , dont le lieu est la surface intégrale. Les équations de cette courbe sont de la forme

$$(16) \quad \begin{cases} V(x, y, z, a, b) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} c = 0, \end{cases}$$

a, b, c étant des paramètres arbitraires. Les courbes (16) forment un complexe, et nous voyons que les surfaces intégrales sont des surfaces engendrées par les courbes de ce complexe, associées suivant une certaine loi. Considérons une de ces courbes correspondant aux valeurs a_0, b_0, c_0 des paramètres, toutes les surfaces intégrales obtenues au moyen de fonctions φ , telles que

$$b_0 = \varphi(a_0), \quad c_0 = \varphi'(a_0),$$

passeront par cette courbe et seront tangentes entre elles tout le long de cette courbe, car les valeurs de p et q , qui, pour un point quelconque d'une surface intégrale, sont données par les équations

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

seront les mêmes pour toutes ces surfaces.

Plus généralement, soit

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

une intégrale complète d'une équation du premier ordre à n variables,

$$F(x, x_n, p_n) = 0.$$

qui sont compatibles, pourvu que x, x_0, p_2 vérifient la relation $F(x, x_0, p_2) = 0$, par rapport à a_1, a_2, \dots, a_n ; on en tire

Personas en outre

Si nous portons dans ces expressions les valeurs de a_1, a_2, \dots, a_n , nous en déduirons pour b_1, b_2, \dots, b_n des valeurs bien déterminées

Les 2^{es} équations

déterminent une multiplicité à une dimension composée d'éléments, quand on y regarde a , et b , comme des constantes ayant des valeurs déterminées. Par tout élément x^0, x^1, p^1 , vérifiant la relation $F_0 = 0$, il passe une de ces multiplicités, et une seule, donnée par les équations

Appelons caractéristiques les multiplicités qui viennent d'être définies. Pour démontrer que toute surface intégrale est un lieu de caractéristiques, il suffit évidemment de prouver que toute surface intégrale qui passe par un élément contient la multiplicité caractéristique issue de cet élément. Pour cela, reprenons le procédé de Lagrange pour déduire de l'intégrale complète $s = \Phi$ une nouvelle intégrale. Soient

les relations qui lient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, que nous supposons résolues

par rapport à a_1, \dots, a_r . La relation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} da_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} da_n = 0,$$

qui doit être satisfaite, peut s'écrire

$$da_1 - b_1 da_2 - \dots - b_n da_n = 0.$$

Remplaçons $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ par leurs valeurs tirées des formules (18) et égalons à zéro les coefficients des différentielles $d\alpha_{i+1}, \dots, d\alpha_n$; il vient

[illegible]

L'intégrale cherchée s'obtient en éliminant $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ entre l'équation $x - \Phi = 0$ et les équations (18) et (19) où

$$b_k \frac{\partial \Phi}{\partial a_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0, \quad (k = 2, 3, \dots, n).$$

Les valeurs correspondantes de p_1, p_2, \dots, p_n seront fournies par les relations

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}.$$

On peut dire encore que l'on obtiendra toutes les relations qui lient les éléments de cette intégrale en éliminant $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ entre les équations (18) et (19) et les équations

$$(19)^{th} \quad z = \Phi, \quad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}.$$

Or cette élimination peut se faire comme il suit : des $(n + 1)$ équations (19)^{ab} on tire d'abord la relation $F = 0$, puis $a_i = \varphi_i(z, x_n, p_n)$, et par suite $b_n = \psi_n(z, x_n, p_n)$. De sorte que l'intégrale considérée sera représentée par les équations (18) et (19), où on suppose a_i et b_n remplacées par les fonctions φ_i et ψ_n , jointes à la relation $F = 0$. Les équations (18) et (19) ne dépendent que des $(2n - 1)$ fonctions φ_i .

$\dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n$; par conséquent, si elles sont vérifiées par les coordonnées d'un élément s^0, x^0, p^0 , elles seront encore vérifiées par tous les éléments tels que les fonctions φ , et ψ , conservent la même valeur, c'est-à-dire par tous les éléments de la multiplicité

$$F = 0, \quad \varphi_i = \varphi^0, \quad \psi_h = \psi^0, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n \\ h = 2, 3, \dots, n \end{pmatrix}.$$

En résumé, sauf les intégrales singulières de Lagrange auxquelles le raisonnement ne s'applique plus, toutes les intégrales s'obtiennent en associant suivant une certaine loi les multiplicités caractéristiques, loi qui est exprimée par les relations (18) et (19).

Pour montrer l'identité des deux définitions des caractéristiques, nous allons établir les équations différentielles des multiplicités précédentes. Puisque $s = \Phi$ est une intégrale complète de l'équation $F = 0$, on aura, quels que soient x_i, a_i ,

$$F\left(\Phi, a_i, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) = 0;$$

en différentiant par rapport à x_i , et par rapport à a_i , il vient

$$(20) \quad \begin{cases} z \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + X_i + \sum_{j=1}^{i-1} P_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \\ z \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} + \sum_{j=1}^{i-1} P_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial a_j} = 0, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Écrivons les équations de la multiplicité sous la forme équivalente à la forme (17)

$$s = \Phi, \quad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad b_h \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_h} = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, n), \\ (h = 2, 3, \dots, n),$$

a_i et b_h étant des constantes arbitraires. Nous distinguerons deux cas :

1° Le déterminant fonctionnel

$$I = \frac{D\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right)}{D(a_1, \dots, a_n)} \neq 0.$$

Dans ce cas, on pourra mettre les équations de la multiplicité sous la forme équivalente

$$(21) \quad \begin{cases} z = \Phi, & p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, & \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = c_i t, \\ (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

en introduisant une variable auxiliaire t , c_1, c_2, \dots, c_n désignant de nouvelles constantes. Les dernières équations donneront x_1, x_2, \dots, x_n en fonction de t , et les premières donneront ensuite z, p_1, \dots, p_n . On aura alors

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_j}{dt}, \\ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_i \partial x_j} \frac{dx_j}{dt} &= c_i = \frac{1}{t} \frac{\partial \Phi}{\partial a_i}. \end{aligned}$$

Remplaçons dans cette dernière expression $\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}$ par sa valeur tirée des équations (20), il vient

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_i \partial x_j} \left[\frac{dx_j}{dt} + \frac{P_j}{tZ} \right] = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Le déterminant des coefficients des expressions $\frac{dx_j}{dt} + \frac{P_j}{tZ}$ est le déterminant I , qui est différent de 0, il faut donc que l'on ait

$$\frac{dx_i}{dt} + \frac{P_i}{tZ} = 0,$$

s'est-à-dire

$$\frac{dx_i}{P_i} = -\frac{dt}{tZ}.$$

On aura ensuite

$$\frac{dp_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{P_j}{tZ},$$

et, en tenant compte des relations (20),

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{tZ} \{ X_i + P_i Z \}.$$

d'où

$$\frac{-dp_i}{X_i + P_i Z} = -\frac{dt}{tZ}.$$

Enfin, on aura

$$\frac{dz}{dt} = p_1 \frac{dx_1}{dt} + \dots + p_n \frac{dx_n}{dt};$$

nous retrouvons bien les équations (12).

2° Supposons $I = 0$. Nous savons que, dans ce cas, tous les déterminants mineurs du premier ordre ne peuvent être nuls. Supposons, par exemple,

$$\frac{D \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}} \right)}{D(a_1, \dots, a_{n-1})} \neq 0.$$

La condition $I = 0$ exprime qu'il y a une relation entre les quantités $\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial a_n}$; car on peut aussi l'écrire

$$I = \frac{D \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} \right)}{D(x_1, \dots, x_n)} = 0.$$

Soit

$$\psi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} \right) = 0$$

cette relation. Si en y remplace les quantités $\frac{\partial \Phi}{\partial a_h}$, ($h = 2, 3, \dots, n$), par leurs valeurs $-b_h \frac{\partial \Phi}{\partial a_1}$, on en conclut que $\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}$ et, par suite, toutes les quantités $\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}$ sont constantes le long d'une multiplicité. Les équations de la caractéristique peuvent donc s'écrire

$$z = \Phi, \quad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = c_i.$$

c_1, c_2, \dots, c_n étant des constantes liées par la relation $\psi(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$. Les $n - 1$ équations

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = c_1, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial a_{n-1}} = c_{n-1}$$

permettent d'exprimer x_1, \dots, x_{n-1} en fonction de x_n , et en aura ensuite z, p_1, \dots, p_n , au moyen des premières relations.

Des équations précédentes on tire

$$(22) \quad \begin{cases} dp_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} dx_k, \\ \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_i \partial x_k} dx_k = 0, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nous savons, d'ailleurs, que, dans ce cas, F ne dépend pas de z , c'est-à-dire que l'on a $Z = 0$. Les relations (20) prennent donc la forme plus simple

$$(20') \quad \begin{cases} X_i + \sum_{k=1}^{i-1} P_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \\ \sum_{k=1}^{i-1} P_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial a_i} = 0, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les dernières équations (22) sont des équations homogènes et linéaires en dx_k dont le déterminant I est nul, mais dont un mineur du premier ordre est différent de 0; par suite, ces équations admettent un système de solutions où les inconnues ne sont déterminées qu'à un facteur de proportionnalité près. Les dernières équations (20') montrent que les quantités P_k forment aussi un système de solutions; on doit donc avoir

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = dt,$$

en désignant par dt la valeur commune de ces rapports. On a alors immédiatement

$$dp_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} P_k dt = -X_i dt,$$

en tenant compte des premières relations (20'). Quant à dz , on a toujours la relation

$$dz = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n.$$

Il suit de là que les multiplicités définies en dernier lieu satisfont aux mêmes équations différentielles que les caractéristiques. D'ailleurs, on peut disposer des $2n - 1$ constantes a_n, b_n de façon

que l'une de ces multiplicités passe par un élément quelconque x^0, x^1, p^1 , pourvu que l'on ait $F(x^0, x^1, p^1) = 0$. Ce sont donc bien les caractéristiques.

Considérons, maintenant, une intégrale complète définie par l'équation

$$V(x, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

et soit

$$z = \Phi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n)$$

la valeur de z obtenue en résolvant cette équation. Les caractéristiques auront pour équations, nous l'avons vu,

$$z = \Phi, \quad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad b_h \frac{\partial \Phi}{\partial a_h} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0.$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial a_h} + \frac{\partial V}{\partial a_h} = 0. \end{cases}$$

En portant ces valeurs de $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial a_h}$ dans les équations précédentes, on en conclut que, si

$$V(x, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) = 0$$

est une intégrale complète, les équations

$$\begin{aligned} V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} p_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_h} b_h + \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, n), \quad (h = 2, 3, \dots, n), \end{aligned}$$

représentent les caractéristiques.

53. Nous avons vu (§ 50) que si on connaît les caractéristiques, on peut en déduire l'intégrale générale de l'équation (11); ce qui précède nous montre que, réciproquement, si on connaît une intégrale complète, on a immédiatement les caractéristiques. L'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre ou la détermination des caractéristiques de cette équation sont donc deux problèmes absolument équivalents.

Connaissant une intégrale complète d'une équation du premier

ordre, on peut se proposer de déterminer une intégrale satisfaisant à des conditions initiales données. En passant par l'intermédiaire des caractéristiques, le problème ne présente aucune difficulté. Proposons-nous, par exemple, connaissant une intégrale complète

$$z = \Phi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n),$$

de trouver une intégrale se réduisant, pour $x_1 = x_1^0$, à une fonction donnée $f(x_2, \dots, x_n)$. La caractéristique passant par un élément (x^0, x_1^0, p_1^0) sera représentée par les équations

$$z = \Phi, \quad p_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad b_h \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_h} = 0, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n \\ h = 2, 3, \dots, n \end{pmatrix},$$

les constantes a_h , b_h étant déterminées par les relations

$$x^0 = \Phi, \quad p_1^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1^0}, \quad b_h \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_h} = 0.$$

Pour avoir l'intégrale demandée, il faudra trouver le lien des caractéristiques, lorsque l'élément initial satisfait aux relations

$$x^0 = f(x_2^0, \dots, x_n^0), \quad p_1^0 = \frac{\partial f}{\partial x_2^0}, \quad \dots, \quad p_n^0 = \frac{\partial f}{\partial x_n^0}.$$

L'élimination de $p_1^0, \dots, p_n^0, b_2, \dots, b_n$ entre les équations précédentes conduit aux relations

$$z = \Phi, \quad f_0 = \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial x_i^0} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i^0}, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 2, 3, \dots, n \end{pmatrix},$$

entre lesquelles il suffira d'éliminer $a_1, \dots, a_n, x_1^0, \dots, x_n^0$ et λ . On en déduit la règle pratique suivante (1) :

Connaissant une intégrale complète d'une équation du premier ordre

$$z = \Phi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n),$$

pour obtenir une intégrale de la même équation se réduisant, pour $x_1 = x_1^0$, à une fonction donnée $f(x_2, \dots, x_n)$ des autres

(1) Heger, *Mathematische Annalen*, t. III, p. 322.

variables, on éliminera $a_1, \dots, a_n, x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda$ entre les $(2n + 1)$ équations

$$z = \Phi, \quad f_0 = \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 2, 3, \dots, n \end{array} \right).$$

REMARQUE. — Il n'est pas nécessaire, pour intégrer l'équation (11), d'avoir l'intégrale générale du système (13); il suffit de connaître les intégrales de ce système dont les valeurs initiales vérifient la relation $F(x^0, x^0, p^0) = 0$. Si on a intégré complètement le système (12), on aura intégré par là même l'équation $F = a_0$, où a_0 désigne une constante quelconque. Réciproquement, soit

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n, a_0)$$

une intégrale complète de l'équation

$$F(x, x_n, p_i) = a_0.$$

Les caractéristiques seront représentées par les relations

$$\begin{aligned} z - \Phi = 0, \quad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} b_i + \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, n), \quad (k = 2, 3, \dots, n). \end{aligned}$$

Ces équations donnent un système d'intégrales du système (12) dépendant de $2n$ paramètres arbitraires, et on voit aisément qu'on peut disposer de ces $2n$ constantes de façon que z, x_i, p_i prennent des valeurs quelconques données à l'avance; elles représentent donc l'intégrale générale du système (12). D'ailleurs, l'intégration du système (12) équivaut à celle de l'équation linéaire du premier ordre

$$(23) \quad (p_1 P_1 + \dots + p_n P_n) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \sum_{i=1}^n \left\{ P_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - (X_i + p_i Z) \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \right\} = 0;$$

donc l'intégration de l'équation $F = a_0$ et celle de l'équation linéaire (23) sont deux problèmes équivalents.

CHAPITRE VI

Définition des expressions (ϕ, φ) et $[\phi, \varphi]$. Première méthode de Jacobi.

54. Nous avons vu (§ 53) qu'étant donnée l'équation

$$(1) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = a_0,$$

qui ne contient pas z , l'intégration de cette équation se ramène à celle du système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{p_i} = \frac{-dp_i}{X_i} = \frac{dz}{p_1 p_1 + \dots + p_n p_n}.$$

Il suffira d'intégrer le système

$$\frac{dx_i}{p_i} = \frac{-dp_i}{X_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui ne contient pas z et on aura ensuite z par une quadrature. L'intégration de ce dernier système est équivalente à l'intégration de l'équation du premier ordre

$$\sum_{i=1}^n \left(p_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial \phi}{\partial p_i} \right) = 0.$$

D'une manière générale, nous poserons

$$(\phi, \varphi) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right\} = \sum_{i=1}^n \frac{D(\phi, \varphi)}{D(p_i, x_i)}.$$

Les expressions (ϕ, φ) , que nous rencontrerons souvent dans cette

132 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

théorie, sont connues sous le nom de *parenthèses de Poisson*. Avec cette notation, l'équation précédente peut s'écrire

$$(2) \quad (F, \Phi) = 0,$$

et, à une quadrature près, l'intégration des équations (1) et (2) sont deux problèmes équivalents.

Nous ferons connaître immédiatement quelques-unes des propriétés des expressions (ψ, φ) . On a

$$\begin{aligned} (c, \varphi) &= 0, \\ (\varphi, \varphi) &= 0, \\ (\varphi, \psi) &= -(\psi, \varphi), \end{aligned}$$

c désignant une constante. Soit

$$\psi = F_1(a, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \lambda), \quad \varphi = F_2(a, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \lambda),$$

ou $a, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ désignent des fonctions quelconques des variables $x_1, x_2, \dots, x_m, p_1, p_2, \dots, p_n$; on aura

$$(\psi, \varphi) = (a, \beta) \frac{D(F_1, F_2)}{D(a, \beta)} + (a, \gamma) \frac{D(F_1, F_2)}{D(a, \gamma)} + \dots + (\varphi, \lambda) \frac{D(F_1, F_2)}{D(\varphi, \lambda)},$$

le nombre des termes du second membre étant égal au nombre des combinaisons des lettres $a, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ deux à deux. La propriété la plus importante de ces parenthèses est la suivante : f, φ, ψ étant trois fonctions quelconques, on a identiquement (1)

$$((f, \varphi), \psi) + ((\varphi, \psi), f) + ((\psi, f), \varphi) = 0.$$

En effet, chaque terme du premier membre est le produit d'une dérivée du second ordre par deux dérivées du premier ordre; il suffit donc de prouver que ce premier membre ne contient aucune dérivée du second ordre. Nous allons montrer, par exemple, qu'il ne contient pas de dérivées du second ordre de f . Les termes contenant des dérivées du second ordre de f proviennent tous de

$$((f, \varphi), \psi) + ((\psi, f), \varphi),$$

(1) Boole, *Philosophical Transactions*, 1851.
Jacobi, *Nova Methodus*, p. 42.

qui peut encore s'écrire

$$(\phi, (\varphi, f)) - (\varphi, (\phi, f)).$$

Poseons alors

$$(\varphi, f) = X(f) \quad (\phi, f) = Y(f),$$

puisque ces deux expressions sont linéaires par rapport aux dérivées de f ; l'expression précédente s'écrit

$$Y(X(f)) - X(Y(f)),$$

expression qui, comme nous le savons (§ 24), ne contient pas de dérivées secondes de f .

On déduit de cette identité l'importante proposition suivante, connue sous le nom de théorème de Poisson :

Si α et β sont deux intégrales de l'équation

$$(2) \quad (F, \Phi) = 0,$$

(α, β) est une intégrale de la même équation.

L'identité

$$((F, \alpha), \beta) + ((\alpha, \beta), F) + ((\beta, F), \alpha) = 0$$

devient, puisque $(F, \alpha) = 0$, $(F, \beta) = 0$,

$$((\alpha, \beta), F) = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Il semblerait, d'après cela, qu'il suffirait de connaître deux intégrales de l'équation (2), outre la fonction F , pour pouvoir achever l'intégration, puisque de deux intégrales on en déduit une troisième; en combinant cette nouvelle intégrale avec une des deux premières, on en aurait une quatrième, et ainsi de suite. Mais il peut arriver que (α, β) se réduise à une constante ou à une fonction des intégrales déjà obtenues. De sorte que, dans la pratique, le théorème, sans être en défaut, n'a pas toute l'importance qu'il paraît avoir d'après son énoncé. On reviendra dans un autre chapitre sur l'application de ce théorème.

Considérons, comme cas particulier, deux fonctions φ et ψ linéaires par rapport aux variables p_i ,

$$\begin{aligned}\psi &= a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n, \\ \varphi &= b_1 p_1 + b_2 p_2 + \dots + b_n p_n\end{aligned}$$

et posons

$$\begin{aligned}X(f) &= a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \\ Y(f) &= b_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + b_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.\end{aligned}$$

L'expression (ψ, φ) se réduit, quand on y remplace p_i par $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, à

$$X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Si on a $(\psi, \varphi) = 0$, le système des deux équations $X(f) = 0$, $Y(f) = 0$ est jacobien. Soit f une intégrale de l'équation $X(f) = 0$, f désignant une fonction des seules variables x_1, x_2, \dots, x_n . On aura

$$(\psi, f) = 0,$$

par suite f et φ sont deux intégrales de l'équation

$$(\psi, \Phi) = 0,$$

et (φ, f) est aussi une intégrale de cette équation. D'ailleurs

$$(\varphi, f) = Y(f);$$

nous retrouvons une propriété connue des systèmes jacobiens (§ 30).

55. Considérons maintenant une équation contenant z

$$(3) \quad F(z, x_i, p_i) = a.$$

Nous avons vu que l'intégration de cette équation se ramène à l'intégration de l'équation linéaire

$$\sum_{i=1}^n \left\{ p_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - (X_i + p_i Z) \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \right\} = 0.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z};$$

équation précédente pourra s'écrire

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{d\Phi}{dx_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{dF}{dx_i} \right\} = 0,$$

ou, avec une notation analogue à celle des parenthèses précédentes,

$$(4) \quad [F, \Phi] = 0,$$

en posant d'une manière générale

$$[U, V] = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial U}{\partial p_i} \frac{dV}{dx_i} - \frac{\partial V}{\partial p_i} \frac{dU}{dx_i} \right\}.$$

Les expressions $[,]$ jouissent de propriétés analogues à celles des parenthèses $(,)$; mais la propriété fondamentale ne s'étend pas aux crochets. Si U, V, W sont trois fonctions quelconques de z, x, p , la somme

$$[[U, V], W] + [[V, W], U] + [[W, U], V]$$

n'est pas nulle. On démontre d'abord, comme pour les parenthèses, que cette somme ne contient aucune dérivée du second ordre. Or, on a

$$[U, V] = (U, V) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial p_i} \right\}.$$

Les seuls termes qui ne contiendront pas de dérivées du second ordre dans $[[U, V], W]$ proviendront de

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial p_i} \right\}$$

et seront

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial p_i} \right\} \frac{dW}{dx_i}.$$

Si on fait la somme des trois expressions analogues, on trouve qu'elle est égale à (1)

$$\frac{\partial U}{\partial z} [W, V] + \frac{\partial V}{\partial z} [U, W] + \frac{\partial W}{\partial z} [V, U];$$

c'est donc une fonction linéaire des crochets $[W, V], [U, W], [V, U]$.

(1) Mayer. *Mathematische Annalen*, t. IX. p. 378.

58. Première méthode de Jacobi. — En comparant les travaux d'Hamilton sur la mécanique à la méthode de Pfaff, Jacobi a été conduit à une méthode d'intégration identique au fond à celle de Cauchy, qui était inconnue de Jacobi à cette époque ⁽¹⁾. Nous exposerons cette méthode avec la modification de Mayer ⁽²⁾. Supposons avec Jacobi qu'on ait fait disparaître la fonction inconnue, soit

$$(5) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + H \left(t, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) = 0$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre entre la fonction inconnue V et les $(n + 1)$ variables indépendantes t, x_1, \dots, x_n , résolue par rapport à la dérivée $\frac{\partial V}{\partial t}$.

Poseons $\frac{\partial V}{\partial x_i} = p_i$, nous pourrions alors écrire l'équation (5) sous la forme abrégée

$$(5') \quad \frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x_n, p_n) = 0.$$

L'intégration de l'équation (5) se ramène à celle du système d'équations différentielles ordinaires

$$(6) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

En effet, soit

$$V(t, x_1, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n) + a_{n+1}$$

une intégrale complète de l'équation (5), telle que l'on ait

$$I = \frac{D \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)}{D(a_1, \dots, a_n)} \approx 0;$$

⁽¹⁾ Jacobi, *Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl variablen auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen* (Crelle, t. XVII, p. 97-108; Gesamte Werke, t. IV, p. 88-127). Une traduction française de ce mémoire a été publiée dans le tome III du *Journal de Liouville*, 1^{re} série.

Voir aussi *Vorlesungen über Dynamik*, p. 384.

⁽²⁾ Mayer, *Über die Jacobi-Hamilton'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* (Mathematische Annalen, t. III, p. 424).

l'intégrale générale du système (6) sera donnée par les formules

$$(7) \quad \frac{\partial V}{\partial x_i} = p_i \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où b_i désignent des constantes arbitraires. En effet, les $2n$ fonctions $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ de t , définies par les relations (7), vérifient les équations (6); c'est un cas particulier de la proposition plus générale démontrée au chapitre précédent (§ 52). D'un autre côté, on peut disposer des $2n$ constantes a_i, b_i de façon que, pour $t = t_0$, x_i, p_i prennent des valeurs données à l'avance x_i^0, p_i^0 . Réciproquement, je dis que si on a intégré le système (6), on aura une intégrale complète de l'équation (5) par une seule quadrature. En effet, soit

$$(8) \quad \begin{cases} x_i = q_i(t, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n), \\ p_i = \phi_i(t, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n), \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

l'intégrale générale du système (6), où a_1, a_2, \dots, a_n désignent les valeurs initiales de p_1, p_2, \dots, p_n et b_1, b_2, \dots, b_n celles de x_1, x_2, \dots, x_n , quand on fait $t = t_0$. Des n premières équations (8) on pourra

tirer b_1, b_2, \dots, b_n , car le déterminant $\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(b_1, \dots, b_n)}$ se réduit à l'unité

pour $t = t_0$, et en portant ces valeurs dans les n dernières on aura les quantités p_i exprimées en fonction de t, a_i et a_i . Donc, toute fonction des variables t, x_i, p_i, a_i, b_i pourra s'exprimer soit en fonction des variables t, a_i, b_i , soit au moyen des variables t, x_i, a_i (*). Imaginons qu'on prenne d'abord pour variables indépendantes t, a_i et b_i . Posons

$$U = \sum_{i=1}^{2n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H$$

et considérons la fonction

$$V = \sum_{i=1}^{2n} a_i b_i + \int_{t_0}^t U dt.$$

(*) Jacobi prenait pour variables indépendantes $t, x_1, \dots, x_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. C'est M. Mayer qui a fait remarquer, dans le travail cité plus haut, que ces $2n + 1$ quantités n'étaient pas nécessairement indépendantes. On pourra consulter sur ce sujet plusieurs articles de M. Darboux (Comptes rendus, t. LXXIX, p. 1488; t. LXXX, p. 100; Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 1^{re} série, t. VIII, p. 208), où, suivant les indications de M. Bertrand, il montre que la modification de Mayer n'est pas indispensable.

Si on exprime cette fonction V au moyen des variables t, x, a , on aura une intégrale complète de l'équation (5). Nous désignerons par la lettre d une différentielle relative à un accroissement dt de la seule variable t , par δ une différentielle relative à des accroissements $\delta a_i, \delta b_i$ des seules variables a_i, b_i et par Δ la différentielle totale, de telle sorte que l'on a

$$\Delta = d + \delta, \quad \Delta V = dV + \delta V, \quad \Delta x_i = dx_i + \delta x_i.$$

Calculons ΔV :

$$dV = U dt,$$

$$\delta V = \sum_{i=1}^{l-m} (a_i \delta b_i + b_i \delta a_i) + \int_t^1 \delta U dt.$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned} \delta U &= \sum_{i=1}^{l-m} \delta p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{l-m} p_i \delta \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{l-m} \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i - \sum_{i=1}^{l-m} \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i. \end{aligned}$$

Remplaçons $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ par leurs valeurs tirées des équations (6); il vient

$$\delta U = \sum_{i=1}^{l-m} p_i \delta \frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=1}^{l-m} \frac{dp_i}{dt} \delta x_i$$

et en remarquant que

$$\delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x_i, \quad \delta U = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{l-m} p_i \delta x_i \right).$$

On a donc

$$\int_t^1 \delta U dt = \sum_{i=1}^{l-m} p_i \delta x_i - \sum_{i=1}^{l-m} a_i \delta b_i$$

et, par suite,

$$\Delta V = \left\{ \sum_{i=1}^{l-m} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right\} dt + \sum_{i=1}^{l-m} p_i \delta x_i + \sum_{i=1}^{l-m} b_i \delta a_i$$

ou, en réduisant et remplaçant $\frac{\partial H}{\partial p_i} dt$ par dx_i ,

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{l-m} (p_i \Delta x_i + b_i \Delta a_i) - H \Delta t,$$

car

$$\delta a_i = \Delta a_i, \quad dt = \Delta t, \quad \Delta x_i = dx_i + \delta x_i.$$

Cette relation entre les différentielles totales subsiste quelles que soient les variables indépendantes; en doit donc avoir, en supposant V exprimée au moyen de x, x_i, a_i ,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + H = 0.$$

Cette fonction V vérifie donc l'équation (5); d'ailleurs, pour $t = t_0$, elle doit se réduire à $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, et le déterminant I se réduit à l'unité. Par conséquent, $V + a_{n+1}$ est une intégrale complète.

L'intégration de l'équation (5) se ramène donc à celle du système canonique

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Toute intégrale Φ de ce système doit vérifier l'équation linéaire

$$(9) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (H, \Phi) = 0.$$

On aura des intégrales indépendantes de t de cette équation, dans le cas où H ne dépend pas de t , en cherchant les intégrales de l'équation

$$(H, \Phi) = 0.$$

C'est ce qui se présente dans les problèmes de mécanique lorsque la fonction des forces ne dépend pas du temps.

Prenons le cas général; si α et β sont deux intégrales de l'équation (9), (α, β) est encore une intégrale. La proposition a déjà été établie lorsque α et β ne contiennent pas t . Si α et β contiennent t , introduisons une nouvelle variable auxiliaire T correspondant à t comme p_i correspond à x_i . Posons

$$((F, \Phi)) = (F, \Phi) + \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial T},$$

et

$$H_1 = H + T.$$

Considérons l'équation

$$((H_1, \Phi)) = 0;$$

elle s'écrit

$$(H, \Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0,$$

et se réduit à l'équation (9) si Φ ne dépend pas de T . Donc, si α et β sont des intégrales de l'équation (9), on aura

$$((H, \alpha)) = 0, \quad ((H, \beta)) = 0,$$

et, par suite,

$$((H, ((\alpha, \beta)))) = 0;$$

or

$$((\alpha, \beta)) = (\alpha, \beta),$$

et on a la relation qu'il fallait démontrer

$$((H, (\alpha, \beta))) = (H, (\alpha, \beta)) + \frac{\partial (\alpha, \beta)}{\partial t} = 0.$$

Supposons que les équations (6) soient les équations différentielles d'un problème de mécanique, où t représente le temps; si $\alpha = \text{Const.}$, $\beta = \text{Const.}$ sont deux intégrales premières de ce système, l'expression (α, β) sera aussi une intégrale et, par conséquent, conservera une valeur constante pendant toute la durée du mouvement. C'est sous cette forme que Poisson ⁽¹⁾ a obtenu son théorème.

REMARQUE. — Nous venons de montrer que de toute intégrale complète de l'équation (5) on déduit l'intégrale générale du système (6), et réciproquement lorsqu'on connaît l'intégrale générale du système (6) on a, par une seule quadrature, une intégrale complète de l'équation (5). Mais l'intégrale complète que l'on obtient ainsi n'est pas une intégrale quelconque, c'est l'intégrale complète qui, pour $t = t_0$, se réduit à $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. Il est aisé de vérifier que lorsqu'on connaît déjà une intégrale complète quelconque $\psi(t, x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_n)$ de l'équation (5), la quadrature précédente s'effectue immédiatement. En effet, l'intégrale générale du système (6) sera donnée par les équations

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial \psi}{\partial c_i} = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

(1) Journal de l'École polytechnique, 13^e cahier.

Soient a_i et b_i les valeurs initiales de p_i et x_i ; posons

$$\phi_0 = \phi(t_0, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

on devra avoir

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial b_i} = a_i, \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial c_i} = d_i,$$

et alors l'intégrale cherchée sera donnée par la formule

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i + \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right\} dt,$$

ou

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i + \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} dt,$$

en prenant pour variables indépendantes t, c_i, d_i . On aura donc

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i + \phi - \phi_0.$$

On en conclut (*) qu'étant donnée une intégrale complète quelconque ϕ de l'équation (5), l'intégrale qui, pour $t = t_0$, se réduit à $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, a pour expression

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i + \phi - \phi_0,$$

les constantes b_i, c_i se déduisant des équations

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial b_i} = a_i, \quad \frac{\partial \phi}{\partial c_i} = \frac{\partial \phi_0}{\partial c_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

(*) Mayer, *Mathematische Annalen*, t. VI, p. 167.

CHAPITRE VII

Méthode de Jacobi et Mayer.

87. Les méthodes précédentes, sauf celle de Lagrange et Charpit, ramènent l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à l'intégration complète d'un système d'équations différentielles ordinaires. On doit à Jacobi une autre méthode dans laquelle on a à chercher successivement une seule intégrale de plusieurs systèmes complets. Jacobi était en possession des principes essentiels de cette nouvelle méthode dès 1836 ⁽¹⁾. Il l'a enseignée pendant longtemps à l'Université de Königsberg, mais ce n'est qu'après sa mort qu'elle a été publiée par les soins de Clebsch, en 1862 ⁽²⁾. Dans cet intervalle, la plupart des théorèmes de Jacobi avaient été retrouvés par différents géomètres, Liouville ⁽³⁾, Bour ⁽⁴⁾, Donkin ⁽⁵⁾, etc... En particulier, Bour a montré que la méthode de Jacobi s'étendait sans difficulté aux systèmes d'équations simultanées. Néanmoins, on a conservé à cette méthode le nom de méthode de Jacobi. Enfin, les travaux plus récents de M. Mayer sur les systèmes d'équations linéaires ont permis de diminuer beaucoup le nombre d'intégrations exigé par l'emploi de cette méthode.

⁽¹⁾ Voir une lettre du 29 novembre 1836, adressée à M. le professeur Eata, secrétaire de la classe des sciences mathématiques de l'Académie de Berlin. *Journal de Crelle*, t. XVII, p. 68-82; *Gesammelte Werke*, t. IV, p. 41; *Journal de Liouville*, t. III, 1^{re} série, p. 44.

⁽²⁾ Jacobi, *Novae Methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quencunque propositas integrandi* (*Journal de Crelle*, t. LX, p. 1-181).

Voir aussi *Vorlesungen über Dynamik*; passim.

⁽³⁾ Cours du Collège de France de 1853.

⁽⁴⁾ Bour, *Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre* (*Journal de l'École polytechnique*, 30^e cahier).

⁽⁵⁾ Donkin, *Philosophical Transactions*, 1854.

$$(1) \quad V(x, x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-p+1}) = 0, \quad (p \geq 1),$$
$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial z} p_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$
[illegible]
$$(4) \quad \frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial a_{n-p+1}} da_{n-p+1} = 0,$$

1° En passant

$$a_1 = C^n, \quad \dots, \quad a_{n-p+1} = C^n$$

on retrouve l'intégrale complète.

2° En prenant pour s, a_1, \dots, a_{n-p+1} des fonctions satisfaisant aux équations

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_{n-1+1}} = 0.$$

L'élimination de a_1, \dots, a_{n-p+1} entre ces équations fournit une intégrale qui ne contient rien d'arbitraire et que nous appellerons *intégrale singulière*.

3° Si l'une des quantités $\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}$ est différente de 0, il existera au moins une relation entre $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-p+1}$. Supposons qu'il y ait k relations distinctes entre $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p+1}$ et k seulement

$$f_1(a_1, \dots, a_{n-p+1}) = 0, \quad \dots, \quad f_k(a_1, \dots, a_{n-p+1}) = 0;$$

on devra pouvoir trouver k facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, tels que l'en ait identiquement

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial a_{n-p+1}} da_{n-p+1} = \lambda_1 df_1 + \dots + \lambda_k df_k$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial a_1} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_1} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial a_1}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial V}{\partial a_{n-p+1}} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_{n-p+1}} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial a_{n-p+1}}. \end{array} \right.$$

En éliminant $a_1, \dots, a_{n-p+1}, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ entre ces relations, l'équation (1) et les relations $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$, on aura une intégrale du système (3) dépendant de k fonctions arbitraires que nous nommerons *l'intégrale générale*.

59. Réciproquement, étant donné un système d'équations aux dérivées partielles simultanées, tel que (3), il n'existe pas nécessairement des intégrales communes à ces équations. Nous allons voir dans quelles conditions il'en est ainsi, et comment on pourra les obtenir. Nous supposerons, avec Jacobi, que les équations ne

$$(5) \quad \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0 \\ \vdots \\ F_p(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0 \end{cases}$$
$$F_1 = 0, \quad \dots, \quad F_p = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \dots, \quad \Phi_{n-p} = 0$$
$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$
$$s = \int p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$$

THEOREME. — Si les deux équations $F=0$, $H=0$ ont une intégrale commune, cette intégrale vérifie l'équation

$$(F, H) \equiv 0,$$

En effet, supposons d'abord que p_1, p_2, \dots, p_n soient des fonctions quelconques de x_1, x_2, \dots, x_n satisfaisant aux équations

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{H} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_1} = 0.$$

Multiplions cette équation par $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ et ajoutons toutes les équations analogues; il vient

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0.$$

Permutons H et F et remarquons que, dans la somme double, on peut permuter les indices i et k ; nous aurons de même

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0.$$

Par suite, en retranchant membre à membre, il vient

$$(6) \quad (H, F) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Si p_1, p_2, \dots, p_n sont les dérivées partielles d'une même fonction de x_1, \dots, x_n , on a

$$\frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = 0,$$

quel que soient i et k et, par conséquent,

$$(H, F) = 0.$$

Nous voyons donc que toute intégrale du système (5) sera aussi une intégrale de toutes les équations telles que

$$(F_\alpha, F_\beta) = 0,$$

que l'on peut former en combinant deux à deux ces équations (5). On pourra donc adjoindre au système proposé celles de ces équations qui forment avec elles un système d'équations distinctes et, en continuant de la sorte, on arrivera nécessairement soit à un système d'équations distinctes en nombre supérieur à n qui, par suite, n'admet pas d'intégrales, soit à un système de m équations ($m \leq n$), tel que toutes les équations

$$(F_\alpha, F_\beta) = 0$$

soient identiquement vérifiées, ou soient des conséquences algébriques des précédentes.

un système en involution tel que le déterminant

$$R = \frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(p_1, \dots, p_n)}$$

ne soit pas identiquement nul. Si on résout les n équations

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_n = a_n$$

par rapport à p_1, p_2, \dots, p_n

$$p_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les valeurs de p_1, \dots, p_n ainsi obtenues rendent l'expression

$$p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$$

différentielle exacte.

On aura, en effet,

$$(F_\alpha - a_\alpha, F_\beta - a_\beta) = (F_\alpha, F_\beta) = 0,$$

et, d'après un calcul fait plus haut (formule 6), les fonctions p_1, \dots, p_n ainsi définies doivent vérifier les relations

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_j} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \right) = 0,$$

($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$).

Prenons les n relations de cette espèce où l'indice β conserve la même valeur; elles peuvent s'écrire

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_j} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \right) = 0.$$

Si on prend pour inconnues les quantités

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_j} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \right),$$

le déterminant des coefficients est précisément le déterminant R . Ce déterminant n'étant pas nul quand on le suppose exprimé au moyen de $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, il en sera évidemment de même quand on

y remplacera p_1, \dots, p_n par les valeurs

$$p_i = \phi_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n),$$

car cette substitution revient à un simple changement de variables.

On aura donc

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial x_i} \right) = 0,$$

et de ces nouvelles équations on déduira, en raisonnant comme tout à l'heure, les relations

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_i}.$$

Par suite l'expression

$$p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$$

est une différentielle exacte et la fonction

$$s = \Phi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n+1}) = \int (p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n) + a_{n+1}$$

est une intégrale commune aux équations

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_n = a_n;$$

le problème est donc résolu pour un système en involution de n équations.

Si dans la fonction Φ précédente, on attribue à a_1, \dots, a_n des valeurs déterminées, on a une intégrale commune des équations

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_m = a_m \quad (m < n),$$

qui contient encore $n - m + 1$ constantes arbitraires, $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{n+1}$; c'est donc une intégrale complète de ce système. D'ailleurs, c'est une véritable intégrale complète, car le système d'équations

$$s = \Phi, \quad p_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n},$$

est équivalent au système

$$s = \Phi, \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \quad \dots, \quad F_m = a_m, \quad F_{m+1} = a_{m+1}, \quad \dots, \quad F_n = a_n,$$

et il est clair que l'on ne peut éliminer $a_{m+1}, \dots, a_n, a_{n+1}$ entre les équations

$$s = \Phi, \quad F_{m+1} = a_{m+1}, \quad F_n = a_n.$$

Plus généralement, nous pourrions trouver une intégrale complète de tout système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(F_1, \dots, F_n) = 0, \\ \vdots \\ \phi_r(F_1, \dots, F_n) = 0, \end{array} \right.$$

si F_1, \dots, F_n forment un système en involution, car il suffit de poser

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_n = a_n.$$

les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ étant liées par les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \phi_r(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \end{array} \right.$$

pour avoir une intégrale complète du système proposé par une quadrature. Cette remarque s'appliquera, en particulier, chaque fois que F_1 ne dépend que de x_1 et p_1 , F_2 de x_2 et p_2 , etc..., F_n de x_n et p_n seulement.

61. Revenons au cas général. Nous pouvons conclure de ce qui précède que la recherche d'une intégrale complète du système en involution

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \quad \dots, \quad F_n = a_n, \quad (n \geq 2),$$

est ramené à la détermination de $n - m$ fonctions F_{m+1}, \dots, F_n ,
formant avec les premières un système en involution et telles que le
déterminant fonctionnel

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(p_1, \dots, p_n)}$$

ne soit pas identiquement nul.

La fonction F_{n+1} , par exemple, doit vérifier les n équations linéaires

$$(F_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (F_m, \Phi) = 0,$$

ces m équations forment un système complet. En effet, on a l'identité

$$((F_a, F_\beta), \Phi) + ((F_\beta, \Phi), F_a) + ((\Phi, F_a), F_\beta) = 0,$$

c'est-à-dire, puisque

$$(F_\alpha, F_\beta) = 0,$$

$$(F_\alpha, (F_\beta, \Phi)) - (F_\beta, (F_\alpha, \Phi)) = 0.$$

Poseons

$$(F_\alpha, \Phi) = X_\alpha(\Phi),$$

$$(F_\beta, \Phi) = X_\beta(\Phi),$$

l'identité précédente devient

$$X_\alpha(X_\beta(\Phi)) - X_\beta(X_\alpha(\Phi)) = 0,$$

ce qui démontre bien la proposition. Supposons alors qu'on ait déterminé une intégrale F_{m+1} de ce système complet, qui soit distincte de F_1, \dots, F_m , considérée comme fonction de p_1, \dots, p_n ; on cherchera ensuite une intégrale du système complet de $m+1$ équations.

$$(F_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (F_m, \Phi) = 0, \quad (F_{m+1}, \Phi) = 0,$$

qui soit distincte de F_1, \dots, F_{m+1} , en tant que fonction des p , et on continuera de la sorte. Enfin, quand on aura trouvé une intégrale du dernier système

$$(F_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (F_{n-1}, \Phi) = 0,$$

on aura une intégrale complète par une quadrature. En appliquant la méthode de Mayer, la recherche d'une intégrale du premier système complet exigera une opération d'ordre $2n - 2m$, car nous avons un système complet de m équations à $2n$ variables indépendantes dont nous connaissons m intégrales F_1, \dots, F_m . Nous aurons ensuite à faire successivement des opérations d'ordre $2n - 2m - 2$, $2n - 2m - 4$, ..., 4 , 2 et enfin une quadrature. En particulier, pour intégrer une seule équation, il faudra faire successivement des opérations d'ordre $2n - 2$, $2n - 4$, ..., 4 , 2 , tandis que la méthode de Cauchy exige que l'on fasse des opérations d'ordre $2n - 2$, $2n - 3$, $2n - 4$, ..., 3 , 2 , 1 . Dans la méthode de Cauchy, chaque intégrale nouvelle permet d'abaisser d'une unité l'ordre du système d'équations différentielles; avec la méthode de Jacobi et Mayer, chaque intégrale nouvelle permet d'abaisser de deux unités l'ordre du système d'équations différentielles dont on a à chercher une intégrale.

REMARQUE. — Dans la pratique, il arrive quelquefois qu'on peut simplifier les calculs précédents par différents artifices. Par exemple, étant donnée une équation de la forme

$$(A) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m) = 0,$$

où q_1, \dots, q_m désignent des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ toute intégrale du système

$$(B) \quad \begin{cases} q_1 = a_1, \dots, q_m = a_m \\ H = F(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n, a_1, \dots, a_m) = 0, \end{cases}$$

où a_1, \dots, a_m sont des constantes quelconques, satisfait évidemment à l'équation (A). Si ce système (B) est en involution, il admettra une intégrale complète avec $n - m$ constantes arbitraires et cette intégrale, dépendant en outre de a_1, \dots, a_m , sera une intégrale complète de l'équation proposée. Pour que le système (B) soit en involution, il faut et il suffit que l'on ait

$$(q_i, q_j) = 0, \quad (H, q_j) = 0.$$

C'est ce qui arrivera, par exemple, si q_1, \dots, q_m, H ne renferment que des couples de variables différents (x_i, p_i) . C'est à ce procédé que M. Imachenetsky (1) a donné le nom de *séparation des variables*. Prenons, par exemple, l'équation

$$F = \frac{p_1^2}{x_1} + p_1 x_1 \left(\frac{p_1}{x_1} + p_1 \right) + x_1^2 x_2 p_2^2 - p_1^2 x_2 = 0;$$

posons

$$\begin{aligned} p_1^2 x_2 &= a_1, & p_1 x_2 &= a_2, \\ H &= \frac{p_1^2}{x_1} + a_1 \frac{p_1}{x_1} + a_2 p_1 + a_1^2 x_2 - a_1 = 0, \end{aligned}$$

et nous avons un système en involution. Nous pourrions opérer avec ce système comme avec la première équation. Posons pour cela

$$\begin{aligned} \frac{p_1^2}{x_1} + a_1 \frac{p_1}{x_1} &= a_3, \\ a_2 p_1 + a_1^2 x_2 - a_1 + a_3 &= 0, \end{aligned}$$

(1) Imachenetsky, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 72.

on tire de là

$$p_1 = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 + 4a_1 x_1}}{2}, \quad p_2 = \frac{a_2}{x_1}, \quad p_3 = \frac{a_1 - a_2 - a_1 x_1}{a_1}, \quad p_4 = \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{x_1}}.$$

Une quadrature facile donne une intégrale complète

$$u = -\frac{a_2}{2} x_1 \pm \frac{1}{12a_1} (a_2^2 + 4a_1 x_1)^{3/2} + a_1 L x_1 + \frac{a_1 - a_2}{a_1} x_1 - \frac{a_1 x_1^2}{2} + 2\sqrt{a_1} \sqrt{x_1} + a_4.$$

62. Les paragraphes précédents contiennent l'exposition de la méthode de Jacobi sous sa forme générale. Nous allons maintenant faire connaître la marche même des opérations suivie par Jacobi.

LEMME. — Soient H_1, H_2, \dots, H_p p fonctions distinctes de x_1, x_2, \dots, x_n , p_1, p_2, \dots, p_p et telles que le déterminant

$$\frac{D(H_1, \dots, H_p)}{D(p_1, \dots, p_p)}$$

soit différent de 0; si on tire des équations

$$H_1 = a_1, \quad \dots, \quad H_p = a_p$$

p_1, p_2, \dots, p_p en fonction des autres variables,

$$p_i = \phi_i(p_{p+1}, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

et si on a identiquement

$$(H_i, H_k) = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, p),$$

on a aussi identiquement

$$(p_i - \phi_i, p_k - \phi_k) = 0.$$

On pourrait déduire ce résultat de ce qui précède; nous allons en donner une démonstration directe. Les fonctions ϕ_1, \dots, ϕ_p , satisfaisant à l'équation $H_i = a_i$, on en déduit, en différentiant par rapport à x_n

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_n} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial H_i}{\partial p_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_n} = 0,$$

ou, comme $\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial (\phi_1 - p_1)}{\partial x_1}$,

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{\mu-1} \frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial (p_i - \phi_i)}{\partial x_1}, \quad (i = 1, 2, \dots, \mu).$$

On trouve de même

$$\frac{\partial H_2}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{\mu-1} \frac{\partial H_2}{\partial p_i} \frac{\partial (p_i - \phi_i)}{\partial p_i},$$

($i = \mu + 1, \mu + 2, \dots, n$),

et il est évident que cette relation est encore exacte pour

$$i = 1, 2, \dots, \mu.$$

Écrivons les relations analogues pour H_p , formons l'expression

$$\frac{\partial H_p}{\partial p_i} \frac{\partial H_1}{\partial x_i} - \frac{\partial H_p}{\partial x_i} \frac{\partial H_1}{\partial p_i},$$

et sommons par rapport à i , il vient

$$0 = (H_p, H_1) = \sum_{i=1}^{\mu-1} \sum_{i=1}^{\mu-1} \frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial H_p}{\partial p_i} (p_i - \phi_i, p_i - \phi_i).$$

Le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(F_1, \dots, F_p)}{D(p_1, \dots, p_p)}$$

étant différent de zéro, on en conclut, comme plus haut, que l'on doit avoir

$$(p_1 - \phi_1, p_2 - \phi_2) = 0.$$

Cela posé, considérons le système en involution

$$(I) \quad p_1 - \phi_1 = 0, \quad p_2 - \phi_2 = 0, \quad \dots, \quad p_n - \phi_n = 0,$$

où $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ désignent des fonctions de $p_{\mu+1}, \dots, p_n, x_1, x_2, \dots, x_n$. D'après la méthode générale, on cherchera d'abord une intégrale du système

$$(p_1 - \phi_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (p_n - \phi_n, f) = 0,$$

et ainsi de suite. On arrivera enfin à un système d'équations donnant les valeurs de toutes les dérivées

$$p_1 - \Pi_1 = 0, \quad \dots, \quad p_n - \Pi_n = 0,$$

et tel que l'on ait

$$(p_1 - \Pi_1, p_2 - \Pi_2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_1} = 0,$$

et, par une quadrature, on aura une intégrale du système proposé dépendant de $n - m + 1$ constantes arbitraires, c'est-à-dire une intégrale complète de ce système.

En suivant la marche que nous venons d'indiquer, on a immédiatement des systèmes jacobiens réduits au plus petit nombre de variables possible.

EXEMPLE. — Considérons le système

$$F_1 = p_1 p_2 - x_1 x_2 = 0,$$

$$F_2 = p_1 p_3 - x_1 x_3 = 0.$$

Formons (F_1, F_2) :

$$(F_1, F_2) = -p_1 x_2 + p_2 x_1 + p_3 x_1 - p_1 x_3 = 0.$$

Cette nouvelle équation est distincte des deux précédentes. Le système de ces trois équations est équivalent au suivant :

$$p_1 = \frac{x_1 x_2}{p_2}, \quad p_2 = \frac{x_1 x_3}{p_1},$$

$$p_1 = \frac{p_1^2 x_1 + x_1 x_2 x_3 \pm (p_1^2 x_1 - x_1 x_2 x_3)}{2p_1 x_1}.$$

Considérons en particulier le système que l'on obtient en prenant le signe (—) dans la dernière équation, il s'écrit

$$p_1 - \frac{x_1 x_2}{p_2} = 0, \quad p_2 - \frac{x_1 p_1}{x_3} = 0, \quad p_3 - \frac{x_1 x_2}{p_1} = 0.$$

C'est un système en involution, il est aisé de s'en assurer. Nous

avons alors à chercher une intégrale du système linéaire jacobien

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{x_1 x_2}{p_1^2} \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_2}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{p_1}{x_1} \frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{x_1 x_2}{p_1^2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

Appliquons la méthode de Jacobi à ce système (§ 34). La première et la dernière équation admettent l'intégrale évidente $f = p_1$ et, en la substituant dans la seconde, le résultat est $\frac{p_1}{x_1}$; cherchons donc une intégrale de la seconde de la forme $f = \theta(p_1, x_2)$; θ devra satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$x_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + p_1 \frac{\partial \theta}{\partial p_1} = 0.$$

Le système

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dp_1}{p_1}$$

a pour intégrale $\frac{p_1}{x_1} = a$; par suite, on a

$$p_1 = ax_1, \quad p_2 = \frac{x_2}{a}, \quad p_3 = ax_3, \quad p_4 = \frac{x_4}{a},$$

ce qui donne l'intégrale complète

$$s = \frac{x_1 x_2}{a} + a x_3 x_4 + b.$$

63. Nous avons vu, dans ce qui précède, que l'intégration d'un système en involution

$$F_1 = 0, \quad \dots, \quad F_m = 0,$$

se ramenait à la détermination de fonctions $F_{m+1}, F_{m+2}, \dots, F_n$ des variables $x_1, x_2, \dots, x_m, p_1, \dots, p_m$ formant avec celles-ci un système

en involution et telles que le déterminant

$$R = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_p)}{D(p_1, p_2, \dots, p_p)}$$

soit différent de zéro. M. Mayer ⁽¹⁾ a montré que cette dernière restriction n'était pas nécessaire. Il s'appuie pour cela sur les remarques suivantes :

1° Considérons μ équations

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_\mu = a_\mu,$$

formant un système en involution, et telles que

$$\frac{D(F_1, \dots, F_\mu)}{D(p_1, \dots, p_\mu)} \neq 0.$$

On pourra les résoudre par rapport à p_1, \dots, p_μ et les mettre sous la forme

$$p_1 = \psi_1, \quad \dots, \quad p_\mu = \psi_\mu.$$

Soit H une fonction de x, p , telle que l'on ait

$$(F_i, H) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \mu),$$

et Φ ce que devient cette fonction quand on y remplace p_1, \dots, p_μ respectivement par ψ_1, \dots, ψ_μ , je dis qu'on aura

$$(p_i - \psi_i, \Phi) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \mu).$$

En effet, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{\mu} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i},$$

ce qui s'écrit

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{\mu} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial (p_j - \psi_j)}{\partial x_i},$$

et, de même,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} + \sum_{j=1}^{\mu} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial (p_j - \psi_j)}{\partial p_i}.$$

⁽¹⁾ Mayer, *Ueber eine Erweiterung der Liouville'schen Integrationsmethode* (Mathematische Annalen, t. VIII, p. 312).

D'ailleurs,

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} \frac{\partial (p_k - \phi_k)}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} \frac{\partial (p_k - \phi_k)}{\partial p_i},$$

donc

$$(F_s, H) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} (p_k - \phi_k, \Phi) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial p_l} (p_k - \phi_k, p_l - \phi_l).$$

Puisque, par hypothèse, on a

$$(F_s, F_p) = 0, \quad (F_s, H) = 0,$$

on en conclut d'abord que l'on a (§ 62)

$$(p_k - \phi_k, p_l - \phi_l) = 0,$$

et, par suite, on aura aussi

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} (p_k - \phi_k, \Phi) = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, \mu),$$

et enfin

$$(p_k - \phi_k, \Phi) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, \mu).$$

2° Supposons qu'on ait trouvé des fonctions F_{m+1}, \dots, F_n telles que si on les joint aux fonctions F_1, \dots, F_m , on ait un système en involution

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_m = a_m, \quad F_{m+1} = a_{m+1}, \quad \dots, \quad F_n = a_n,$$

et supposons qu'on ne puisse résoudre ce système par rapport à p_1, p_2, \dots, p_n . Imaginons, pour fixer les idées, qu'on puisse résoudre les μ équations

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_\mu = a_\mu, \quad (\mu \geq m),$$

par rapport à p_1, p_2, \dots, p_μ

$$p_1 - \phi_1 = 0, \quad \dots, \quad p_\mu - \phi_\mu = 0,$$

et qu'en portant les valeurs de p_1, \dots, p_μ dans $F_{\mu+1}, \dots, F_n$, ces équations deviennent

$$\Phi_{\mu+1} = a_{\mu+1}, \quad \dots, \quad \Phi_n = a_n$$

les fonctions $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_n$ ne contenant aucune des quantités p_{p+1}, \dots, p_n . Ces dernières équations pourront être résolues par rapport à x_{p+1}, \dots, x_n . On a, en effet, en vertu de ce qui précède,

$$(p_i - \phi_n \Phi_n) = 0;$$

les fonctions Φ_i satisfont par conséquent à un système jacobien résolu par rapport à $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_p}$; elles sont donc distinctes, considérées comme fonctions de x_{p+1}, \dots, x_n (§ 27). On en conclut qu'étant donné un système quelconque en involution de n équations distinctes, on peut toujours choisir un système de variables x_{p+1}, \dots, x_n tel qu'on puisse résoudre ce système d'équations par rapport à

$$p_1, \dots, p_p, \quad x_{p+1}, \dots, x_n.$$

Cela posé, imaginons que l'on fasse le changement de variables suivant. Prenons pour nouvelles variables indépendantes x_1, \dots, x_p que nous appellerons x'_1, \dots, x'_p , et p_{p+1}, \dots, p_n que nous remplacerons par x'_{p+1}, \dots, x'_n , et pour nouvelle fonction

$$s' = s - p_{p+1} x_{p+1} - \dots - p_n x_n,$$

on aura

$$\begin{aligned} ds' &= dz - p_{p+1} dx_{p+1} - \dots - p_n dx_n \\ &\quad - dp_{p+1} x_{p+1} - \dots - dp_n x_n \\ &= p_1 dx'_1 + p_2 dx'_2 + \dots + p_p dx'_p \\ &\quad - x'_{p+1} dx'_{p+1} - \dots - x'_n dx'_n, \end{aligned}$$

on en conclut qu'il faudra poser

$$p_1 = p'_1, \dots, p_p = p'_p, \quad x_{p+1} = -p'_{p+1}, \dots, x_n = -p'_n,$$

p'_1, \dots, p'_n désignant les dérivées de s' par rapport à x'_1, \dots, x'_n . Le système proposé, par ce changement de variables, sera remplacé par le système

$$F'_1 = a_1, \quad \dots, \quad F'_n = a_n,$$

qui sera en involution, car on aura identiquement

$$(F'_1, F'_2) = (F'_1, F'_2),$$

et, de plus, pourra être résolu par rapport à p'_1, p'_2, \dots, p'_n . On aura

donc trouver une intégrale complète du système $F'_1 = \alpha_1, \dots, F'_n = \alpha_n$, et la transformation inverse donnera une intégrale complète du système proposé. Il est à remarquer, d'ailleurs, qu'en appliquant la méthode de Jacobi comme nous l'avons exposée (§ 62), ce cas ne se présentera pas.

Le même raisonnement prouve que, si on a un système en involution de μ équations distinctes ($\mu < n$), on peut toujours, par la transformation précédente, le ramener à un système en involution de μ équations pouvant être résolues par rapport à μ des quantités p .

64. Considérons une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F_1 = \alpha_1,$$

ne contenant pas la fonction inconnue z . Nous avons vu qu'à une quadrature près son intégration est équivalente à celle de l'équation linéaire

$$(F_1, \Phi) = 0$$

à $2n$ variables. D'autre part, nous savons aussi, d'après ce qui précède, que si F_2, F_3, \dots, F_n sont des fonctions distinctes telles que l'on ait

$$(F_1, F_i) = 0, \quad (F_i, F_k) = 0, \quad (i, k = 2, \dots, n),$$

on a une intégrale complète de $F_1 = \alpha_1$ et, par suite, l'intégrale générale de $(F_1, \Phi) = 0$ par une quadrature; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — Si on connaît, outre l'intégrale F_1 , $(n - 1)$ intégrales distinctes F_2, F_3, \dots, F_n de l'équation $(F_1, \Phi) = 0$ satisfaisant aux conditions

$$(F_i, F_k) = 0, \quad (i, k = 2, \dots, n),$$

on aura l'intégrale générale de cette équation par une seule quadrature.

Ce théorème porte souvent le nom de *théorème de Liouville* ⁽¹⁾.

(1) *Journal de Liouville*, 1^{re} série, t. XX, p. 121.

63. La méthode de Jacobi et Mayer s'étend, sans modification essentielle, aux systèmes d'équations où figure la fonction inconnue z . Il suffit de remplacer les parenthèses par les expressions $[U, V]$ définies plus haut. Étant donné un système d'équations

$$(9) \quad H_1 = 0, \quad \dots, \quad H_m = 0,$$

entre $z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, le problème de l'intégration pourra être posé ainsi : Trouver $n - m + 1$ autres fonctions $H_{m+1}, \dots, H_n, H_{n+1}$, telles que les valeurs de z, p_1, \dots, p_n déduites des $n + 1$ équations

$$H_1 = 0, \quad \dots, \quad H_m = 0, \quad \dots, \quad H_{n+1} = 0,$$

vérifient les relations

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}.$$

Si chacune des fonctions $H_{m+1}, \dots, H_n, H_{n+1}$ contient une constante arbitraire, on aura une intégrale complète.

THEOREME. — Si une fonction z satisfait aux deux équations

$$F = 0, \quad H = 0,$$

elle satisfait aussi à l'équation du premier ordre

$$[F, H] = 0.$$

Supposons d'abord que z, p_1, \dots, p_n soient des fonctions quelconques de x_1, \dots, x_n vérifiant ces deux équations. On aura

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z} p_i + \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} - p_i \right) + \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0,$$

ou, en posant

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{dF}{dx_i} + \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} - p_i \right) + \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0.$$

Multiplions par $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ et sommions par rapport à i , puis permutons H

et F ainsi que les indices i et k dans la somme double; en retranchant les deux équations obtenues, on parvient à la relation

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} [H, F] + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} - p_i \right) \\ + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si z désigne une intégrale commune aux équations $H = 0$, $F = 0$ et p_1, \dots, p_n ses dérivées, on a

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} - p_i = 0, \quad \frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = 0, \\ (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

et, par suite,

$$[H, F] = 0.$$

On pourra donc adjoindre au système (9) toutes les équations

$$[H_i, H_k] = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, m),$$

qui ne sont pas des conséquences algébriques des premières, et recommencer les opérations sur ce nouveau système. Mais on peut toujours conduire les calculs de façon à arriver soit à un système incompatible, soit à un système en involution, c'est-à-dire à un système pour lequel tous les crochets sont identiquement nuls. Résolvons, en effet, les m équations (9) par rapport à z et $(m-1)$ des dérivées, ce qui doit être possible, car, sans cela, du système proposé on pourrait déduire une ou plusieurs équations ne contenant ni z ni ses dérivées. Soient

$$z = \phi, \quad p_1 = \phi_1, \quad \dots, \quad p_{m-1} = \phi_{m-1}$$

ces équations résolues; $\phi, \phi_1, \dots, \phi_{m-1}$ ne dépendent que de $p_m, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$. Le système

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} z - \phi - x_1 (p_1 - \phi_1) - \dots - x_{m-1} (p_{m-1} - \phi_{m-1}) &= 0, \\ p_1 - \phi_1 &= 0, \quad \dots, \quad p_{m-1} - \phi_{m-1} = 0 \end{aligned} \right.$$

sera équivalent au système (9), et il est aisé de voir que tous les

crochets

$$[p_i - \phi_i, p_i - \phi_i]$$

et

$$[z - \phi - x_1 (p_1 - \phi_1) - \dots - x_{n-1} (p_{n-1} - \phi_{n-1}), p_i - \phi_i]$$

ne contiennent aucune des quantités z, p_1, \dots, p_{n-1} . Les équations que l'on obtient en égalant ces crochets à 0 ne pourront donc être des conséquences des précédentes que si elles sont identiquement vérifiées. En continuant de la sorte, on arrivera donc soit à un système incompatible, soit à un système en involution.

THÉORÈME. — Soit

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = a_2, \quad \dots, \quad H_{n+1} = a_{n+1}$$

un système en involution de $(n + 1)$ équations, tel que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(H_1, H_2, \dots, H_{n+1})}{D(z, p_1, \dots, p_n)}$$

ne soit pas nul; les valeurs de z, p_1, \dots, p_n tirées de ces équations satisfont aux relations

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

En effet, les équations (10) deviennent ici, puisque $[H_i, H_j] = 0$,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial H_i}{\partial z} \frac{\partial H_j}{\partial p_i} - \frac{\partial H_i}{\partial p_i} \frac{\partial H_j}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} - p_i \right) + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \frac{\partial H_j}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \right) = 0,$$

et on en conclut, par un raisonnement tout pareil à celui qui a déjà été employé (§ 60), que l'on a

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} - p_i = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0.$$

La valeur de z tirée de ces équations est donc une intégrale du système qu'elles forment. En particulier, z sera une intégrale du

système

$$H_1 = a_1, \quad \dots, \quad H_m = a_m, \quad (m < n + 1)$$

tiré du précédent. D'ailleurs, comme s contient les $(n - m + 1)$ constantes arbitraires a_{m+1}, \dots, a_{n+1} , c'est une intégrale complète de ce système.

Pour intégrer le système en involution

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad \dots, \quad H_m = 0,$$

on est donc ramené à déterminer $(n - m + 1)$ fonctions H_{m+1}, \dots, H_{n+1} qui forment avec ce système un système en involution. Pour cela, considérons le système d'équations linéaires

$$[H_1, \Phi] = 0, \quad [H_2, \Phi] = 0, \quad \dots, \quad [H_m, \Phi] = 0.$$

On a, comme nous l'avons vu (§ 55),

$$\begin{aligned} & [[H_1, H_2], \Phi] + [[H_2, \Phi], H_1] + [[\Phi, H_1], H_2] \\ &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} [H_1, H_2] - \frac{\partial H_1}{\partial z} [H_2, \Phi] - \frac{\partial H_2}{\partial z} [\Phi, H_1]. \end{aligned}$$

Poseons

$$\begin{aligned} [H_1, \Phi] &= X(\Phi), \\ [H_2, \Phi] &= Y(\Phi), \end{aligned}$$

l'identité précédente devient, puisque $[H_1, H_2] = 0$,

$$Y(X(\Phi)) - X(Y(\Phi)) = -\frac{\partial H_1}{\partial z} Y(\Phi) + \frac{\partial H_2}{\partial z} X(\Phi).$$

Ceci nous prouve que les équations linéaires $[H_i, \Phi] = 0$ forment un système complet. Pour trouver une intégrale de ce système de m équations à $2n + 1$ variables, dont on connaît m intégrales, on aura à effectuer une opération d'ordre $2n - 2m + 1$. Soit H_{m+1} une intégrale de ce système; on cherchera ensuite une intégrale du système

$$[H_1, \Phi] = 0, \quad \dots, \quad [H_{m+1}, \Phi] = 0,$$

et ainsi de suite. On aura ainsi à faire successivement des opérations d'ordre

$$2n - 2m + 1, \quad 2n - 2m - 1, \quad \dots, \quad 5, 3, 1.$$

EXEMPLE. — Considérons le système

$$F(p, q, z - px - qy) = 0, \quad F_1(p, q, z - px - qy) = 0;$$

on reconnaît aussitôt que les trois équations

$$p = a_1, \quad q = a_2, \quad z - px - qy = a_3$$

forment un système en involution. On aura donc une intégrale complète du système proposé $z = a_1 x + a_2 y + a_3$, pourvu que les constantes a_1, a_2, a_3 vérifient les deux relations

$$F(a_1, a_2, a_3) = 0, \quad F_1(a_1, a_2, a_3) = 0.$$

Du reste, la théorie géométrique de ce système est très facile à faire; on a une intégrale de chacune des deux équations en prenant les plans tangents à deux surfaces Σ_1, Σ_2 respectivement. Tout plan tangent commun à ces deux surfaces donnera donc une intégrale complète du système proposé. L'intégrale générale se confond ici avec l'intégrale complète et il y a une intégrale singulière, la développable circonscrite aux deux surfaces Σ_1 et Σ_2 .

REMARQUE. — Comme dans le cas précédent, on pourrait montrer qu'il n'est pas nécessaire de pouvoir résoudre les équations

$$H_1 = a_1, \quad \dots, \quad H_{n+1} = a_{n+1},$$

par rapport à z, p_1, p_2, \dots, p_n . Il suffit que ces $n + 1$ fonctions soient distinctes. On remarque d'abord que si on a un système en involution de $n + 1$ équations distinctes, l'une au moins de ces équations contiendra z ; autrement, on aurait un système complet de n équations à $2n$ variables admettant $n + 1$ intégrales distinctes. Tirant z de l'une de ces équations et portant dans les autres, on sera conduit à un système en involution $F_1 = 0, \dots, F_n = 0$, ne contenant pas z ; le raisonnement s'achève comme au § 63.

66. Supposons qu'on veuille intégrer une seule équation

$$H_1 = a_1.$$

L'intégration de cette équation revient à celle de l'équation linéaire

$$[H_1, \Phi] = 0.$$

Or, si nous pouvons déterminer n intégrales distinctes H_1, \dots, H_{n+1} , de cette équation, telles que tous les crochets

$$[H_i, H_k], \quad (i, k = 1, 2, \dots, n+1)$$

soient nuls, nous venons de voir que l'intégrale générale s'obtiendra par des opérations algébriques. Ceci fournit une généralisation du théorème de Liouville.

THÉORÈME. — Si on connaît n intégrales distinctes H_1, \dots, H_{n+1} , différentes de H_1 , de l'équation linéaire

$$[H_1, \Phi] = 0,$$

satisfaisant aux relations

$$[H_i, H_k] = 0, \quad (i, k = 2, 3, \dots, n+1),$$

on aura l'intégrale générale de cette équation par des opérations ALGÈBRIQUES.

67. Si, en appliquant la méthode précédente à un système en involution de n équations, on est arrivé à un système en involution de n équations

$$H_1 = a_1, \quad \dots, \quad H_n = a_n,$$

tel que le déterminant fonctionnel $\frac{D(H_1, \dots, H_n)}{D(p_1, \dots, p_n)}$ ne soit pas identiquement nul, au lieu de chercher la dernière fonction H_{n+1} , on peut résoudre ces n équations par rapport à p_1, \dots, p_n et les valeurs ainsi obtenues rendent l'équation

$$dz = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$$

complètement intégrable. En effet, des équations $H_1 = 0, H_2 = 0$, on déduit, par un calcul tout pareil aux précédents, la relation

$$[H_1, H_2] + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial H_2}{\partial p_k} \left(\frac{dp_k}{dx_i} - \frac{dp_i}{dx_k} \right) = 0,$$

et ces relations nous donnent, puisque $[H_1, H_2] = 0$,

$$\frac{dp_k}{dx_i} = \frac{dp_i}{dx_k}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

On reconnaît sous cette forme la généralisation immédiate de la méthode de Lagrange et Charpit.

REMARQUE. — Si on applique la méthode de Jacobi et Mayer, sous sa forme générale, à une équation $F_1 = 0$, on obtient non seulement une intégrale complète de l'équation proposée, mais une intégrale complète de l'équation plus générale $F_1 = \alpha_1$, où α_1 est une constante quelconque. Il semble donc que cette méthode est moins directe que celle de Cauchy; mais il est facile de lever la difficulté. En effet, dans toute équation du premier ordre, on peut introduire une constante arbitraire sans compliquer l'intégration. Si par exemple l'équation contient z , il n'y aura qu'à changer z en $z + \alpha$; si l'équation ne contient pas z , on changera z en $z + \alpha x_1$, ce qui revient à remplacer p_1 par $p_1 + \alpha$. De même, si on a un système en involution tel que

$$\begin{aligned} z - \phi - (p_1 - \phi_1)x_1 - \dots - (p_{n-1} - \phi_{n-1})x_{n-1} &= 0, \\ p_1 - \phi_1 &= 0, \quad \dots, \quad p_{n-1} - \phi_{n-1} = 0, \end{aligned}$$

où $\phi, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ sont des fonctions de $p_2, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n$, en changeant z en $z + \alpha + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$, on sera conduit à un nouveau système en involution contenant n constantes arbitraires

$$\begin{aligned} z + \alpha - \phi - x_1(p_1 - \phi_1) - \dots - x_{n-1}(p_{n-1} - \phi_{n-1}) &= 0, \\ p_1 + \alpha_1 - \phi_1 &= 0, \quad \dots, \quad p_{n-1} + \alpha_{n-1} - \phi_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Cette remarque nous sera très utile dans la suite.

Exercices.

Appliquer la méthode de Jacobi aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad p_1 + (3x_1 + 2x_2)p_2 + (4x_1 + 5x_2)p_3 \\ + [x_1 + x_2(p_2 - p_3)]p_4 + \frac{x_1 p_1^2}{p_4} = 0; \end{aligned}$$

(ИЗЧИСЛЕНИЯ.)

$$2^\circ \quad (\alpha_1 p_1 + x_1 p_2)x_1 + p_1(p_1 - p_2)[p_1^2 + (p_2 + x_1)(p_3 + x_2)p_4] = \alpha_2;$$

(ИЗЧИСЛЕНИЯ.)

$$3^{\circ} \quad x_1^2(p_1 + p_2) + 2x_1x_2p_3 + bp_3 \log\left(-\frac{p_2}{p_1}\right) - bp_3 \log x_1^2 + ap_3 = 0;$$

(LAPLACE.)

$$4^{\circ} \quad z = f(p_1, p_2, \dots, p_n);$$

$$5^{\circ} \quad (x_1p_1 + x_2p_2)x_3 + ap_3(p_1 - p_2) - 1 = 0;$$

$$6^{\circ} \quad p_1x_1^2 = p_1^2 + ap_1^2;$$

$$7^{\circ} \quad x_1p_1^2 + x_2p_2^2 + x_3p_3^2 = p_1p_2p_3;$$

$$8^{\circ} \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = x_1^2 + x_2x_3 + x_1^2 + x_2x_3 + a_1x_3 + x_3^2;$$

$$9^{\circ} \quad p_1 + \frac{1}{2}p_2^2 + p_3x_1x_2 + p_3x_1x_3 = 0;$$

$$10^{\circ} \quad x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_2p_1p_2 + x_3p_1p_2 = 0;$$

$$11^{\circ} \quad p_1p_2p_3 = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3;$$

$$12^{\circ} \quad x_1p_1 + x_2p_2 + (p_1 - p_2)(p_3 + a_2)(p_1 + a_2) = 1;$$

$$13^{\circ} \quad p_1p_2p_3 + a_1a_2a_3(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) = a_1a_2p_1p_2 \\ + a_2a_3p_2p_3 + a_1a_3p_1p_3;$$

$$14^{\circ} \quad a_1(x_1p_1 - x_2p_2)^2 + a_2(x_2p_2 - x_3p_3)^2 + a_3(x_3p_3 - x_1p_1)^2 = 1.$$

(SCHLAFLI.)

CHAPITRE VIII

Méthode de Lie.

§2. On doit à M. Lie ⁽¹⁾ une nouvelle méthode d'intégration qui se rattache de la façon la plus naturelle aux méthodes précédentes, dont elle est en quelque sorte la synthèse. M. Lie a été conduit à cette méthode par la théorie générale des caractéristiques. Nous allons donner, dans ce chapitre, une démonstration, due à Mayer ⁽²⁾, du théorème fondamental de Lie.

Considérons un système en involution ne contenant pas la fonction inconnue V

[illegible]

Ce système étant en involution, on a identiquement, en remplaçant

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} \text{ per } p_1,$$

$$(p_i - F_i, p_k - F_k) = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, m).$$

Pour intégrer ce système par la méthode de Jacobi et Mayer, il

(*) **Lie, Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Mathematische Annalen, t. IX, p. 245-300).**

(b) Mayer, *Directe Ableitung der Lies'schen Fundamentalsysteme durch die Methode von Cauchy* (Mathematische Annalen, I. VI, p. 102-103).

faudra commencer par chercher une intégrale, indépendante de p_1, \dots, p_m du système jacobien

$$(p_1 - F_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (p_m - F_m, f) = 0,$$

qui, développé, s'écrit

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} + \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial x_m} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_m} \right\} = 0. \end{cases}$$

Imaginons qu'on applique à ce système la méthode de Mayer (§ 30); on posera

$$x_1 = x_1^0 + t, \quad x_2 = x_2^0 + t y_1, \quad \dots, \quad x_m = x_m^0 + t y_m,$$

t, y_1, \dots, y_m désignant les nouvelles variables, et on sera ramené à chercher une intégrale du nouveau système jacobien

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y_1} + t \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial H_i}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_m} + t \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial H_i}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = 0, \end{cases}$$

où H_1, H_2, \dots, H_m désignent ce que deviennent F_1, F_2, \dots, F_m par le changement de variables précédent, et où on a posé

$$\mathcal{F} = H_1 + y_1 H_2 + \dots + y_m H_m.$$

Nous savons que pour avoir une intégrale du système (3), il suffit d'avoir une intégrale de la première équation de ce système.

Faisons le même changement de variables dans les équations (1), elles prendront la forme

$$(4) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \mathcal{F}, \quad \frac{\partial V}{\partial y_1} = t H_1, \quad \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial y_m} = t H_m,$$

et on voit immédiatement que le système jacobien (3) joue le même rôle, par rapport au système (4), que le système (2) par rapport au système (1). Il suit de là que, soit que l'on veuille intégrer le système en involution (4), soit que l'on veuille intégrer l'équation unique

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \mathcal{F},$$

la première opération à effectuer sera la même dans les deux cas : on aura à chercher une intégrale de l'équation linéaire

$$(p_1 - \mathcal{F}, f) = 0,$$

qui est la première des équations (3). Mais l'analogie entre les deux problèmes ne s'arrête pas là. Nous allons montrer en effet que, si on a intégré l'équation à $n - m + 1$ variables

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \mathcal{F} = 0,$$

on en déduira immédiatement une intégrale complète du système (4).

D'une façon plus précise, nous allons montrer que l'intégrale de cette équation, qui, pour $t = 0$, se réduit à

$$a_{m+1}x_{m+1} + \dots + a_nx_n,$$

vérifie les autres équations (4). Imaginons qu'on applique la première méthode de Jacobi à l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \mathcal{F}(t, y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n, p_{m+1}, \dots, p_n),$$

on intégrera le système d'équations différentielles

$$(5) \quad \frac{dx_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_k}, \quad (k = m+1, \dots, n).$$

Soit

$$(6) \quad \begin{cases} x_k = \varphi_k(t, y_1, \dots, y_m, a_{m+1}, \dots, a_n, b_{m+1}, \dots, b_n), \\ p_k = \psi_k(t, y_1, \dots, y_m, a_{m+1}, \dots, a_n, b_{m+1}, \dots, b_n) \end{cases}$$

l'intégrale générale de ce système, où $a_{m+1}, \dots, a_n, b_{m+1}, \dots, b_n$

désignent les valeurs initiales de $p_{n+1}, \dots, p_n, x_{n+1}, \dots, x_n$ pour $t = 0$; l'expression

$$V = \sum_{n+1}^{\infty} a_i b_i + \int_0^t \left(\mathcal{F} - \sum_{n+1}^{\infty} p_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i} \right) dt$$

sera l'intégrale de l'équation $\frac{\partial V}{\partial t} = \mathcal{F}$, qui, pour $t = 0$, se réduit à $a_{n+1} x_{n+1} + \dots + a_n x_n$, si on l'exprime au moyen des variables indépendantes t, x_i, a_i . Pour plus de clarté, désignons par W ce que devient la fonction V quand on y remplace b_{n+1}, \dots, b_n par leurs valeurs tirées des formules (6). Nous allons montrer que cette fonction W satisfait aux équations (4). On a, puisque V se déduit de W en y remplaçant x_{n+1}, \dots, x_n par les valeurs (6)

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = \frac{\partial W}{\partial y_i} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_i}.$$

D'ailleurs, V étant une fonction de t, y_i, a_i et b_i ,

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = \int_0^t \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_i} + \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_i} - p_i \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i} \right) \right) \right\} dt,$$

et, en tenant compte des équations (5),

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y_i} &= \int_0^t \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_i} dt + \int_0^t \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{dp_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial y_i} + p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial y_i} \right) dt \\ &= \int_0^t \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_i} dt + \sum_{n+1}^{\infty} \left[p_i \frac{\partial x_i}{\partial y_i} \right]. \end{aligned}$$

Comme, pour $t = 0$, x_i se réduit à b_i , on en conclut que

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} = \int_0^t \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_i} dt + \sum_{n+1}^{\infty} \left(p_i - \frac{\partial W}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial y_i},$$

et, puisque W est une intégrale de la première des équations (4),

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = p_i;$$

il reste

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} = \int_0^t \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_i} dt.$$

D'un autre côté, puisque le système (4) est en involution, on a

$$(p_1 - \mathcal{F}, p_1 - t H_1) = 0,$$

ce qui s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1} - \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=2}^n \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_1} \frac{\partial f_i}{\partial p_i} \right\} = 0,$$

en posant

$$f_1 = t H_1.$$

En remplaçant x_1 et p_1 par les expressions (6), qui sont les intégrales des équations (5), il vient

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=2}^n \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_i}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} \right\} = \frac{df_1}{dt},$$

et on a la relation qu'il fallait démontrer

$$\frac{\partial W}{\partial y_1} = \int_0^1 \frac{df_1}{dt} dt = [f_1]_0 = t H_1.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition générale suivante :

THÉORÈME. — *L'intégration d'un système en involution de m équations à n variables indépendantes se ramène à l'intégration d'une équation unique à $n - m + 1$ variables indépendantes.*

REMARQUE. — Dans la démonstration du théorème précédent, nous ne nous sommes servis que des relations

$$(p_1 - \mathcal{F}, p_1 - t H_1) = 0,$$

mais nous n'avons pas utilisé les autres équations

$$(p_1 - t H_1, p_2 - t H_2) = 0,$$

qui expriment que le système (4) est en involution. Cette conclusion peut sembler paradoxale, mais il est facile de voir que les dernières relations sont des conséquences des premières. En effet, de l'identité fondamentale

$$\begin{aligned} (p_1 - \mathcal{F}, (p_1 - t H_1, p_2 - t H_2)) + (p_1 - t H_1, (p_2 - t H_2, p_1 - \mathcal{F})) \\ + (p_2 - t H_2, (p_1 - \mathcal{F}, p_1 - t H_1)) = 0, \end{aligned}$$

on conclut que la parenthèse $(p_1 - tH_1, p_2 - tH_2)$ est une intégrale de l'équation linéaire

$$(p_1 - \mathcal{F}, f) = 0;$$

or, tous les termes de cette parenthèse contiennent t en facteur. Cette intégrale doit donc s'annuler pour $t = 0$ et, d'après le théorème général de Cauchy, l'équation linéaire précédente n'admet pas d'autre intégrale que $f = 0$ qui soit nulle pour $t = 0$. Il faut donc que la parenthèse soit identiquement nulle.

69. Le théorème fondamental de Lie permet de compléter sur un point essentiel la méthode de Jacobi et Mayer. Supposons, en effet, que dans l'application de cette méthode on arrive à un système en involution tel que le système (1), pour lequel on sache intégrer complètement le système jacobien correspondant (2). L'intégration du système (1) est alors ramenée à une quadrature. En effet, si on connaît l'intégrale générale du système (2), on aura aussi l'intégrale générale du système (3) et, en particulier, de la première équation de ce système, ou, ce qui revient au même, des équations différentielles

$$(5) \quad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_1}.$$

Or, nous venons de voir que, si on connaît l'intégrale générale de ce système, on en déduit par une quadrature une intégrale complète du système (4) et, par suite, du système (1).

On voit donc que, dans l'application de la méthode de Jacobi et Mayer, on peut s'arrêter toutes les fois que l'on arrive à un système jacobien que l'on sait intégrer complètement. Cette méthode comprend à la fois la méthode de Cauchy et celle de Jacobi comme cas particulier. L'intégration étant commencée par la méthode de Jacobi, on peut s'arrêter quand on veut et ramener le système en involution obtenu à une équation unique au moyen du théorème fondamental de Lie.

70. Voici maintenant la nouvelle méthode d'intégration que M. Lie a déduite de son théorème. Le système en involution proposé étant ramené à une équation unique à n variables indépendantes

$$(7) \quad p_1 - f = 0,$$

on cherchera une intégrale de l'équation linéaire

$$(p_1 - f, \varphi) = 0.$$

Soit φ_1 cette intégrale; le système en involution

$$(8) \quad p_1 - f = 0, \quad \varphi_1 = a_{10}$$

peut, d'après ce qui précède, être ramené à une équation unique à $n - 1$ variables

$$(9) \quad p_1^{(1)} - f^{(1)} = 0.$$

De toute intégrale complète de cette nouvelle équation, on veut, en effet, déduire par des opérations algébriques une intégrale complète du système (8) et, par suite, de l'équation (7). On cherchera ensuite une intégrale φ_2 de l'équation linéaire

$$(p_1^{(1)} - f^{(1)}, \varphi) = 0,$$

et on ramènera le système en involution

$$p_1^{(1)} - f^{(1)} = 0, \quad \varphi_2 = a_{20}$$

à une équation unique à $n - 2$ variables

$$p_1^{(2)} - f^{(2)} = 0,$$

et ainsi de suite. Après $n - 1$ opérations de ce genre, on sera ramené à une équation

$$p_1^{(n-1)} - f^{(n-1)} = 0,$$

à une variable indépendante seulement. De l'intégrale générale de cette équation différentielle ordinaire, on déduira ensuite, en remontant de proche en proche, une intégrale complète de chacune des équations intermédiaires et, par suite, de l'équation (7).

Chaque intégrale nouvelle diminuant le nombre des variables indépendantes d'une unité, l'ordre de l'équation linéaire correspondante sera diminué de deux unités. On voit facilement, d'après cela, que la méthode de Lie exige le même nombre d'opérations que la méthode de Jacobi et Mayer. L'application de cette méthode donne encore lieu aux remarques suivantes :

1° On voit immédiatement qu'à chaque instant de l'opération on

pourra abandonner la méthode de Lie et appliquer celle de Cauchy si elle est plus avantageuse. Car, si on a obtenu une intégrale complète de l'équation $p_1^{(n)} - f^{(n)} = 0$, on en déduira encore, en remontant de proche en proche, une intégrale complète de chacune des équations précédentes.

2° Si on a déterminé s intégrales distinctes ϕ_1, \dots, ϕ_s de l'équation

$$(p_1^{(n)} - f^{(n)}, \phi) = 0,$$

on pourra diminuer de s unités le nombre des variables indépendantes pourvu que ces intégrales vérifient les relations

$$(\phi_i, \phi_k) = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, s).$$

En effet, le théorème fondamental de Lie peut être généralisé comme il suit : *Étant donné un système en involution de m équations à n variables indépendantes*

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_m = a_m,$$

si on connaît s intégrales F_{m+1}, \dots, F_{m+s} du système complet

$$(F_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (F_m, \Phi) = 0,$$

formant avec F_1, \dots, F_m un système de $m + s$ fonctions distinctes et telles que l'on ait

$$(F_{m+i}, F_{m+k}) = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, s),$$

l'intégration du système proposé se ramène à l'intégration d'une équation unique à $n - m - s + 1$ variables indépendantes (1).

Pour avoir une intégrale complète du système proposé, il suffit en effet d'avoir une intégrale complète du système en involution

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_m = a_m, \quad F_{m+1} = a_{m+1}, \quad \dots, \quad F_{m+s} = a_{m+s};$$

si ces équations peuvent être résolues par rapport à $(m + s)$ des variables p_i la proposition est établie (§ 68); s'il n'en est pas ainsi, on a vu au chapitre précédent qu'on pourrait toujours les résoudre par rapport à μ des variables p et $s - \mu$ des variables x

$$p_{\sigma_1}, \quad \dots, \quad p_{\sigma_\mu}, \quad x_{\rho_1}, \quad \dots, \quad x_{\rho_{s-\mu}}$$

(1) Mayer, *Mathematische Annalen*, t. VIII, p. 212.

les nombres α_i et β_i étant différents. Par une transformation déjà employée (§ 63), on ramènera ce cas au précédent.

71. Nous indiquerons, en terminant, une autre méthode que l'on pourrait suivre pour établir le théorème fondamental de Lie, en le rattachant aux théorèmes généraux de Cauchy. Reprenons le système (1)

$$(1) \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = F_1, \quad \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} = F_n,$$

et supposons que les seconds membres de ces équations soient holomorphes au voisinage du point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, p_{n+1}^0, \dots, p_n^0$. Soit, d'autre part, $\Phi(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_n)$ une fonction quelconque des variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_n$ holomorphe, dans le voisinage du point $x_{n+1}^0, x_{n+2}^0, \dots, x_n^0$ et telle que l'on ait

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}^0} = p_{n+1}^0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_n^0} = p_n^0.$$

Cherchons s'il existe une intégrale V des équations (1), holomorphe au voisinage du point $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, et se réduisant à $\Phi(x_{n+1}, \dots, x_n)$ pour $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$. S'il existe une telle intégrale, on connaît les valeurs initiales de toutes les dérivées partielles de V où ne figure aucune des variables x_1, x_2, \dots, x_n . D'ailleurs, en différentiant les équations (1), on pourra exprimer toutes les autres dérivées partielles en fonction des précédentes. Mais, ici, il y aura plusieurs manières de calculer une même dérivée; ainsi, on pourra calculer de deux façons différentes $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}$ en partant des deux

équations $\frac{\partial V}{\partial x_1} = F_1$ et $\frac{\partial V}{\partial x_2} = F_2$. En écrivant que les deux expressions ainsi obtenues pour $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}$ sont égales, on trouve la condition

$$(p_1 - F_1, p_2 - F_2) = 0,$$

qui est vérifiée puisque le système (1) est en involution. On voit alors aisément que, si le système est en involution, on n'obtiendra, par les dérivations, qu'une seule valeur bien déterminée pour chacune des dérivées. Si donc il existe une intégrale V satisfaisant aux

conditions énoncées, il en existe une seule et les coefficients de son développement seront bien déterminés par les équations (1) jointes aux conditions initiales. Admettons que le développement ainsi obtenu soit convergent; nous pouvons énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Étant donné un système en involution de m équations*

$$p_1 = F_1, \dots, p_m = F_m,$$

où les fonctions F_1, \dots, F_m sont holomorphes dans le voisinage des valeurs $x_1^0, \dots, x_n^0, p_{m+1}^0, \dots, p_n^0$, il existe une intégrale de ce système, holomorphe dans le domaine du point x_1^0, \dots, x_n^0 , et se réduisant pour $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$, à une fonction arbitraire

$$\Phi(x_{m+1}, \dots, x_n),$$

holomorphe pour

$$x_{m+1} = x_{m+1}^0, \dots, x_n = x_n^0,$$

p_{m+1}^0, \dots, p_n^0 désignant les dérivées

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+1}^0}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n^0}.$$

La convergence de ce développement se démontrerait sans doute aisément par les méthodes de M^{me} de Kowalewski. Le théorème sera d'ailleurs établi plus loin par d'autres considérations.

Cela posé, faisons dans le système (1) le changement de variables

$$x_1 = x_1^0 + t, \quad x_2 = x_2^0 + t y_1, \quad \dots, \quad x_n = x_n^0 + t y_m;$$

on obtient un système équivalent

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = F_1 + y_1 F_2 + \dots + y_m F_m, \\ \frac{\partial V}{\partial y_1} = t F_1, \quad \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial y_m} = t F_m; \end{cases}$$

d'après ce qui précède, ce système admet une intégrale qui, pour $t = 0$, se réduit à $\Phi(x_{m+1}, \dots, x_n)$. Or la première équation de ce système admet une seule intégrale satisfaisant à cette condition. Par consé-

quant, toute intégrale de l'équation

$$(10) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = F_1 + y_1 F_2 + \dots + y_n F_m$$

qui, pour $t = 0$, se réduit à une fonction des seules variables x_{n+1}, \dots, x_n , vérifie aussi les autres équations du système (9). C'est la généralisation de la proposition établie pour les systèmes jacobiens (§ 30).

Pour avoir l'intégrale considérée par Mayer, il suffit de prendre l'intégrale de l'équation (10) qui, pour $t = 0$, se réduit à

$$a_{n+1} x_{n+1} + \dots + a_n x_n.$$

CHAPITRE IX

Étude géométrique des équations à trois variables.

Courbes intégrales. Solutions singulières (1).

72. Reprenons une équation aux dérivées partielles du premier ordre entre une fonction z et deux variables indépendantes x et y

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Une telle équation exprime une relation entre un point d'une surface et le plan tangent en ce point, ou, ce qui revient au même, entre un point d'une surface et la normale en ce point. Soient x, y, z les coordonnées d'un point M d'une surface intégrale; les équations de la normale en ce point sont

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1},$$

et, par suite, on voit immédiatement que les normales à toutes les surfaces intégrales qui passent au point M engendrent un cône (N) ayant pour équation

$$F\left(x, y, z, -\frac{X - x}{Z - z}, -\frac{Y - y}{Z - z}\right) = 0.$$

Les plans tangents aux surfaces intégrales qui passent en un point M enveloppent par conséquent un cône (T) qui est le cône supplémen-

(1) Le contenu de ce chapitre est extrait presque complètement du Mémoire de M. Darboux sur les Solutions singulières, etc. On pourra consulter aussi un important Mémoire de M. Lie. *Über Complexe, insbesondere Linien und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen* (Mathematische Annalen, t. V. p. 144), et l'ouvrage célèbre de Weingarten, *Application de l'Analyse à la Géométrie*.

taire du cône (N). Donc, si l'on considère les surfaces satisfaisant à une équation aux dérivées partielles du premier ordre, pour chaque surface passant par un point de l'espace, la normale doit se trouver sur un cône (N) relatif à ce point, ou, ce qui revient au même, le plan tangent doit toucher un cône (T) supplémentaire du cône (N). En particulier, si le cône (N) se composait d'un système de plans, le cône (T) se réduirait à un système de droites et l'équation $F = 0$ se décomposerait en plusieurs équations linéaires.

De même, considérons toutes les surfaces intégrales tangentes à un plan donné P

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma;$$

au point de contact, on devra avoir

$$\alpha = p, \quad \beta = q,$$

par suite, les coordonnées du point de contact vérifieront les deux équations

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

qui définissent une courbe (C) située dans le plan donné. Donc, si l'on considère les surfaces intégrales tangentes à un plan P, les points de contact sont situés sur une certaine courbe (C) de ce plan.

A chaque point de l'espace correspond ainsi un cône (T) ayant son sommet en ce point et, à chaque plan, une courbe (C) située dans ce plan. D'ailleurs, on peut établir entre les courbes et les cônes une liaison géométrique indépendante de toute intégrale. Il est clair, en effet, que la courbe (C) située dans un plan P est le lieu des points M de ce plan pour lesquels le cône (T) est tangent au plan P. De même, le cône (T) relatif à un point M est l'enveloppe des plans P pour lesquels la courbe (C) passe au point M. On pourra donc déduire les courbes (C) des cônes (T) et inversement.

Les deux propriétés précédentes se transforment l'une dans l'autre quand on soumet les surfaces intégrales à une transformation par polaires réciproques. Prenons, par exemple, la première, d'après laquelle toutes les surfaces passant en M doivent toucher un cône (T); aux surfaces passant en M correspondent des surfaces tangentes à un

plan P , et au cône (T) une certaine courbe du plan P . On voit, par conséquent, que, si des surfaces satisfont à une même équation aux dérivées partielles du premier ordre, il en sera de même de leurs transformées par polaires réciproques. Ceci explique le succès de la transformation de Legendre qui consiste à prendre pour nouvelles variables

$$p, q, \quad u = px + qy - z;$$

on aura

$$du = p dx + q dy + x dp + y dq - dz,$$

c'est-à-dire

$$du = x dp + y dq;$$

par suite, si on prend p et q pour variables indépendantes, il vient

$$x = \frac{\partial u}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial q}.$$

Les formules de transformation sont, par conséquent,

$$x = \frac{\partial u}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial q}, \quad z = p \frac{\partial u}{\partial p} + q \frac{\partial u}{\partial q} - u,$$

et l'équation du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

se change en une nouvelle équation du premier ordre

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial p}, \frac{\partial u}{\partial q}, p \frac{\partial u}{\partial p} + q \frac{\partial u}{\partial q} - u, p, q\right) = 0.$$

On reconnaît immédiatement que p, q, u sont les coordonnées du pôle du plan tangent

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

par rapport au paraboloides

$$2Z = X^2 + Y^2,$$

de sorte que la transformation précédente revient bien à une transformation par polaires réciproques.

REMARQUE. — Si les courbes (C) sont des droites pour l'équation primitive, les cônes (T) seront composés d'un système de droites dans l'équation transformée qui, par suite, se décomposera en plusieurs équations linéaires. Ainsi, par exemple, considérons une équation de la forme

$$f(p, q, y) = 0.$$

Les courbes (C) sont données par les relations

$$\begin{cases} z = \alpha x + \beta y + \gamma, \\ f(\alpha, \beta, y) = 0; \end{cases}$$

ce sont donc des droites parallèles au plan des xz . La transformation de Legendre conduit à l'équation

$$f\left(p, q, \frac{\partial u}{\partial q}\right) = 0,$$

que l'on peut traiter comme une équation différentielle ordinaire. De même, prenons l'équation

$$xf_1(p, q, z - px - qy) + yf_2(p, q, z - px - qy) + f_3(p, q, z - px - qy) = 0.$$

Les équations des courbes (C) sont

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + \beta y + \gamma, \\ \alpha f_1(\alpha, \beta, \gamma) + y f_2(\alpha, \beta, \gamma) + f_3(\alpha, \beta, \gamma) &= 0; \end{aligned}$$

ce sont donc des droites. La transformation de Legendre nous conduit en effet à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial p} f_1(p, q, u) + \frac{\partial u}{\partial q} f_2(p, q, u) + f_3(p, q, u) = 0,$$

qui est l'équation linéaire la plus générale.

Il est aisé dans bien des cas de se rendre compte de la position du cône (T) et de la courbe (C). Ainsi, dans le cas de l'équation de Clairaut généralisée, nous avons vu que l'intégrale complète était formée par l'ensemble des plans tangents à une certaine surface non développable (Z); le cône (T), relatif à un point M, est évidemment le cône circonscrit à (Z) et ayant le point M pour sommet; il n'y a pas

lieu de considérer la courbe (C), sauf dans le cas où le plan donné est tangent à (Σ), et alors elle est indéterminée. L'renons encore l'équation du premier ordre qui admet pour intégrale complète les sphères passant par un point O et tangentes à un plan. On voit aisément que toutes celles de ces sphères qui passent en un point M enveloppent un cône (T) de révolution et que les courbes (C) sont des cercles. Pour le voir, il suffit d'effectuer une transformation par rayons vecteurs réciproques en prenant le point O pour pôle de la transformation.

73. Soient

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

une équation à trois variables et

$$(2) \quad V(x, y, z, a, b) = 0$$

une intégrale complète de cette équation. Nous savons que, l'intégrale singulière mise à part, toutes les intégrales de l'équation (1) s'obtiennent en posant $b = \varphi(a)$ et en éliminant a entre les deux équations

$$(3) \quad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + \varphi'(a) \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

ou, en d'autres termes, en associant les courbes du complexe

$$(4) \quad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + c \frac{\partial V}{\partial b} = 0$$

suivant une loi convenable.

Sur toute intégrale complète, il y a une infinité de courbes caractéristiques (4), correspondant aux différentes valeurs de c . Mais par tout point d'une telle surface passe une seule courbe caractéristique, comme on le voit immédiatement d'après les équations (4). Soit M un point d'une intégrale complète S; la caractéristique C située sur S et qui passe au point M n'est autre chose que la limite de l'intersection de la surface S avec une intégrale complète S' infiniment voisine, lorsque S' se rapproche de S suivant une loi quelconque, mais de telle façon que cette intersection limite passe au point M. En particulier, si la surface S' se rapproche de S en passant constamment

par le point M , la limite de l'intersection des deux plans tangents en M aux surfaces S et S' est évidemment la génératrice de contact du plan tangent en M à la surface S avec le cône (T) correspondant au point M . Donc, étant donnée une surface intégrale quelconque et une caractéristique C située sur cette surface, comme il existe toujours une intégrale complète tangente à cette surface tout le long de C , on peut énoncer la proposition suivante : *Les courbes caractéristiques sont des courbes tracées sur une surface intégrale et tangentes en chacun de leurs points à la génératrice G de contact du cône (T) correspondant avec le plan tangent à la surface en ce point.* D'ailleurs, comme en chaque point d'une surface intégrale il passe une seule courbe possédant la propriété précédente, on en conclut que les courbes caractéristiques sont les seules courbes jouissant de cette propriété. La définition précédente des caractéristiques a l'avantage d'être indépendante de toute intégrale complète.

Le lieu des caractéristiques passant en un point M peut être considéré comme l'enveloppe des intégrales complètes qui passent en ce point; ce lieu est donc une surface intégrale (§ 49).

Soient M un point, P un plan passant en M et tangent au cône (T) correspondant, S l'intégrale complète tangente au plan P au point M ; toute surface intégrale tangente en M au plan P pourra être considérée comme l'enveloppe d'une suite simplement infinie d'intégrales complètes parmi lesquelles se trouvera la surface S . La surface intégrale sera donc tangente à S tout le long de la caractéristique issue de M . On en conclut que si deux surfaces intégrales sont tangentes à un même plan en un même point M , elles sont tangentes tout le long de la caractéristique issue du point M , et tangentes au plan tangent commun à ces deux surfaces.

Ceci nous conduit à associer aux courbes caractéristiques les développables caractéristiques, c'est-à-dire les développables circonscrites aux surfaces intégrales le long d'une caractéristique. La caractéristique étant représentée par les équations

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + c \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

les valeurs de p et de q relatives au plan tangent à la développable

caractéristique seront fournies par les relations

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

qui ne dépendent que de a et de b . De même qu'une courbe caractéristique peut être considérée comme la limite de l'intersection de deux intégrales complètes infiniment voisines, une développable caractéristique peut être considérée comme la limite de la développable circonscrite à deux intégrales complètes infiniment voisines.

Prenons, par exemple, deux intégrales voisines S, S' tangentes à un plan P en deux points m, m' de la courbe (C) ; la droite mm' est une génératrice de la surface développable circonscrite à S et S' . Si m' se rapproche indéfiniment du point m , la droite mm' a pour limite la tangente mt à la courbe (C) en m et la surface développable circonscrite à S et S' a pour limite la développable caractéristique passant par la caractéristique issue de m et tangente au plan P . On en conclut que les génératrices de contact des développables caractéristiques, tangentes à un plan P , avec ce plan, sont les tangentes à la courbe (C) relative à ce plan. Ce théorème est précisément la proposition corrélatrice de la proposition établie plus haut, d'après laquelle les tangentes aux courbes caractéristiques issues d'un point engendrent le cône (T) relatif à ce point. A toute propriété des courbes caractéristiques correspond, par la méthode des polaires réciproques, une propriété des développables caractéristiques. Ainsi, les courbes caractéristiques qui passent en un point engendrent une surface intégrale; on en conclut que les développables caractéristiques tangentes à un plan enveloppent une surface intégrale. Cette surface n'est autre chose que l'enveloppe des intégrales complètes tangentes au plan P , ou le lieu des caractéristiques tangentes à ce plan en tous les points de la courbe (C) .

Le théorème établi plus haut peut être généralisé comme il suit : *Si deux surfaces intégrales ont un contact d'ordre m en un point, elles ont un contact du même ordre tout le long de la courbe caractéristique issue de ce point et tangente en ce point au plan tangent commun à ces deux surfaces.* En effet, soit S une surface

intégrale obtenue en éliminant a entre les deux équations

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + f'(a) \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

où

$$b = f(a).$$

Considérons la caractéristique correspondant à la valeur a_0 du paramètre a , les valeurs de p et q en un point x, y, z de cette caractéristique seront données par les formules

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

et, par suite, ne dépendent que de a et $f(a)$; en différentiant ces équations, on verra que les valeurs des dérivées secondes r, s, t ne dépendent que de $a, f(a), f'(a), f''(a)$; d'une manière générale, les dérivées jusqu'à l'ordre m de z par rapport à x et à y ne dépendent que des m premières dérivées de $f(a)$.

Soit alors S' la surface intégrale obtenue en prenant $b = f(a)$; pour que les deux surfaces aient un contact d'ordre m en un point de la caractéristique, il faudra avoir

$$\begin{aligned} \varphi(a_0) &= f(a_0), \\ \varphi'(a_0) &= f'(a_0), \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi^{(m)}(a_0) &= f^{(m)}(a_0), \end{aligned}$$

et, par suite, si les conditions sont vérifiées en un point de la caractéristique, elles seront vérifiées tout le long de la caractéristique; d'où résulte la proposition énoncée.

74. Pour terminer ces considérations sur les caractéristiques, nous allons montrer comment on peut retrouver leurs équations différentielles en exprimant que ce sont des courbes situées sur une surface intégrale et tangentes en chacun de leurs points à la génératrice de contact du plan tangent en ce point avec le cône (T) correspondant. L'équation du plan tangent au cône (T) relatif à un point x, y, z est

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

où p et q sont liés par la relation

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

La génératrice de contact de ce plan avec le cône (T) a donc pour équations

$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q} = \frac{Z - z}{Pp + Qq}.$$

Pour que la caractéristique soit tangente à cette droite, il faudra d'abord que l'on ait

$$(5) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = dt,$$

en désignant par dt la valeur commune des rapports. Pour avoir dp et dq , rappelons-nous que la courbe est située sur une surface intégrale. De l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

on déduit

$$\begin{aligned} X + Zp + Pr + Qs &= 0, \\ Y + Zq + Ps + Qt &= 0, \end{aligned}$$

en posant

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Remplaçons dans ces expressions P et Q par leurs valeurs tirées de (5): il vient

$$\begin{aligned} (X + Zp) dt + r dx + s dy &= 0, \\ (Y + Zq) dt + s dx + t dy &= 0, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} (X + Zp) dt + dp &= 0, \\ (Y + Zq) dt + dq &= 0, \end{aligned}$$

relations qui donnent dp et dq .

75. Appliquons les considérations précédentes à la recherche des surfaces intégrales satisfaisant à des conditions géométriques déterminées.

Proposons-nous, par exemple, de trouver une intégrale passant

par une courbe C donnée, non située sur l'intégrale singulière et n'étant pas une courbe caractéristique. Soit S l'intégrale cherchée et m un point de la courbe C ; en m il passe une intégrale complète tangente à S ; d'ailleurs, le plan tangent en m passe par la tangente mt à la courbe C en m et est tangent au cône (T) correspondant au point m . Donc, voici comment on obtiendra l'intégrale S : par mt on mène un plan tangent au cône (T) relatif au point m ; on fait ainsi correspondre à chaque point m un plan P , puis on cherche l'intégrale complète passant en m et tangente au plan P : l'intégrale S sera l'enveloppe de toutes ces intégrales complètes lorsque le point m décrit la courbe C . Si on peut mener plusieurs plans tangents au cône (T) par mt , on aura plusieurs nappes de surfaces intégrales passant par (C) . Soit G la génératrice de contact du plan P avec le cône (T) , la surface S est aussi le lieu de la caractéristique issue de m et tangente à G quand m décrit la courbe C .

Traduisons analytiquement cette construction. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de m , p_0, q_0 les coefficients angulaires du plan P . On devra avoir d'abord

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

puisque le plan P est tangent au cône (T) de sommet x_0, y_0, z_0 . Soit u le paramètre variable dont dépendent les coordonnées d'un point de la courbe C ; pour que le plan P passe par la tangente mt , il faudra que l'on ait aussi

$$\frac{\partial z_0}{\partial u} = p_0 \frac{\partial x_0}{\partial u} + q_0 \frac{\partial y_0}{\partial u}.$$

De sorte que la construction géométrique indiquée plus haut revient à prendre le lieu des caractéristiques issues des éléments $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ qui vérifient les relations précédentes. On retrouve précisément la méthode de Cauchy (§ 48). Nous avons vu que la valeur de z était développable pourvu que la quantité

$$p_0 \frac{\partial y_0}{\partial u} - q_0 \frac{\partial x_0}{\partial u}$$

ne soit pas nulle. Mais le raisonnement ne s'applique plus si cette expression est nulle pour un point de la courbe C ; il est aisé de s'en rendre compte. Les cosinus directeurs de mt sont proportionnels

à $\frac{\partial x_0}{\partial u}$, $\frac{\partial y_0}{\partial u}$, $\frac{\partial z_0}{\partial u}$, ceux de la génératrice G à P_0 , Q_0 , $P_0 p_0 + Q_0 q_0$; si donc l'expression précédente était nulle, mt coïnciderait avec G . Supposons qu'en un point particulier m de la courbe C , mt soit une génératrice du cône (T) ; en un point infiniment voisin m' pris sur C , on peut mener par la tangente $m't'$ deux plans tangents à (T) infiniment voisins, qui coïncident quand m' vient en m . À chacun de ces plans tangents correspond une nappe de surface intégrale passant par C , et ces deux nappes viennent se raccorder au point m qui doit être, par conséquent, un point singulier de la surface intégrale.

Un cas particulier intéressant est celui où la courbe C est tangente en chacun de ses points au cône (T) correspondant; on obtiendra une intégrale passant par cette courbe en prenant le lieu des caractéristiques tangentes à C .

Si la courbe C était située sur l'intégrale singulière, il y aurait deux intégrales répondant à la question, tangentes l'une à l'autre; d'abord l'intégrale singulière, et ensuite l'enveloppe des intégrales complètes tangentes à l'intégrale singulière tout le long de la courbe C . Enfin, si la courbe C est une courbe caractéristique, il y aura, nous l'avons vu, une infinité d'intégrales répondant à la question.

Proposons-nous, de même, de trouver une intégrale tangente à une surface donnée (Z) qui n'est pas elle-même une surface intégrale. On cherchera pour cela une courbe C située sur la surface donnée et telle que (Z) soit tangente en chacun de ses points au cône (T) correspondant. L'intégrale demandée sera l'enveloppe des intégrales complètes tangentes à la surface Z le long de la courbe C . Si la surface (Z) était elle-même une surface intégrale, il y aurait évidemment une infinité de solutions.

78. Courbes intégrales. — Les courbes caractéristiques d'une équation du premier ordre sont tangentes en chacun de leurs points à une génératrice du cône (T) relatif à ce point. Mais ce ne sont pas les courbes les plus générales jouissant de cette propriété; en effet, si

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{Z-z}{X-x}, \frac{Y-y}{X-x}\right) = 0$$

est l'équation du cône (T) de sommet (x, y, z) , pour qu'une courbe

possède la propriété précédente, il faut et il suffit que les coordonnées x, y, z vérifient l'équation unique

$$\varphi \left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dy}{dx} \right) = 0.$$

La solution générale de cette équation comporte une fonction arbitraire, car si on pose

$$z = \phi(x),$$

$\phi(x)$ étant une fonction arbitraire de x , on a pour déterminer y une équation différentielle du premier ordre

$$\varphi \left(x, y, \phi(x), \phi'(x), \frac{dy}{dx} \right) = 0.$$

Nous appellerons *courbes intégrales* les courbes satisfaisant à cette condition.

Monge⁽¹⁾ a montré que, si on sait intégrer une équation aux dérivées partielles du premier ordre, on a immédiatement les courbes intégrales. Considérons, en effet, les courbes dont les équations sont

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + \varphi'(a) \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

où on a posé $b = \varphi(a)$; ces courbes ont une enveloppe que l'on obtient en éliminant le paramètre a entre les trois équations

$$(6) \quad \begin{cases} V = 0, & \frac{\partial V}{\partial a} + \varphi'(a) \frac{\partial V}{\partial b} = 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} \varphi'(a) + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} [\varphi'(a)]^2 + \frac{\partial V}{\partial b} \varphi''(a) = 0, \end{cases}$$

et cette enveloppe est évidemment une courbe intégrale. D'un autre côté, on a vu au paragraphe précédent que les caractéristiques tangentes à une courbe intégrale engendrent une surface intégrale. Les formules (6) représentent donc toutes les courbes intégrales. Ces formules dépendent bien d'une fonction arbitraire φ ; mais il est à remarquer qu'en général, quelle que soit la fonction φ , elles ne

(1) Mémoires de l'Académie des Sciences, 1781.

donneront jamais les caractéristiques. La courbe intégrale (6) n'est autre chose que l'enveloppe des courbes caractéristiques situées sur la surface intégrale définie par les deux équations

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + \varphi'(a) \frac{\partial V}{\partial b} = 0;$$

par analogie avec le cas des surfaces développables, on l'appelle encore l'*arête de rebroussement* de la surface. M. Darboux a d'ailleurs montré que c'est bien effectivement une arête de rebroussement de la surface, c'est-à-dire une ligne suivant laquelle deux nappes de la surface se raccordent. Ce qui précède nous montre, en outre, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une infinité simple de caractéristiques engendre une surface intégrale est que ces caractéristiques aient une enveloppe.

Exemple. — Considérons l'équation du premier ordre qui admet pour intégrale complète les plans

$$(1 - a^2)x + k(1 + a^2)z + 2ay + b = 0,$$

qui sont les plans parallèles aux plans tangents du cône

$$x^2 + y^2 = k^2 z^2;$$

les caractéristiques sont les parallèles aux génératrices de ce cône et les courbes intégrales vérifient l'équation

$$dx^2 + dy^2 = k^2 dz^2.$$

Pour avoir ces courbes, je pose $b = 4f(a)$, et les formules (6) deviennent

$$\begin{cases} (1 - a^2)x + k(1 + a^2)z + 2ay + 4f(a) = 0, \\ -ax + ksz + y + 2f'(a) = 0, \\ -x + ks + 2f''(a) = 0. \end{cases}$$

On en tire

$$\begin{cases} x = (1 - a^2)f''(a) + 2af'(a) - 2f(a), \\ y = 2af''(a) - 2f'(a), \\ ks = -(1 + a^2)f''(a) + 2af'(a) - 2f(a). \end{cases}$$

104 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Ces équations, comme il est aisé de s'en rendre compte, ne peuvent pas représenter les parallèles aux génératrices du cône. Si on prend $k = 1$, ces formules donnent les coordonnées d'un point d'une courbe plane et l'arc de cette courbe exprimés au moyen d'un paramètre sans aucune quadrature. Si on prend $k^2 = -1$, on a les courbes dites courbes minima qui satisfont à la relation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

et qui jouent un rôle si important dans la théorie des surfaces minima.

77. Dans le tome V des *Mathematische Annalen*, M. Sophus Lie a signalé un certain nombre de propriétés des courbes intégrales. Une des plus curieuses est la suivante : Toute courbe intégrale a un contact du second ordre avec les surfaces intégrales qui lui sont tangentes (1).

Soient, en effet,

$$(7) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

une équation du premier ordre et

$$z = \varphi(x, y)$$

une surface intégrale S de cette équation. Soit M un point de cette surface, P le plan tangent en M , G la génératrice de contact du plan P avec le cône (T) relatif au point M , et I une courbe intégrale passant en M et tangente à la droite G . La courbe I satisfait au système d'équations différentielles

$$(8) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = dt,$$

où p et q désignent des fonctions de x et y définies par la rela-

(1) D'une manière générale, si une courbe intégrale a un contact d'ordre n avec une caractéristique, elle a un contact d'ordre $(n+1)$ avec toute surface intégrale passant par cette caractéristique. Étant donnée une équation quelconque du premier ordre, il y aura, d'une manière normale, des courbes intégrales ayant en chacun de leurs points un contact du second ordre avec la caractéristique tangente et par suite un contact du troisième ordre avec les surfaces intégrales qui leur sont tangentes. (Darboux, *loc. cit.*, p. 47.)

tion (7) jointe à une autre relation de forme arbitraire

$$(9) \quad \Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui dépend de la courbe intégrale considérée. Soient d^2x , d^2y , d^2z les différentielles secondes de x , y , z relatives à un déplacement sur la courbe l , on aura

$$\begin{aligned} dz &= p dx + q dy, \\ d^2z - p d^2x - q d^2y &= dp dx + dq dy, \end{aligned}$$

et par suite,

$$d^2z - p d^2x - q d^2y = \{ P dp + Q dq \} dt.$$

Puisque p , q satisfont à la relation (7), on a

$$X dx + Y dy + Z dz + P dp + Q dq = 0,$$

d'où

$$d^2z - p d^2x - q d^2y = - \{ X dx + Y dy + Z dz \} dt.$$

Soient, d'autre part, r , s , t les dérivées secondes de z pour un point de la surface S ; on aura

$$\begin{cases} X + pZ + Pr + Qs = 0, \\ Y + qZ + Ps + Qt = 0, \end{cases}$$

ou

$$\begin{aligned} (X + pZ) dt + r dx + s dy &= 0, \\ (Y + qZ) dt + s dx + t dy &= 0, \end{aligned}$$

en remplaçant P , Q par leurs valeurs tirées des équations (8). On en conclut, en multipliant les deux relations par dx et dy respectivement et en les ajoutant,

$$dt \{ X dx + Y dy + Z dz \} + r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0.$$

On a donc les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} dz - p dx - q dy = 0, \\ d^2z - p d^2x - q d^2y - r dx^2 - 2s dx dy - t dy^2 = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations expriment qu'il y a un contact du second ordre entre la courbe l et la surface S au point M ; car, si on pose

$$S = z - \varphi(x, y),$$

z, x, y étant supposées remplacées par les coordonnées d'un point de la courbe I , ces deux relations expriment que l'on a, pour le point M ,

$$dJ = 0, \quad d^2J = 0.$$

On tire de cette proposition des conséquences intéressantes. Considérons un complexe de courbes

$$\begin{cases} f(x, y, z, a, b, c) = 0, \\ f_1(x, y, z, a, b, c) = 0. \end{cases}$$

Par chaque point de l'espace il passe une infinité de courbes de ce complexe, dont les tangentes forment un cône (T) ayant le sommet en ce point. Les surfaces tangentes en chacun de leurs points au cône (T) correspondant vérifient une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dont les courbes du complexe sont des courbes intégrales; d'ailleurs il est évident qu'il existe une infinité de complexes conduisant à la même équation aux dérivées partielles. Prenons, en particulier, un complexe de droites; le cône (T) sera dans ce cas le cône formé par l'ensemble des droites qui passent en un point. Soient S une surface intégrale, M un point de cette surface et MT la tangente en ce point à la courbe caractéristique située sur la surface qui passe en M ; MT , étant une courbe intégrale, d'après ce que nous venons de dire, aura un contact du second ordre avec la surface S . Les caractéristiques sont donc des courbes telles qu'en chacun de leurs points la tangente a un contact du second ordre avec la surface S : ce sont par conséquent des *lignes asymptotiques* de la surface. Il y a un autre cas où les caractéristiques sont des lignes asymptotiques des surfaces intégrales; c'est celui des équations linéaires dont les caractéristiques forment une congruence de droites. M. Lie a d'ailleurs montré que les deux cas que nous venons de citer sont les seuls où cette circonstance se présente.

Revenons au cas précédent; les différentielles dx, dy, dz sont les mêmes pour la courbe intégrale I tangente en M à la caractéristique C et pour la courbe C elle-même. Puisque la caractéristique est une ligne asymptotique de la surface S , on a

$$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0;$$

par suite, on a pour la courbe I

$$d^2 z - p d^2 x - q d^2 y = 0,$$

relation qui exprime que le plan tangent au cône (T)

$$Z - z = p (X - x) + q (Y - y)$$

est le plan osculateur à la courbe I au point M. On peut donc énoncer la proposition suivante : *Lorsque les tangentes d'une courbe appartiennent à un complexe de droites, le plan osculateur en un point de cette courbe est le plan tangent au cône du complexe suivant la tangente à la courbe en ce point.*

78. Étant donné un complexe quelconque de courbes dans l'espace, il est évident, d'après ce qui précède, qu'il n'existe pas, en général, d'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont ces courbes soient les caractéristiques. En effet, à ce complexe de courbes correspond un système de cônes (T) et par suite une équation aux dérivées partielles bien déterminée

$$(10) \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

dont les courbes proposées seront simplement, en général, des courbes intégrales.

Mais on peut donner des courbes caractéristiques une propriété géométrique, indépendante de toute surface intégrale, qui les distingue des autres courbes intégrales. A tout complexe de courbes correspond un système de cônes (T) et, par suite, un système de courbes planes (C). En chaque point M d'une des courbes du complexe précédent menons le plan tangent P au cône (T) suivant la tangente à cette courbe. Quand on se déplace sur cette courbe, ce plan P enveloppe une surface développable; pour que la courbe considérée soit une caractéristique, il faut et il suffit que la génératrice de cette surface développable qui passe en M soit précisément la tangente en M à la courbe (C) du plan P. D'après ce qu'on a vu plus haut sur les développables caractéristiques, cette propriété appartient bien aux courbes caractéristiques. Elle n'appartient pas à d'autres courbes intégrales, car, si on l'exprime analytiquement, on est conduit précisément aux équations différentielles des caractéristiques.

Pour toute courbe intégrale on a d'abord

$$(11) \quad \frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q}}.$$

Le plan tangent au cône (T) suivant la tangente à cette courbe a pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

et la génératrice de contact de ce plan avec son enveloppe s'obtiendra en joignant à l'équation précédente la relation

$$-dz = dp(X - x) + dq(Y - y) - p dx - q dy,$$

c'est-à-dire

$$dp(X - x) + dq(Y - y) = 0.$$

Cherchons de même la tangente à la courbe (C) du plan P, représentée par les équations

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z, p, q) &= 0, \\ Z - z &= p(X - x) + q(Y - y), \end{aligned}$$

X, Y, Z désignant les coordonnées courantes. La tangente à cette courbe au point (x, y, z) sera définie par les deux relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} dX + \frac{\partial F}{\partial y} dY + \frac{\partial f}{\partial z} dZ &= 0, \\ dZ &= p dX + q dY, \end{aligned}$$

d'où on tire

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} \right) dX + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} \right) dY = 0.$$

Pour que cette tangente coïncide avec la génératrice précédente, il faudra que l'on ait

$$\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z}};$$

ces relations, jointes aux formules (11) et à l'équation $dF = 0$, conduisent précisément aux équations différentielles des caractéristiques.

79. Solutions singulières. — Soit

$$(12) \quad V(x, y, z, a, b) = 0$$

une intégrale complète d'une équation du premier ordre; supposons que ces surfaces admettent une enveloppe définie par l'équation (12) jointe aux équations

$$(13) \quad \frac{\partial V}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

et qu'elles touchent cette enveloppe en un point ou en un nombre fini de points. A tout système de valeurs des paramètres a et b correspond un point M de cette enveloppe Σ où cette enveloppe est touchée par la surface V correspondante. En tout point $M(a_0, b_0)$ de Σ passe une infinité de caractéristiques tangentes à Σ , car si on considère la caractéristique définie par les équations

$$V(x, y, z, a_0, b_0) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_0} + c \frac{\partial V}{\partial b_0} = 0,$$

cette caractéristique passe au point M , quel que soit c , et est évidemment tangente en ce point à Σ . A toute direction de tangente à la surface Σ au point M correspond un système de valeurs des différentielles da et db qui définissent cette direction. Soient C et C' deux courbes tracées sur la surface Σ et passant au point M , $da, db; \delta a, \delta b$ les différentielles correspondant respectivement aux tangentes en M à C et C' . L'intégrale complète tangente à Σ en un point M' , infiniment voisin de M , situé sur C' , coupe l'intégrale complète, tangente à Σ en M , suivant la caractéristique que l'on obtient en prenant pour la constante c la valeur $c = \frac{\delta b}{\delta a}$. Cherchons la relation

qui doit exister entre les différentielles $db, da, \delta b, \delta a$ pour que cette caractéristique soit tangente à la courbe C au point M . Les différentielles dx, dy, dz relatives à un déplacement le long de C sont données par les relations

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial x} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial y} dy + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial z} dz + \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} da + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} db = 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial x} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial y} dy + \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial z} dz + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} da + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} db = 0. \end{cases}$$

Pour un déplacement le long de la caractéristique on a

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial x} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial y} dy + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial z} dz \\ + \frac{\partial b}{\partial a} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial x} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial y} dy + \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial z} dz \right] = 0. \end{array} \right.$$

Les valeurs de dx , dy , dz tirées des formules (14) et (15) devront être les mêmes, ce qui donne la relation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} da \delta a + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} [da \delta b + db \delta a] + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} db \delta b = 0.$$

Cette relation fait correspondre à toute tangente M_μ issue du point M une autre tangente $M_{\mu'}$ et, comme elle est symétrique par rapport aux différentielles d et δ , cette correspondance est réciproque. On définit ainsi sur la surface Σ un système de lignes analogues aux lignes conjuguées sur une surface quelconque. Pour que les deux tangentes correspondantes se confondent, il faut avoir

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} da^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} da db + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} db^2 = 0,$$

et on a ainsi deux séries de lignes, tracées sur la surface Σ , analogues aux lignes asymptotiques. La théorie qu'on vient d'indiquer se réduit d'ailleurs à la théorie ordinaire des lignes conjuguées si l'intégrale complète est un plan.

REMARQUE. — Dans ce qui précède, nous avons supposé implicitement que la relation

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} \right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = 0$$

n'était pas satisfaite, car, si elle avait lieu, le rapport $\frac{da}{db}$, qui est donné par la formule

$$\frac{db}{da} = - \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} \frac{\partial b}{\partial a} + \frac{\partial^2 V}{\partial a^2}}{\frac{\partial^2 V}{\partial b^2} \frac{\partial b}{\partial a} + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b}},$$

serait indépendant de $\frac{\partial a}{\partial b}$. Dans ce cas, toutes les caractéristiques passant en M seraient tangentes; ce serait un cas analogue à celui des surfaces développables où la caractéristique du plan tangent est toujours la génératrice. Considérons, par exemple, une surface quelconque (Σ) , un des systèmes de lignes de courbure de cette surface, et toutes les sphères tangentes à la surface et ayant pour centres les centres de courbure principaux correspondant au système de lignes de courbure considéré. Imaginons qu'on ait formé l'équation du premier ordre qui admet ce système de sphères pour intégrale complète, (Σ) sera la solution singulière de cette équation. Soient M un point quelconque de la surface (Σ) , C la ligne de courbure du système considéré qui passe en M , MT la tangente à cette ligne de courbure, O le centre de courbure correspondant, S la sphère de centre O tangente en M à (Σ) , MT' la tangente à la seconde ligne de courbure qui passe en M . Prenons sur (Σ) un point M' infiniment voisin de M ; soient O' le centre de courbure principal correspondant et S' la sphère de centre O' tangente en M' . Les deux sphères S et S' se coupent suivant un cercle c dont le plan est perpendiculaire à OO' . A la limite, la droite OO' est située dans le plan tangent en O à la surface lieu des centres de courbure principaux, c'est-à-dire dans le plan MOT' . La tangente à la caractéristique est donc la droite MT , de quelque façon que le point M' se rapproche indéfiniment du point M .

80. L'intégrale singulière de Lagrange possède donc les trois propriétés suivantes : 1° elle est l'enveloppe de toutes les autres intégrales; 2° par chaque point de cette surface, il passe une infinité de caractéristiques qui lui sont tangentes; 3° par toute courbe de cette surface passent deux intégrales tangentes, cette surface elle-même et l'enveloppe de toutes les intégrales complètes qui lui sont tangentes le long de cette courbe.

Ces deux dernières propriétés permettent facilement de déduire la solution singulière de l'équation aux dérivées partielles elle-même.

1° Soit

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

une équation du premier ordre, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 un élément

quelconque de l'intégrale singulière (Σ) de Lagrange; il faudra que le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}$$

admette une infinité d'intégrales correspondant aux valeurs initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 . Il faut évidemment pour cela que cet élément annule tous les dénominateurs, car si, par exemple, P_0 était différent de 0, on en tirerait pour $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}$ un seul système de valeurs finies et bien déterminées dans le voisinage de ces valeurs initiales et, par suite, un seul système de valeurs pour y, z, p, q . Donc tout élément de (Σ) doit satisfaire à la fois aux cinq équations

$$F = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0, \quad X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0.$$

2° Servons-nous de même de la troisième propriété de l'intégrale singulière. Soit C la courbe d'intersection de (Σ) par un plan parallèle au plan des yz , ayant pour équations

$$x = x_0, \quad z = \varphi(y).$$

Tous les éléments x, y, z, p, q de la surface (Σ) , la long de la courbe C , sont bien déterminés; en particulier, on aura $q = \varphi'(y)$. Si ces éléments n'annulaient pas P , on pourrait résoudre l'équation $F = 0$ par rapport à p et la mettre sous la forme

$$p = \psi(x, y, z, q),$$

$\psi(x, y, z, q)$ étant une fonction développable, et alors, en vertu du théorème de Cauchy, il existerait une fonction z , et une seule, qui satisferait à cette équation et qui, pour $x = x_0$, se réduirait à $\varphi(y)$. Si donc il passe deux intégrales tangentes l'une à l'autre par la courbe C , il faut nécessairement que tous les éléments de (Σ) annulent P . On verrait de même, en coupant la surface (Σ) par un plan parallèle au plan des zx , qu'il faut avoir $Q = 0$. L'intégrale (Σ) doit donc satisfaire aux trois équations

$$(16) \quad F = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0.$$

On en conclut aisément, comme nous l'avons vu (§ 14), qu'elle satisfait aussi aux équations

$$(17) \quad X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0.$$

L'intégrale singulière de Lagrange satisfait donc aux équations qui ont été prises plus haut pour définition des intégrales singulières.

§1. S'il existe une intégrale singulière

$$R(x, y, z) = 0,$$

pour tous les points de cette surface les cinq équations

$$F = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0, \quad X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0$$

admettront une solution commune en p et q . Réciproquement, s'il existe une surface telle que, pour tout point de cette surface, les cinq équations précédentes admettent une solution commune en p et q , cette surface est une intégrale singulière. En effet, pour tout déplacement sur cette surface, on aura

$$X dx + Y dy + Z dz + P dp + Q dq = 0,$$

ou, en tenant compte de ces relations,

$$Z (dz - p dx - q dy) = 0.$$

Si Z n'est pas nul pour ces valeurs de p et q , on en conclut que p et q sont les coefficients angulaires du plan tangent à la surface considérée, qui est, par suite, une intégrale singulière. Mais si Z est nul, le raisonnement ne s'applique plus.

Toute intégrale singulière d'une équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

devant vérifier les cinq équations (16) et (17), il semble, d'après cela, qu'une équation $F = 0$ prise au hasard n'admettra pas d'intégrale singulière, puisque cinq équations ne déterminent, en général, qu'un nombre fini de systèmes de valeurs pour cinq variables. Cependant, comme ces cinq équations ont été obtenues avec les dérivées partielles d'une même fonction, ce point pourrait donner lieu à quelque incertitude.

On peut rendre le raisonnement plus précis. Si la fonction F n'a pas été prise d'une façon particulière, l'élimination de p et de q entre les trois équations

$$F = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0$$

conduira à une certaine relation $R(x, y, z) = 0$ qui donnera l'intégrale singulière de l'équation $F = 0$, si elle existe. Prenons maintenant l'équation

$$F(x, y, z, p + a, q + b) = 0,$$

où a et b désignent des fonctions quelconques de x, y, z . L'élimination de p et de q entre cette équation et les relations

$$\frac{\partial F(x, y, z, p + a, q + b)}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, p + a, q + b)}{\partial q} = 0$$

conduira évidemment au même résultat,

$$R(x, y, z) = 0.$$

Il est clair que la surface représentée par cette équation ne peut satisfaire à l'équation précédente, quels que soient a et b . On conclut de là qu'une équation aux dérivées partielles prise au hasard ou formée directement d'une manière quelconque n'admet pas d'une façon normale d'intégrale singulière.

Les conclusions qui précèdent paraissent être en désaccord avec la théorie de Lagrange. En effet, il semble, d'après ce que nous avons dit, qu'en prenant l'enveloppe d'une intégrale complète $V(x, y, z, a, b) = 0$, on a toujours une intégrale singulière. Ce désaccord n'est qu'apparent, car le raisonnement de Lagrange suppose que l'intégrale complète a effectivement une enveloppe ou, en d'autres termes, que les fonctions $V, \frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}$ satisfont aux conditions de continuité qu'exige la théorie des enveloppes, ce qui n'arrivera pas nécessairement.

Les théorèmes généraux de Cauchy nous apprennent bien qu'il existe une infinité d'intégrales complètes holomorphes dans un certain domaine, mais rien ne prouve que ces intégrales complètes seront continues dans une étendue suffisante pour qu'on puisse leur appliquer la théorie des enveloppes. Nous pouvons même affirmer, d'après ce qui précède, qu'il n'en sera pas généralement ainsi.

82. Étudions maintenant d'un peu plus près les diverses circonstances où l'équation du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

admet une intégrale singulière. Nous avons vu dans les paragraphes précédents que cette intégrale satisfait aux cinq équations (16) et (17). Supposons donc qu'il existe une intégrale singulière (Σ) et soit M un point de cette surface. Les équations de la normale MN en $M(x, y, z)$ à (Σ) sont

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

où p et q satisfont aux équations (16) et (17). L'équation du cône des normales, relatif au point M , est

$$F\left(x, y, z, -\frac{X - x}{Z - z}, -\frac{Y - y}{Z - z}\right) = 0,$$

et les relations

$$P = 0, \quad Q = 0$$

expriment que la normale à la surface (Σ) est une génératrice double du cône des normales relatif au point M . Donc, pour qu'une intégrale soit singulière, il faut et il suffit que la normale en chaque point soit une génératrice double du cône (N) relatif à ce point.

En général, le cône (N) relatif à un point quelconque de l'espace n'admettra pas de génératrice double. Pour savoir s'il existe une intégrale singulière, on cherchera donc d'abord le lieu des points de l'espace pour lesquels le cône des normales correspondant admet une droite double. Ce lieu s'obtiendra en éliminant p et q entre les équations (16). Soit $R(x, y, z) = 0$ le résultat de cette élimination. Pour que cette surface soit une intégrale singulière, il faudra en outre que la normale en chaque point soit précisément la droite double correspondante, ce qui sera exprimé, il est aisé de le voir, par les relations

$$X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0,$$

$p, q, -1$ étant les paramètres directeurs de la droite double.

Si le cône des normales relatif à un point quelconque de l'espace a toujours une génératrice double, les équations (16) ne seront pas

distinctes et l'élimination de p et de q entre ces équations conduira à une identité. Soient A, B, C les paramètres directeurs de la génératrice double du cône relatif à un point quelconque M . A, B, C seront des fonctions connues de x, y, z , définies par les équations (16). S'il existe une solution singulière, elle devra satisfaire à la relation

$$(18) \quad A dx + B dy + C dz = 0,$$

c'est-à-dire que z devra vérifier les équations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{B}{C}.$$

En écrivant que l'on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

on est conduit à la relation

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{A}{C} \right) + \left(-\frac{B}{C} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{A}{C} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{B}{C} \right) + \left(-\frac{A}{C} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{B}{C} \right).$$

Si cette équation n'est pas identiquement vérifiée, elle fournira une relation $\phi(x, y, z) = 0$. Si la fonction z définie par cette relation satisfait à l'équation aux différentielles totales, elle fournira une intégrale singulière; sinon, il n'y aura pas d'intégrale singulière. Si la condition d'intégrabilité (19) est vérifiée identiquement, l'équation aux différentielles totales (18) admettra une intégrale

$$\phi(x, y, z) = c,$$

dépendant d'une constante arbitraire c , et il y aura une infinité d'intégrales singulières.

Pratiquement voici la marche à suivre pour rechercher les intégrales singulières: on éliminera p et q entre les trois équations (16).

1° Si cette élimination conduit à une relation

$$R(x, y, z) = 0,$$

qui n'est pas vérifiée identiquement, on examinera si la fonction z définie par cette relation satisfait aux trois équations

$$F = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0.$$

S'il en est ainsi, elle donne une intégrale singulière; dans le cas contraire, il n'en existe pas.

2° Si l'élimination de p et q entre les trois équations

$$F = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0,$$

conduit à une identité, on cherchera directement, par l'application de la méthode générale, s'il existe des intégrales communes à ces trois équations.

EXEMPLE I. — Considérons l'équation

$$F = pq - z = 0;$$

on a

$$P = q, \quad Q = p.$$

Donc $z = 0$ est une intégrale singulière. En effet, l'équation du cône des normales est

$$\frac{(X - x)(Y - y)}{(Z - z)^2} = z.$$

Pour $z = 0$, ce cône se décompose en deux plans $X - x = 0$, $Y - y = 0$ dont l'intersection est perpendiculaire au plan $z = 0$. D'ailleurs, nous avons vu (§ 41) que

$$z = (x - a)(y - b)$$

est une intégrale complète formée de paraboloides hyperboliques tangents au plan des xy .

EXEMPLE II. — Soit

$$F = pq - z + ax + by = 0, \quad ab \geq 0;$$

on a

$$P = q, \quad Q = p.$$

L'élimination de p et q entre $F = 0$, $P = 0$, $Q = 0$ donne

$$z = ax + by,$$

qui ne satisfait pas à l'équation proposée; il n'y a donc pas d'intégrale singulière.

Exemple III. — Soit encore

$$F = \left(z - \frac{p^2}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{3} = 0$$

Il faut lui adjoindre les deux équations

$$P = -2p \left(z - \frac{p^2}{2}\right) = 0, \quad Q = -\frac{2q}{3} = 0;$$

ces deux équations se décomposent en deux systèmes :

$$1^\circ \quad p = 0, \quad q = 0,$$

qui donne l'intégrale singulière $z = 0$;

$$2^\circ \quad z - \frac{p^2}{2} = 0, \quad q = 0.$$

Les valeurs de p et q tirées de ce système vérifient l'équation $F = 0$. Cherchons si ces deux équations admettent des intégrales communes. La seconde équation nous montre que z ne dépend pas de y ; z doit alors satisfaire à la relation

$$2z - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 0,$$

d'où on tire, en intégrant,

$$z = \frac{(x - a)^2}{2}.$$

A ce second système correspond une infinité de solutions singulières. Une intégrale complète de l'équation proposée est

$$z = \frac{(x - a)^2}{2} + \frac{(y - b)^2}{3}.$$

En appliquant le procédé de Lagrange, on trouve en éliminant a et b entre cette équation et les deux équations

$$x - a = 0, \quad y - b = 0,$$

l'intégrale singulière

$$z = 0.$$

L'intégrale singulière $z = \frac{(x - a)^2}{2}$ rentre dans l'intégrale générale

de Lagrange. On l'obtient en prenant l'enveloppe des intégrales complètes pour lesquelles a est une constante et b seule varie. D'une manière générale, chaque fois qu'une équation du premier ordre est de la forme

$$aF_1^m + bF_2^n + cF_3^p = 0,$$

où m, n, p sont des nombres entiers supérieurs à un, on aura des intégrales singulières en cherchant les intégrales communes aux équations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0.$$

83. Étant donnée une équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$F(x, y, y') = 0,$$

on sait que l'élimination de y' entre cette équation et la relation

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

conduit à une équation

$$R(x, y) = 0,$$

qui représente, en général, un lieu de points de rebroussement pour les courbes intégrales (¹). M. Darboux a démontré un théorème tout à fait analogue pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Si $R(x, y, z) = 0$ est le résultat de l'élimination de p et q entre les trois équations

$$F = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0,$$

la surface $R(x, y, z) = 0$ est, EN GÉNÉRAL, le lieu des points de rebroussement des courbes caractéristiques.

Il est évident, d'abord, que cette surface, étant le lieu des sommets des cônes (N) qui ont une droite double, est indépendante du choix des axes. Cela posé, prenons pour origine un point de la surface et pour axe des z la droite double correspondante. On devra avoir $F = 0$ pour

$$x = y = z = p = q = 0;$$

(¹) Darboux, *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. IV, 1^{re} série, p. 122.

F est donc de la forme

$$F = ax + by + cz + p(a'x + b'y + c'z) + q(a''x + b''y + c''z) + \frac{Ap^2}{2} + Bpq + \frac{Cq^2}{2} + \varphi(x, y, z, p, q),$$

$\varphi(x, y, z, p, q)$ ne contenant que des termes d'un degré au moins égal au second. F ne contient pas de termes du premier degré en p et q, puisque P et Q doivent aussi s'annuler pour $x = y = z = p = q = 0$. On a alors

$$P = a'x + b'y + c'z + Ap + Bq + \frac{\partial \varphi}{\partial p},$$

$$Q = a''x + b''y + c''z + Bp + Cq + \frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

$$X = a + a'p + a''q + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$Y = b + b'p + b''q + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$Z = c + c'p + c''q + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Les équations différentielles des caractéristiques sont donc

$$\frac{dx}{dt} = a'x + b'y + c'z + Ap + Bq + \frac{\partial \varphi}{\partial p},$$

$$\frac{dy}{dt} = a''x + b''y + c''z + Bp + Cq + \frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

$$\frac{dz}{dt} = p(a'x + b'y + c'z) + q(a''x + b''y + c''z) + Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + p \frac{\partial \varphi}{\partial p} + q \frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

$$-\frac{dp}{dt} = a + a'p + a''q + p(c + c'p + c''q) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$-\frac{dq}{dt} = b + b'p + b''q + q(c + c'p + c''q) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Étudions la caractéristique qui correspond aux valeurs initiales $x = y = z = p = q = 0$ et supposons, ce qui est permis, que la valeur initiale de t soit $t = 0$. Les quantités $X + pZ$, $Y + qZ$ se

réduisent respectivement à a et b pour l'origine. Nous supposons que la normale à l'origine à la surface $R(x, y, z) = 0$ n'est pas l'axe des z , ce qui est bien le cas puisque, par hypothèse, cette surface n'est pas une intégrale singulière. Alors, une au moins des quantités a et b sera différente de zéro. Soit, par exemple, $a \neq 0$; les deux dernières équations différentielles donnent, en intégrant,

$$p = -at + \dots, \quad q = -bt + \dots,$$

on voit par suite que, pour $t = 0$, $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$ s'annulent et que $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$ se réduisent respectivement à

$$A \left(\frac{dp}{dt} \right)_0 + B \left(\frac{dq}{dt} \right)_0, \quad B \left(\frac{dp}{dt} \right)_0 + C \left(\frac{dq}{dt} \right)_0,$$

c'est-à-dire à

$$-(Aa + Bb), \quad -(Ba + Cb).$$

Les développements de x, y, z suivant les puissances croissantes de t commencent donc de la façon suivante :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}(Aa + Bb)t^2 + \dots, \\ y = -\frac{1}{2}(Ba + Cb)t^2 + \dots, \\ z = \frac{1}{3}(Aa^2 + 2Bab + Cb^2)t^3 + \dots \end{cases}$$

On en conclut que, si on prend x comme variable indépendante, les développements de y et z suivant les puissances croissantes de x commenceront de la façon suivante :

$$\begin{cases} y = h_1x + \dots \\ z = h'_1x^{\frac{3}{2}} + \dots \end{cases}$$

Ce qui montre bien que la caractéristique qui est tangente à l'origine au plan des xy a, en ce point, un point de rebroussement. Par chaque point de la surface $R(x, y, z) = 0$ il passe donc une caractéristique déterminée, ayant un rebroussement en ce point.

84. Les propriétés de l'intégrale singulière de Lagrange ont été établies (§ 79) en admettant l'existence d'une enveloppe pour les intégrales complètes. Nous allons suivre maintenant une méthode plus rigoureuse en nous servant uniquement de l'équation aux dérivées partielles elle-même. Supposons que les trois équations

$$F = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0$$

admettent une intégrale commune. Prenons pour origine un point de l'intégrale singulière, pour axe des z la normale en ce point et soit

$$z = \varphi(x, y)$$

l'équation de la surface. Si on pose

$$z = \varphi(x, y) + s',$$

cette transformation n'altère pas les relations de contact et elle change une intégrale singulière en une intégrale singulière de la nouvelle équation. On peut donc supposer que la solution singulière est le plan des xy . Nous admettrons en outre que cette solution ne satisfait pas à la relation $Z = 0$, de sorte qu'on puisse mettre l'équation proposée sous la forme

$$(20) \quad F = z - \omega(x, y, p, q) = 0,$$

$\omega(x, y, p, q)$ étant une fonction holomorphe dans le voisinage des valeurs

$$x = y = p = q = 0.$$

D'ailleurs, les équations

$$F = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0$$

devant être satisfaites par les valeurs $z = 0, p = 0, q = 0$, l'équation proposée sera de la forme

$$z = \frac{Ap^2}{2} + Bpq + \frac{Cq^2}{2} + \phi(x, y, p, q),$$

où tous les termes de ϕ sont, au moins, du second degré en p et q . Étudions les courbes caractéristiques tangentes à l'élément

$$x = y = z = p = q = 0.$$

Les équations différentielles des caractéristiques sont ici

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X - p} = \frac{-dq}{Y - q},$$

où on a posé

$$P = \frac{\partial \sigma}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial \sigma}{\partial q}; \quad X = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \sigma}{\partial y}.$$

Pour l'élément initial, tous les dénominateurs sont nuls et, par suite, les valeurs initiales des rapports $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{dq}{dx}$ sont indéterminées. Pour lever cette indétermination, introduisons une variable auxiliaire u en représentant la valeur commune de tous ces rapports par $\frac{du}{u}$ et faisons le changement de variables suivant :

$$p = p'u, \quad q = q'u.$$

En remarquant que u sera en facteur dans $\sigma(x, y, p, q)$, on peut poser

$$\sigma(x, y, p, q) = u^2 \sigma'(x, y, p', q'),$$

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial x} = X', \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial y} = Y', \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial p'} = P', \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial q'} = Q'.$$

On aura

$$X = u^2 X', \quad Y = u^2 Y',$$

$$P = u^2 P' \frac{\partial p'}{\partial p} = u P', \quad Q = u Q'.$$

Les équations différentielles des caractéristiques deviennent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{du} = P', \quad \frac{dy}{du} = Q', \quad \frac{dz}{du} = u \{ p' P' + q' Q' \}, \\ \frac{dp'}{du} = -X', \quad \frac{dq'}{du} = -Y', \end{array} \right.$$

et, pour l'élément initial, les seconds membres ne sont pas tous nuls. Nous pouvons choisir arbitrairement les valeurs initiales de p' et q' , car, quelles que soient ces valeurs, on aura toujours $p = 0$, $q = 0$ pour $u = 0$. Soient α et β ces valeurs initiales; on a

$$P' = Ap' + Bq' + \dots,$$

$$Q' = Bp' + Cq' + \dots,$$

et, par suite, les valeurs initiales de P' et Q' sont $A\alpha + B\beta$ et

$B\alpha + C\beta$. On en conclut que les développements de x et y ordonnés suivant les puissances croissantes de u commencent de la façon suivante :

$$\begin{cases} x = (A\alpha + B\beta)u + \dots, \\ y = (B\alpha + C\beta)u + \dots, \\ z = ku^3 + \dots \end{cases}$$

Ceci nous montre qu'il existe non seulement une caractéristique tangente en chaque point à la solution singulière, mais bien une infinité. Toutes ces caractéristiques paraissent dépendre de deux paramètres arbitraires, mais en réalité elles ne dépendent que du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$, car les équations différentielles ne changent pas si on remplace u par ku , k étant une constante quelconque. Le coefficient angulaire de la tangente à la caractéristique à l'origine dans le plan des xy est

$$\frac{B\alpha + C\beta}{A\alpha + B\beta}.$$

Si donc $B^2 - AC$ n'est pas nul, cette tangente peut prendre toutes les positions possibles dans le plan des xy autour de l'origine et il existe une caractéristique tangente à toute droite passant par l'origine dans le plan des xy .

Soient

$$x_0 = \varphi(v), \quad y_0 = \psi(v), \quad z_0 = 0$$

les équations d'une courbe quelconque située sur la surface singulière $z = 0$. Par tout point de cette courbe passent une infinité de caractéristiques tangentes au plan des xy . Comment faut-il associer ces caractéristiques pour qu'elles forment une surface intégrale? Soit

$$\begin{cases} x = f_1\left(x_0, y_0, \frac{\beta}{\alpha}, u\right), \\ y = f_2\left(x_0, y_0, \frac{\beta}{\alpha}, u\right), \\ z = f_3\left(x_0, \dots\right), \\ p = f_4\left(x_0, \dots\right), \\ q = f_5\left(x_0, \dots\right), \end{cases}$$

L'intégrale générale des équations différentielles des caractéristiques.
Nous savons que ces fonctions vérifient l'équation

$$\omega(x, y, p, q) - z = 0.$$

De plus, on a

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Pour que l'on ait une intégrale, il suffira que l'on ait

$$\frac{\partial z}{\partial v} = p \frac{\partial x}{\partial v} + q \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Poseons

$$U = \frac{\partial z}{\partial v} - p \frac{\partial x}{\partial v} - q \frac{\partial y}{\partial v};$$

on a

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - p \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - q \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

D'ailleurs, puisque

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - p \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - q \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u},$$

il vient

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Remplaçons dans cette expression $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial p}{\partial u}$, $\frac{\partial q}{\partial u}$ par P , Q , $-(X - p)$, $-(Y - q)$ et il vient

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{1}{u} \left\{ P \frac{\partial p}{\partial v} + Q \frac{\partial q}{\partial v} + X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} - p \frac{\partial x}{\partial v} - q \frac{\partial y}{\partial v} \right\},$$

d'où, en tenant compte de la relation $\omega(x, y, p, q) = z$,

$$(21) \quad \frac{\partial U}{\partial u} = \frac{1}{u} U$$

et

$$U = U_0 e^{\frac{z}{u}}.$$

Comme U_0 est toujours nul pour les valeurs initiales $x^0 = 0, y^0 = 0, q^0 = 0$, il semblerait d'après cela qu'en associant les caractéristiques tangentes au plan des xy suivant une loi arbitraire, on obtient toujours une intégrale. Mais nous sommes ici dans un cas où l'objec-

tion de M. Bertrand s'applique, car le facteur $e^{\int_0^u \frac{du}{u}}$ est infini. Donc pour que U soit nul, il ne suffit pas que U_0 le soit. En intégrant l'équation (21), il vient

$$U = Cu.$$

Pour que U soit nul, il faut donc avoir $C = 0$. Or,

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial u} \right)_0,$$

ou encore

$$C = - \left(\frac{\partial p}{\partial u} \right)_0 \frac{\partial x_0}{\partial v} - \left(\frac{\partial q}{\partial u} \right)_0 \frac{\partial y_0}{\partial v}.$$

Les développements de p et de q commencent par des termes de la forme

$$p = \alpha u + \dots, \quad q = \beta u + \dots$$

La condition $C = 0$ prend donc la forme

$$\alpha \frac{\partial x_0}{\partial v} + \beta \frac{\partial y_0}{\partial v} = 0.$$

Cette condition détermine la valeur du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ tout le long de la courbe donnée. Il existe donc une intégrale différente de $z = 0$ et tangente à l'intégrale singulière le long d'une courbe quelconque tracée sur cette surface.

La condition précédente est vérifiée, en particulier, si on prend $x_0 = C^0, y_0 = C^0$. On en conclut que toutes les caractéristiques qui passent par un point de la surface singulière engendrent une surface intégrale, tangente en ce point à la surface singulière. Cette intégrale joue le même rôle que l'intégrale complète dans la théorie de Lagrange. Nous retrouvons ainsi, par une voie plus rigoureuse, les propriétés fondamentales que nous avons reconnues plus haut à l'intégrale singulière.

REMARQUE. — Si dans l'équation

$$z = w(x, y, p, q)$$

on fait la substitution

$$z = s'^2,$$

s'^2 se met en facteur et la nouvelle équation n'admet plus la solution $s' = 0$, qui se trouve ainsi éliminée de l'équation.

Nous n'avons examiné, dans ce qui précède, que les hypothèses les plus générales où Z et $B^2 - AC$ ne sont pas nuls. Pour une étude plus complète, nous renverrons au Mémoire de M. Darboux.

85. Nous terminerons ces considérations sur les intégrales singulières en les appliquant aux équations qui se décomposent en plusieurs équations linéaires. Soit

$$(22) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

une équation du premier ordre où F désigne une fonction décomposable en n facteurs linéaires en p, q

$$F = (u_1 p + v_1 q - w_1) (u_2 p + v_2 q - w_2) \dots (u_n p + v_n q - w_n).$$

Le cône (T) relatif à un point quelconque M de l'espace se compose des n droites D_1, D_2, \dots, D_n qui passent en ce point et ont pour paramètres directeurs $u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; \dots; u_n, v_n, w_n$. Car l'équation (22) exprime que le plan tangent à une surface intégrale qui passe en M contient une de ces n droites. Les courbes caractéristiques forment, dans ce cas, non plus un complexe, mais seulement une congruence, car par tout point de l'espace il en passe n seulement. Ceci semble en contradiction avec les résultats généraux que nous avons trouvés plus haut. Mais il est aisé de se rendre compte que si, au lieu de considérer les courbes caractéristiques seules, on considère l'ensemble formé par une courbe et une développable caractéristique, cet ensemble dépend de trois paramètres arbitraires. En effet, soient

$$f(x, y, z) = a, \quad \varphi(x, y, z) = b$$

les équations de la congruence formée par les courbes caractéristiques. Pour avoir une surface intégrale, on établit entre les deux

paramètres une relation $a = \Pi(b)$ et l'équation

$$f = \Pi(\varphi)$$

donne une surface intégrale. L'équation du plan tangent à cette surface au point x, y, z est

$$\begin{aligned} (X - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial f}{\partial z} \\ = c \left\{ (X - x) \frac{\partial \Pi}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial \Pi}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right\}. \end{aligned}$$

en posant

$$c = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(23) \quad \frac{(X - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial f}{\partial z}}{(X - x) \frac{\partial \Pi}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial \Pi}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial \Pi}{\partial z}} = c.$$

On voit que le plan tangent ne dépend que du paramètre c . La forme même de l'équation (23) nous montre que si on considère un point M d'une courbe caractéristique C , par laquelle passent quatre surfaces intégrales S_1, S_2, S_3, S_4 , le rapport anharmonique des quatre plans tangents à ces quatre surfaces au point M est égal au rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes de c . Tout le long d'une courbe caractéristique c gardant la même valeur, on en conclut que le rapport anharmonique des quatre plans tangents est indépendant de la position du point M sur la courbe C . Si donc on se donne trois surfaces intégrales S_1, S_2, S_3 , passant par la caractéristique C et le plan tangent en un point de C à la quatrième surface S_4 , le plan tangent à S_4 en tous les autres points de C sera déterminé. Donc à chaque valeur de c correspond une développable caractéristique passant par la courbe C . A toute caractéristique on peut associer une infinité de développables caractéristiques dépendant d'un paramètre c .

Cherchons les solutions singulières de l'équation (22). Le cône des normales se compose dans ce cas du système des plans P_1, P_2, \dots, P_n perpendiculaires aux droites D_1, D_2, \dots, D_n . Si les droites D_1, D_2, \dots, D_n

sont distinctes, les seules droites doubles du cône des normales sont les intersections des plans P_1, P_2, \dots, P_n , pris deux à deux. Pour qu'une intégrale soit singulière, il faut que le plan tangent en chaque point soit perpendiculaire à l'une de ces droites d'intersection, c'est-à-dire contienne deux des droites D_1, D_2, \dots, D_n . Ce plan tangent sera par exemple le plan MD_1D_2 : il sera donc parfaitement déterminé. En général, il n'y aura pas d'intégrale singulière de cette nature, car les plans MD_1D_2 sont parfaitement déterminés quand on se donne le point M , et il n'y aura pas en général, comme nous l'avons vu, de surface tangente en chacun de ces points au plan MD_1D_2 correspondant; une telle intégrale rentre d'ailleurs dans l'intégrale générale; elle s'en distingue seulement en ce qu'elle admet un double mode de génération par les courbes de la congruence.

Si deux des droites D_1, D_2, \dots, D_n sont confondues, par exemple D_1 et D_2 , toute droite située dans le plan P_1 sera une génératrice double du cône des normales. On cherchera donc le lieu des points de l'espace pour lesquels deux des droites D_1, D_2, \dots, D_n sont confondues et, si ce lieu est tel qu'en chaque point la droite double correspondante soit située dans le plan tangent, ce lieu sera une intégrale singulière.

Il est aisé de voir que, si la congruence des courbes caractéristiques admet une surface focale, cette surface focale sera une intégrale singulière de la seconde catégorie. Soient, en effet,

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \quad \varphi(x, y, z, a, b) = 0$$

les équations de la congruence. On obtient la surface focale en adjoignant à celles-ci l'équation

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(a, b)} = 0.$$

Soit alors x, y, z un point de cette surface. Pour tout déplacement sur cette surface on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial a} da + \frac{\partial \varphi}{\partial b} db = 0,$$

ou, en éliminant da , db entre ces deux équations, ce qui est possible puisque

$$\frac{D(f, g)}{D(a, b)} = 0,$$

on a

$$\frac{\partial g}{\partial b} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right\} - \frac{\partial f}{\partial b} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \right\} = 0.$$

Cette relation est vérifiée, en particulier, pour tout déplacement sur la courbe de la congruence qui passe en ce point, car pour cette courbe on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz &= 0. \end{aligned}$$

Le plan tangent à la surface focale contient donc la tangente à la caractéristique. Cette surface focale est donc une intégrale de l'équation linéaire. D'ailleurs, c'est une intégrale singulière, car, pour tout point de cette surface, deux des courbes de la congruence sont venues se confondre et, par conséquent, les m droites D ne seront pas distinctes.

EXEMPLE 1. — Considérons l'équation

$$(94) \quad (pz - x)^2 - q^2(x^2 + z^2 - 1) = 0,$$

qui peut s'écrire

$$pz - x = \pm q \sqrt{x^2 + z^2 - 1}.$$

Les caractéristiques satisfont au système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} = \frac{dy}{\pm \sqrt{x^2 + z^2 - 1}},$$

dont on a immédiatement une intégrale première

$$z = ax.$$

Les caractéristiques sont donc des courbes planes dont le plan passe par Oy . Par tout point de l'espace, il passe deux caractéristiques

situées dans le plan déterminé par ce point et l'axe des y . Les plans passant par Oy sont donc des intégrales singulières de la première catégorie. Pour avoir les intégrales de la seconde catégorie, cherchons le lieu des points pour lesquels deux droites D sont confondues. Ce lieu est le cylindre

$$x^2 + z^2 - 1 = 0,$$

et la fonction

$$s = \sqrt{1 - x^2},$$

définie par cette équation, ne satisfait pas à l'équation (24). Il n'y a donc pas d'intégrale singulière de la seconde catégorie. Il est aisé de vérifier que les caractéristiques sont données par les deux équations

$$\begin{cases} z = ax, \\ y = \sqrt{x^2 + z^2 - 1} - \arctg \sqrt{x^2 + z^2 - 1} + b, \end{cases}$$

et que le cylindre

$$x^2 + z^2 - 1 = 0$$

est le lieu des points de rebroussement de ces caractéristiques.

Exemple II. — Soit l'équation

$$[p(x^2 + z^2 - 1) + qxy]^2 = q^2(1 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Cette équation exprime que, si on coupe le plan tangent au point (x, y, z) par le plan $Z = z$, la droite d'intersection est tangente à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Les caractéristiques sont donc des droites parallèles au plan des xy et tangentes à la sphère. Tout plan $z = h$ est une intégrale singulière de la première catégorie et la sphère elle-même est une intégrale singulière de la seconde catégorie (§ 18).

REMARQUE. — Étant donnée une congruence de courbes

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \quad \varphi(x, y, z, a, b) = 0,$$

la surface obtenue en joignant à ces équations la relation

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(a, b)} = 0,$$

ou surface focale de la congruence, est tangente, comme on sait, à chacune des courbes de cette congruence. Il semblerait, d'après cela, que toute équation aux dérivées partielles du premier ordre qui se décompose en plusieurs équations linéaires doit admettre une intégrale singulière, la surface focale de la congruence formée par les courbes caractéristiques. Mais l'existence de cette surface focale est évidemment subordonnée à certaines conditions de continuité pour les fonctions f et φ , conditions qui se trouvent remplies dans la théorie ordinaire des congruences, où l'on suppose, en général, ces fonctions algébriques. Mais si ces courbes sont définies par leurs équations différentielles

$$F(x, y, z, y', z') = 0, \quad \Phi(x, y, z, y', z') = 0,$$

où

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad z' = \frac{dz}{dx},$$

les fonctions F et Φ étant quelconques, les courbes intégrales n'admettent plus d'une façon normale de surface focale et la surface obtenue en éliminant y' et z' entre les trois équations

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \frac{D(F, \Phi)}{D(y', z')} = 0,$$

est, en général, le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales (¹).

Exercices.

1. Trouver les surfaces dont le plan tangent en chaque point M fait un angle constant avec la droite qui joint le point M à un point fixe O .

2. Trouver les surfaces dont les normales sont tangentes à une sphère.

(MORSE.)

3. Trouver les surfaces dont les normales sont tangentes à un cône de révolution.

(MORSE.)

¹) Voir, pour la démonstration, *American Journal of Mathematics*, vol. XI, p. 302.

4. Si les caractéristiques d'une équation non linéaire sont des lignes droites, ces droites sont les tangentes d'une surface non développable et l'équation est de la forme $F(p, q, z - px - qy) = 0$.

5. Trouver toutes les équations dont les caractéristiques sont situées sur des sphères concentriques.

6. Trouver toutes les équations pour lesquelles les développables caractéristiques sont des cylindres ayant leurs génératrices parallèles à un plan fixe. En déduire les équations pour lesquelles les développables caractéristiques sont des cônes ayant leurs sommets sur une droite fixe.

(MORSE.)

7. Les caractéristiques de l'équation

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x} p + \frac{\partial H}{\partial y} q - \frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 = (1 + p^2 + q^2) \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - 1 \right),$$

où H est une fonction de x, y, z , sont des lignes géodésiques des surfaces intégrales.

(SOPHUS LIE.)

8. On appelle complexe tétraédral tout complexe formé de droites qui coupent les quatre faces d'un tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Trouver les surfaces tangentes en chacun de leurs points au cône du complexe tétraédral qui a son sommet en ce point.

Étant donnés deux complexes tétraédraux ayant même tétraèdre fondamental, les équations aux dérivées partielles correspondantes admettent une infinité d'intégrales communes.

(SOPHUS LIE.)

CHAPITRE X

Théorie générale de Lie.

88. Dans une série de Mémoires publiés dans les recueils de l'Académie de Christiania et dans les *Mathematische Annalen*, M. Sophus Lie a repris la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre à un nouveau point de vue très général ⁽¹⁾. Ces recherches sont basées sur une définition nouvelle de l'intégrale, dont on a déjà dit quelques mots (§ 50), mais qui mérite d'être étudiée en détail.

Considérons d'abord une équation différentielle du premier ordre

$$(1) \quad f(x, y, p) = 0, \quad \text{où} \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

Nous appellerons *élément* (x, y, p) l'ensemble d'un point x, y et d'une droite de coefficient angulaire p passant par ce point, et *intégrale* ⁽²⁾ de l'équation (1) tout système simplement infini d'éléments, c'est-à-dire dépendant d'un seul paramètre variable, vérifiant l'équation (1) et la relation

$$(2) \quad dy = p dx.$$

Soit

$$x = \varphi_1(u), \quad y = \varphi_2(u), \quad p = \phi(u),$$

une telle intégrale; si φ_1 et φ_2 ne sont pas des constantes, la relation (2)

⁽¹⁾ Voir en particulier les Mémoires suivants: *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, insbesondere aber eine Classification derselben* (Nachrichten de Göttingue, 1872). — *Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* (Mathematische Annalen, t. IX, p. 245-296; *ibid.*, t. XI, p. 484-537).

⁽²⁾ Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, traduction Benoist, t. III, p. 452.

exprime que p est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe C , lieu du point x, y , dont on obtient l'équation en éliminant u entre les deux équations

$$x = \varphi_1(u), \quad y = \varphi_2(u).$$

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de cette courbe. La fonction y de x définie par cette équation sera une intégrale au sens ordinaire du mot. Un élément de l'intégrale est formé par un point de la courbe C et la tangente en ce point, et l'intégrale se compose de la courbe C et de l'ensemble de ses tangentes.

Mais on satisfait aussi à l'équation (2) en prenant $x = x_0, y = y_0$, x_0, y_0 étant constants, $p = u$. Si donc l'équation (1) est vérifiée pour $x = x_0, y = y_0$, quel que soit p , les formules

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad p = u$$

représenteront encore une intégrale, d'après la nouvelle définition. Cette intégrale se compose, comme on le voit, du point M de coordonnées x_0, y_0 , et de toutes les droites qui passent par ce point.

Cette extension de la définition de l'intégrale permet d'expliquer certaines anomalies qui se présentent dans la théorie des équations différentielles. Supposons, par exemple, qu'une équation différentielle admette pour intégrale une droite Δ , et transformons cette équation par polaires réciproques. À toute intégrale de l'équation proposée correspondra une intégrale de l'équation transformée : à la droite Δ correspondra un point. Il semble donc, au premier abord, que l'intégrale correspondant à Δ disparaît. Avec la définition nouvelle, ceci s'explique : à la droite Δ correspond un point P ; à tout point M situé sur Δ correspond une droite D passant par P . Quand M décrit la droite Δ , la droite D tourne autour du point P : on voit donc qu'à l'intégrale Δ correspond une intégrale composée du point P et de toutes les droites qui y passent.

Ainsi, considérons l'équation de Clairaut

$$(A) \quad y - px = f(p).$$

Si on fait la transformation de Legendre

$$p = X, \quad y - px = Y,$$

on trouve l'équation

$$(B) \quad Y = f(X),$$

équation qui ne contient plus de dérivées et qui, par conséquent, n'admet qu'une solution, tandis que l'équation (A) en admet une infinité. Ce paradoxe s'explique en remarquant que l'intégrale générale de l'équation (A) se compose de toutes les tangentes à une certaine courbe C qui est elle-même une intégrale singulière. À la courbe C correspond, par la transformation par polaires réciproques, une courbe C' représentée par l'équation (B) elle-même, et l'intégrale générale de cette équation se composera d'un point quelconque de la courbe C' et de toutes les droites qui y passent. La courbe C' est, d'ailleurs, une intégrale singulière.

87. Soit maintenant

$$(3) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Nous appellerons *intégrale* tout système doublement infini d'éléments vérifiant la relation (3) et la relation

$$(4) \quad dz = p dx + q dy,$$

un élément étant toujours représenté géométriquement par l'ensemble d'un point (x, y, z) et d'un plan de coefficients angulaires p, q passant par ce point. Soit

$$\begin{aligned} x &= f_1(u, v), & y &= f_2(u, v), & z &= f_3(u, v), \\ p &= \varphi_1(u, v), & q &= \varphi_2(u, v) \end{aligned}$$

un tel système. Supposons d'abord que les trois déterminants

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(f_1, f_3)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(f_2, f_3)}{D(u, v)}$$

ne soient pas nuls à la fois. Alors, l'élimination de u et v entre les trois équations

$$(5) \quad x = f_1, \quad y = f_2, \quad z = f_3,$$

conduira à une seule relation

$$z = \psi(x, y),$$

et la relation (4) prouve que l'on aura

$$p = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

On trouve bien, dans ce cas, une intégrale au sens ordinaire du mot. Un élément quelconque de l'intégrale se compose d'un point de la surface $z = \psi$ et du plan tangent en ce point.

Si les trois déterminants précédents sont nuls à la fois, l'élimination de u et v entre les trois équations (5) conduira au moins à deux relations distinctes entre z , x , y . Supposons d'abord qu'elle conduise à deux relations seulement. On pourra alors choisir les paramètres u et v de façon que x , y , z ne dépendent que d'un seul paramètre

$$x = F_1(u), \quad y = F_2(u), \quad z = F_3(u),$$

et la relation (4) devient

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Les coordonnées du point (x, y, z) ne dépendant que d'une seule variable indépendante u , ce point décrit une courbe C et la relation précédente montre que le plan de coefficients angulaires p , q doit contenir la tangente à cette courbe. Un élément de l'intégrale se compose d'un point de la courbe C et d'un plan passant par la tangente en ce point. Un pareil système d'éléments est bien doublement infini, mais il ne conduit plus à une intégrale proprement dite.

Enfin, si les équations (5) conduisent à trois relations distinctes entre x , y , z , on en déduit pour ces variables des valeurs déterminées

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

et la relation (4) est identiquement vérifiée. Un élément de l'intégrale se compose du point $M(x_0, y_0, z_0)$ et d'un plan quelconque passant par ce point; ce système est encore doublement indéterminé.

Considérons, par exemple, l'équation de Clairaut généralisée

$$z = px + qy + f(p, q).$$

La transformation de Legendre

$$p = X, \quad q = Y, \quad z - px - qy = Z$$

conduit à l'équation

$$Z = f(X, Y),$$

qui ne contient plus de dérivées. L'équation de Clairaut admet comme intégrale complète l'ensemble des plans tangents à une certaine surface non développable Z . À cette surface Z la transformation par polaires réciproques fait correspondre une nouvelle surface Σ' . À l'intégrale complète précédente correspond une intégrale formée d'un point quelconque de Σ' et de tous les plans qui y passent. L'intégrale générale se composera d'une courbe arbitraire située sur Σ' et de l'ensemble des plans tangents à cette courbe. Elle correspond à une développable circonscrite à Z . Enfin, la surface Σ' elle-même, qui est la seule intégrale proprement dite, est une intégrale singulière.

83. La définition de Lie a donc l'avantage de donner plus de généralité à la théorie. C'est aussi ce qu'on reconnaît en reprenant la méthode de la variation des constantes. Soit

$$V(x, y, z, a, b) = 0$$

une intégrale complète de l'équation (3), qui sera obtenue en éliminant a et b entre les relations

$$(6) \quad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

On reconnaît comme plus haut (§ 39) que le système des équations (3) et (4) peut être remplacé par le système des équations (4) et (6), où on regarde z, x, y, p, q, a, b comme des fonctions à déterminer de deux variables indépendantes. Du système (6) on déduit ensuite

$$\frac{\partial V}{\partial a} da + \frac{\partial V}{\partial b} db = 0,$$

et on obtient la solution générale de cette équation en posant

$$b = \varphi(a), \quad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} \varphi'(a) = 0,$$

$\varphi(a)$ désignant une fonction arbitraire de a . Les trois équations

$$(7) \quad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} \varphi'(a) = 0, \quad b = \varphi(a)$$

permettront d'exprimer x, y, z, a, b en fonction de deux paramètres arbitraires et les dernières équations (6) donneront ensuite p et q . Nous avons supposé, dans la théorie générale, que l'élimination de a et b entre les trois équations (7) conduisait à une seule relation entre x, y, z ; s'il en est ainsi, cette relation donnera une intégrale proprement dite. Mais il peut se faire que, pour certaines formes particulières de la fonction φ , l'élimination de a et b conduise à plusieurs relations entre x, y, z . Les raisonnements que l'on vient de faire prouvent que l'on obtiendra toujours⁽¹⁾, sauf les cas d'incompatibilité, une intégrale au sens de Lie.

Prenons, par exemple, l'équation

$$z - px - qy = 0,$$

qui admet l'intégrale complète

$$z = ax + by;$$

on aura l'intégrale générale en lui adjoignant les deux équations

$$b = \varphi(a), \quad x + y\varphi'(a) = 0.$$

Si on pose

$$\varphi(a) = ma,$$

on est conduit aux trois équations

$$z = a(x + my), \quad b = ma, \quad x + my = 0.$$

L'élimination de a et de b donne donc les deux relations

$$z = 0, \quad x + my = 0;$$

on obtient une intégrale qui se compose de l'ensemble d'une droite et des plans qui la contiennent.

REMARQUE. — Dans le cas des équations linéaires il y a toujours une infinité d'intégrales de la seconde catégorie. Soit, en effet,

$$Pp + Qq = R$$

(1) Il faut encore laisser de côté les cas exceptionnels où l'élimination de a et b entre les équations (6) et (7) conduirait à plus de trois relations entre x, y, z, p, q .

sont nula, il viendra

[illegible]

Réciproquement, les $(n + 1)$ équations (9) et (10) entraînent la relation (8). On est donc conduit à la conclusion suivante :

Si on a, entre les différentielles des $2n + 1$ variables $z, x_1, p_1, \dots, x_n, p_n$, la relation (8), il existe au moins $n + 1$ relations distinctes entre ces variables et, s'il n'en existe pas davantage, il suffit, pour les avoir toutes, de connaître celles qui sont indépendantes de p_1, \dots, p_n .

Désignons, d'une manière générale, par M toute multiplicité composée d'éléments satisfaisant à la relation (8). L'ordre d'une telle multiplicité est au plus égal à n , et la multiplicité la plus générale M_n est représentée par les équations (9) et (10), où les fonctions $\phi, \phi_1, \phi_2, \dots$ sont arbitraires. On obtiendra une multiplicité M_q ($q < n$) en ajoutant aux équations (9) et (10) $n - q$ relations quelconques et il est clair, d'après ce qui précède, qu'on aura ainsi toutes les multiplicités M_q .

Nous emploierons encore, pour abréger, les expressions suivantes, empruntées à la géométrie. Considérons x, x_1, \dots, x_n comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $(n + 1)$ dimensions; nous appellerons *multiplicité ponctuelle* tout ensemble de points dont les coordonnées vérifient un certain nombre de relations. Une multiplicité ponctuelle, d'ordre r , P_r , sera définie par $n + 1 - r$ relations

$$p_1(s_1, x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad p_{n+1-r}(s_1, x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Un plan sera une multiplicité ponctuelle à n dimensions représentée par une équation linéaire telle que

$$Z - z = p_1 (X_1 - x_1) + \dots + p_n (X_n - x_n),$$

et p_1, \dots, p_n seront les coefficients angulaires de ce plan. Nous

Cette définition donne lieu aux remarques suivantes :

1° On peut toujours, par un changement de variables convenable, ramener une intégrale quelconque à une intégrale proprement dite. En effet, considérons une intégrale quelconque définie par les relations (9) et (10). Toutes les variables pourront s'exprimer au moyen des variables $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, x_k, \dots, x_n$. Posons

$$\begin{aligned} x'_1 &= p_1, & \dots, & & x'_{k-1} &= p_{k-1}, & & x'_k &= x_k, & \dots, & & x'_n &= x_n, \\ p'_1 &= -x_1, & \dots, & & p'_{k-1} &= -x_{k-1}, & & p'_k &= p_k, & \dots, & & p'_n &= p_n, \\ & & & & z' &= z - p_1 x_1 - \dots - p_{k-1} x_{k-1}; \end{aligned}$$

la relation (8) devient

$$dz' = p'_1 dx'_1 + \dots + p'_n dx'_n,$$

et toute équation de la forme

$$F(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0$$

se change en une nouvelle équation de même forme

$$F_1(z', x'_1, \dots, x'_n, p'_1, \dots, p'_n) = 0.$$

Toute intégrale de la première équation $F = 0$ donnera donc, par la transformation précédente, une intégrale de la seconde équation $F_1 = 0$. En particulier, si on applique cette transformation à l'intégrale représentée par les équations (9) et (10), il est clair qu'il y aura une seule relation entre z', x'_1, \dots, x'_n ; la fonction z' sera donc une intégrale proprement dite de l'équation du premier ordre

$$F\left(z' - x'_1 \frac{\partial z'}{\partial x'_1} - \dots - x'_{k-1} \frac{\partial z'}{\partial x'_{k-1}}, -\frac{\partial z'}{\partial x'_1} - \dots - \frac{\partial z'}{\partial x'_{k-1}}, x'_1, \dots, x'_n; x'_1, \dots, x'_{k-1}, \frac{\partial z'}{\partial x'_1}, \dots, \frac{\partial z'}{\partial x'_n}\right) = 0.$$

2° Si les q équations (11) ne renferment pas les variables p_1, \dots, p_n , on obtient immédiatement toutes les intégrales communes. Il suffit d'ajouter aux équations (11) s équations arbitraires entre z, x_1, \dots, x_n ($q + s \leq n + 1$) et de prendre la multiplicité M_n déduite de la multiplicité ponctuelle ainsi obtenue.

3° On peut trouver, sans intégration, toutes les multiplicités M dont l'ordre est inférieur à n et dont les éléments vérifient une

§1. La définition de Lie permet de généraliser la théorie des intégrales complètes. Considérons une multiplicité ponctuelle

d'ordre $n + 1 - k$, dépendant de k paramètres arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ($k \leq n$). De cette multiplicité ponctuelle on déduit une multiplicité M_k bien déterminée, définie par $n + 1$ équations qui contiennent les k paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. L'élimination de ces k paramètres conduira en général à $n + 1 - k$ relations distinctes entre $z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$, et nous allons voir qu'on pourra obtenir l'intégrale générale de ce système d'équations simultanées au moyen des fonctions f_1, \dots, f_k .

[illegible]

(4) C'est uniquement pour simplifier les calculs que nous faisons cette hypothèse; le raisonnement s'étend de lui-même au cas où les équations ne sont pas résolues, comme on le verra au chapitre suivant.

On trouve donc une équation linéaire, et la méthode d'intégration que l'on déduit de ce qui précède est identique à la méthode du chapitre II. Nous voyons ainsi que les équations linéaires sont caractérisées par cette propriété d'admettre une intégrale complète repré-

sentée par n équations entre les variables z, x_1, \dots, x_n ou, si l'on veut, formée par des courbes et l'ensemble de leurs plans tangents.

Dans le cas de $n = 2$, nous avons ainsi deux catégories d'équations, les équations générales et les équations linéaires. Si n est supérieur à 2, nous aurons en outre $n - 2$ catégories d'équations intermédiaires, qui disparaissent pour $n = 2$, obtenues au moyen d'une intégrale complète représentée par 2, 3, ..., $n - 1$ équations entre z, x_1, \dots, x_n . Supposons, par exemple, qu'on prenne $n - 1$ relations entre ces variables,

$$z = \psi(x_{n-1}, x_n, a_1, \dots, a_n), \quad x_1 = \phi_1(x_{n-1}, \dots), \quad \dots, \\ x_{n-2} = \phi_{n-2}(x_{n-1}, \dots),$$

on obtiendra l'équation aux dérivées partielles correspondantes en éliminant a_1, \dots, a_n entre ces relations et les suivantes

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}} - p_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{n-1}} - \dots - p_{n-2} \frac{\partial \phi_{n-2}}{\partial x_{n-1}} - p_{n-1} = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_n} - p_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} - \dots - p_{n-2} \frac{\partial \phi_{n-2}}{\partial x_n} - p_n = 0.$$

Si on tire a_1, \dots, a_{n-1} des premières équations et qu'on les porte dans les deux dernières, on aura deux équations linéaires entre lesquelles il faudra encore éliminer a_n . Remarquons que ces deux équations linéaires ne sont pas quelconques; elles admettent une intégrale complète commune dépendant des $n - 1$ constantes arbitraires a_1, \dots, a_{n-1} . De même l'équation provenant de h relations entre z, x_1, \dots, x_n s'obtiendra en éliminant $n - h$ constantes entre $n - h + 1$ équations linéaires qui admettent une intégrale commune dépendant de h constantes arbitraires. On a donné à ces équations le nom d'équations semi-linéaires. On aura de même des systèmes d'équations semi-linéaires en partant d'une intégrale complète représentée par plusieurs équations entre z, x_1, \dots, x_n et dépendant de moins de n paramètres arbitraires.

§2. Étant donnée une équation

$$F(z, x_n, p_n) = 0,$$

nous appellerons encore caractéristique tout système simplement

infini d'éléments satisfaisant aux équations différentielles

$$\frac{dx_i}{P_i} = \frac{-dp_k}{X_k + p_k Z} = \frac{dz}{P_1 p_1 + \dots + P_n p_n} = dt, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Il est aisé de montrer que toute intégrale est un lieu de caractéristiques. Nous avons donné deux démonstrations de cette proposition dans le cas de l'intégrale ordinaire. La démonstration basée sur la considération de l'intégrale complète (§ 52) s'applique mot pour mot aux intégrales nouvelles de M. Lie. Le seul emprunt que l'on fasse à la théorie générale est le suivant : toute équation du premier ordre admet une intégrale complète, représentée par une seule équation entre z, x_1, \dots, x_n . La seconde démonstration que nous avons donnée (§ 54) ne s'applique qu'aux intégrales ordinaires; mais il suffit de faire la transformation indiquée (§ 90) pour être ramené à ce cas, car cette transformation ne change pas le système d'équations différentielles des caractéristiques, comme il est aisé de s'en rendre compte.

Soient

$$\begin{cases} x_i = f_i(t, z^0, x_i^0, p_i^0), \\ z = f(t, z^0, x_i^0, p_i^0), \\ p_k = \varphi_k(t, z^0, x_i^0, p_i^0), \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

les équations de la caractéristique issue de l'élément z^0, x_i^0, p_i^0 , vérifiant la relation

$$F(z^0, x_i^0, p_i^0) = 0.$$

Ces valeurs initiales étant des fonctions de v variables indépendantes u_1, \dots, u_v , on a, d'après un calcul déjà fait (p. 117),

$$F(z, x_i, p_k) = F(z^0, x_i^0, p_i^0) = 0,$$

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = (dz^0 - p_1^0 dx_1^0 - \dots - p_n^0 dx_n^0) e^{-\int z dt},$$

la lettre d désignant les différentielles quand t, u_1, \dots, u_v varient, ce qui peut s'énoncer ainsi : Si on considère une multiplicité M , dont tous les éléments vérifient la relation $F = 0$, le lieu des caractéristiques issues des éléments de M , est une multiplicité M , en général d'ordre $v + 1$, dont tous les éléments vérifient la même relation.

L'intégration est donc ramenée à la détermination des multiplicités

M_{n-1} , dont les éléments vérifient la relation $F = 0$, ce qui se fait sans aucune intégration (§ 90). Il y aura encore exception pour les intégrales qui vérifient les relations $X_1 + p_1 Z = 0$, $P_1 = 0$, que nous appellerons toujours intégrales singulières.

93. Considérons maintenant un système de μ équations du premier ordre

$$(18) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_\mu = 0,$$

que nous supposons, bien entendu, distinctes et algébriquement compatibles.

THÉORÈME. — *Lorsque deux équations du premier ordre*

$$F = 0, \quad H = 0$$

ont une intégrale commune, cette intégrale vérifie l'équation

$$[F, H] = 0.$$

La démonstration donnée plus haut (§ 65) ne s'applique qu'aux intégrales proprement dites; la suivante est générale.

Soient M_n une intégrale commune et z, x_n, p_n un élément de cette intégrale. Par cet élément passe une courbe caractéristique de $F = 0$ située sur M_n , et dont tous les éléments vérifient, par suite, les deux équations

$$F = 0, \quad H = 0.$$

Le long de cette caractéristique on a

$$\frac{\frac{dx_1}{\partial F}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dz}{p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}} = dt,$$

ainsi que

$$dH = \frac{\partial H}{\partial z} dz + \sum_i \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i = 0.$$

En remplaçant dz, dx_n, dp_n par leurs valeurs dans la seconde équation, on trouve que tous les éléments de cette caractéristique vérifient la relation

$$[F, H] = 0,$$

et, par suite, tous les éléments de M_s vérifient cette relation puisque nous avons pris un élément arbitraire de M_s comme élément initial. Il est clair que la proposition est encore vraie si M_s est une intégrale singulière de $F = 0$.

Ceci nous montre que nous pourrions adjoindre au système (18) toutes celles des équations

$$[F_i, F_k] = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, \mu),$$

qui sont distinctes des premières. Mais on pourra toujours s'arranger de façon qu'en continuant de la sorte on arrive soit à un système incompatible, soit à un système en involution. Supposons, en effet, qu'on puisse résoudre certaines de ces équations par rapport à z, p_1, \dots, p_s et qu'en portant ces valeurs dans les autres équations on obtienne des relations ne contenant plus que des quantités x_r . Je dis que ces relations seront résolubles par rapport à $\mu - s - 1$ des quantités $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n$. En effet, supposons que cela ne soit pas : on pourrait alors tirer de ces relations une équation ne contenant que x_1, \dots, x_s , telle que

$$x_1 = \psi(x_2, x_3, \dots, x_s).$$

En portant cette valeur de x_1 dans l'équation qui donne p_1 , on aurait

$$p_1 = \varphi(x_2, \dots, x_s, p_{s+1}, \dots, p_n).$$

Formons l'équation

$$[p_1 - \varphi, x_1 - \psi] = 0,$$

elle se réduit à

$$1 = 0;$$

le système proposé serait par conséquent incompatible. Supposons donc qu'on ait résolu les dernières relations par rapport à $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_{p-1}$; le système (18) prendra alors la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} z = f(x_1, x_2, \dots, x_s, x_p, \dots, x_n, p_{s+1}, \dots, p_n), \\ p_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_s, x_p, \dots, x_n, p_{s+1}, \dots, p_n), \\ x_{s+1} = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_s, x_p, \dots, x_n), \\ (i = 1, 2, \dots, s), \quad (h = 1, 2, \dots, \mu - s - 1), \end{array} \right.$$

et nous pourrions le remplacer par le système équivalent

$$(19) \quad \begin{cases} z - f - x_1(p_1 - f_1) - \dots - x_r(p_r - f_r) = 0, \\ p_1 - f_1 = 0, \quad \dots, \quad p_r - f_r = 0, \\ x_{r+1} - q_1 = 0, \quad \dots, \quad x_{p-r-1} - q_{p-r-1} = 0. \end{cases}$$

Si on forme les crochets de ce nouveau système, on constate qu'ils ne contiennent aucune des variables $z, p_1, \dots, p_r, x_{r+1}, \dots, x_{p-r-1}$. Si donc ces crochets ne sont pas identiquement nuls, ils ne pourront pas donner des équations qui soient des conséquences des précédentes. On résoudra, comme précédemment, les nouvelles équations par rapport à un certain nombre des variables qu'elles contiennent et, en continuant de la sorte, on arrivera soit à un système incompatible, soit à un système pour lequel tous les crochets sont identiquement nuls, c'est-à-dire à un système en involution.

§4. Soit donc

$$(20) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_m = 0$$

un système en involution de m équations distinctes. Supposons qu'il existe une intégrale commune M_n et soit e un élément de cette intégrale. Par e passe une courbe caractéristique C_1 de $F_1 = 0$ dont tous les éléments sont situés sur M_n . Soit alors e' un élément de C_1 : par e' passe, de même, une caractéristique C_2 de $F_2 = 0$ et l'ensemble de toutes les caractéristiques C_2 issues des divers éléments e' de C_1 forme une multiplicité M_2 située sur M_n . En continuant de la sorte, on arrivera finalement à une multiplicité M'_n située sur M_n , passant par l'élément e , obtenue par la superposition successive des caractéristiques des m équations (20). Nous désignerons cette multiplicité M'_n sous le nom de *multiplicité caractéristique* du système (20) et nous pourrions énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — Toute intégrale qui passe par un élément e contient la multiplicité caractéristique M'_n issue de cet élément.

Voici comment les multiplicités caractéristiques seront définies analytiquement. Considérons le système complet d'équations linéaires suivant :

$$(21) \quad [F_1, \Phi] = 0, \quad \dots, \quad [F_m, \Phi] = 0.$$

Je dis que, si $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{2n-2m+1}$ sont $(2n-2m+1)$ intégrales distinctes et différentes de F_1, \dots, F_m , le système d'équations

$$(22) \quad F_1=0, \dots, F_m=0, \quad \Phi_1=C_1, \dots, \Phi_{2n-2m+1}=C_{2n-2m+1}$$

où $C_1, \dots, C_{2n-2m+1}$ désignent des constantes arbitraires, représente les multiplicités caractéristiques. En effet, les équations (22) définissent une multiplicité à m dimensions composée de courbes caractéristiques de chacune des équations (20) (§ 38), car les caractéristiques de l'équation $F_i=0$ sont identiques aux caractéristiques de l'équation linéaire

$$[F_i, \Phi] = 0.$$

D'ailleurs, par tout élément x^0, x^1, p^i pris sur une intégrale, c'est-à-dire satisfaisant aux relations

$$F_1^0=0, \dots, F_m^0=0,$$

il passe une multiplicité (22) dont les équations sont

$$(23) \quad F_1=0, \dots, F_m=0, \quad \Phi_1=\Phi_1^0, \dots, \Phi_{2n-2m+1}=\Phi_{2n-2m+1}^0.$$

Ceci suffit à prouver l'identité des multiplicités caractéristiques avec les multiplicités (22). Puisque toute intégrale est un lieu de multiplicités caractéristiques, il suffira d'associer convenablement ces multiplicités caractéristiques (22) pour avoir toutes les intégrales. Appelons *multiplicité intégrale* toute multiplicité M , dont les éléments vérifient les équations (20); nous avons alors le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'ensemble des caractéristiques de l'équation $F_1=0$, issues des divers éléments d'une multiplicité intégrale M , forme une nouvelle multiplicité intégrale M_{+1} .*

Il est d'abord évident (§ 92) que M_{+1} sera une intégrale de $F_1=0$; d'ailleurs, puisqu'on a

$$[F_i, F_1] = 0, \quad (i = 2, 3, \dots, m),$$

tous les éléments d'une caractéristique de $F_1=0$ vérifient l'équation $F_i=C^i$ et, comme tous les éléments de M satisfont à $F_i=0$, on en conclut que tous les éléments de M_{+1} satisfont aussi à $F_i=0$.

Cela posé, soit M_{n-m} une multiplicité intégrale du système (20) :

l'ensemble des courbes caractéristiques de $F_1 = 0$ issues des divers éléments de M_{n-m} formera encore une multiplicité intégrale M_{n-m+1} ; de même, toutes les caractéristiques de $F_1 = 0$ issues des éléments de M_{n-m+1} formeront une multiplicité intégrale M_{n-m+2} et, en continuant de la sorte, on arrivera finalement à une intégrale M_n . Ceci revient à dire que le lieu des multiplicités caractéristiques M'_n , issues des divers éléments de la multiplicité intégrale M_{n-m} , forme une intégrale M_n du système (20). D'ailleurs, il est clair que toute intégrale M_n s'obtiendra par le procédé qui vient d'être indiqué, car si on prend sur M_n une multiplicité à $n - m$ dimensions, ce sera une multiplicité intégrale M_{n-m} et les multiplicités caractéristiques issues de tous les éléments de M_{n-m} donneront évidemment M_n . On voit donc que toute intégrale du système (20) sera représentée par les équations (23) où z^0, x_i^0, p_i^0 désignent des fonctions de $n - m$ variables indépendantes vérifiant les relations

$$(24) \quad F_1^0 = 0, \dots, F_m^0 = 0, \quad \delta z^0 - p_1^0 \delta x_1^0 - \dots - p_m^0 \delta x_m^0 = 0.$$

La détermination de l'intégrale générale des équations (20) revient donc à trouver la multiplicité intégrale M_{n-m} la plus générale, et ce problème, comme nous l'avons vu, n'exige aucune intégration (§ 90).

95. On satisfait aux équations (24) en prenant pour z^0, x_i^0 des constantes et pour p_i^0 des fonctions de $(n - m)$ variables satisfaisant aux équations $F_i^0 = 0$. Le lieu des multiplicités caractéristiques issues d'un point est donc une intégrale. Ce sera, d'ailleurs, une intégrale complète du système (20), si on donne à m des constantes z^0, x_i^0 des valeurs déterminées.

Comme application de la théorie générale, proposons-nous de déterminer une intégrale, au sens ordinaire du mot, qui, pour des valeurs données de x_1, \dots, x_m , se réduise à une fonction donnée de x_{m+1}, \dots, x_n . Remarquons d'abord que les équations de la multiplicité caractéristique issue d'un élément peuvent être mises sous une forme plus commode pour la discussion. Soit z^0, x_i^0, p_i^0 un élément tel que pour cet élément le déterminant

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(p_1, p_2, \dots, p_m)}$$

soit différent de 0. On pourra alors, dans le domaine de cet élément, résoudre les m équations (21) par rapport à $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}$, et on remplacera le système complet (21) par un système jacobien, résolu par rapport à $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}$. Ce système jacobien, comme nous savons, admettra un système d'intégrales holomorphes dans le voisinage de x^0, x_1^0, p_1^0 qui, pour $x_1 = x_1^0, \dots, x_m = x_m^0$ se réduiront à $z, x_{m+1}, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$. En égalant ces intégrales à $z^0, x_{m+1}^0, \dots, p_n^0$ et résolvant les équations ainsi obtenues par rapport à z, x_{m+1}, \dots, p_n , on aura les équations de la multiplicité caractéristique sous la forme suivante, x_1, \dots, x_m désignant les variables indépendantes :

$$(25) \quad \begin{cases} x_{m+i} = f_i(x_1, \dots, x_m, z^0, x_1^0, p_1^0), \\ z = f(x_1, \dots, x_m, z^0, x_1^0, p_1^0), \\ p_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_m, z^0, x_1^0, p_1^0), \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n - m), \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Pour trouver l'intégrale qui, pour $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_m = a_m$, se réduit à une fonction holomorphe $\Phi(x_{m+1}, \dots, x_n)$ dans le domaine du point a_{m+1}, \dots, a_n , nous prendrons comme variables x_{m+1}^0, \dots, x_n^0 . Nous aurons alors les valeurs initiales suivantes :

$$x_1^0 = a_1, \quad \dots, \quad x_m^0 = a_m, \quad x_{m+1}^0 = u_{m+1}, \quad \dots, \quad x_n^0 = u_n,$$

$$z^0 = \Phi(u_{m+1}, \dots, u_n), \quad p_{m+1}^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial u_{m+1}}, \quad \dots, \quad p_n^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial u_n},$$

et les valeurs de p_1^0, \dots, p_m^0 se déduiront des équations $F_1^0 = 0, \dots, F_m^0 = 0$; nous supposons que pour ces valeurs le déterminant $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(p_1, \dots, p_m)}$ est différent de zéro.

L'intégrale cherchée sera représentée par les équations (25) où les variables indépendantes sont $x_1, \dots, x_m, u_{m+1}, \dots, u_n$. Le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(x_{m+1}, \dots, x_n)}{D(u_{m+1}, \dots, u_n)}$$

se réduit à l'unité pour

$$x_1 = a_1, \quad \dots, \quad x_m = a_m, \quad u_{m+1} = a_{m+1}, \quad \dots, \quad u_n = a_n.$$

car x_{m+1} se réduit à u_{m+1} pour $x_1 = a_1, \dots, x_m = a_m$. On pourra donc résoudre les équations $x_{m+1} = f_i$ par rapport à u_{m+1}, \dots, u_n et en portant ces valeurs dans l'expression de z , on en tirera pour z une fonction holomorphe de x_1, \dots, x_m dans le domaine du point a_1, \dots, a_m . La proposition précédente donne, comme cas particulier, le théorème énoncé à la page 179 (§ 71).

98. La méthode d'intégration précédente est une généralisation directe de la méthode de Cauchy. Elle conduit d'ailleurs aisément à la méthode de Jacobi sous sa forme générale (§ 65).

Considérons, en effet, un système de n équations en involution

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_n = 0.$$

Dans ce cas, les multiplicités caractéristiques sont à n dimensions et se confondent avec les intégrales elles-mêmes. Il suffira donc de trouver la dernière intégrale du système complet

$$[F_1, \Phi] = 0, \quad \dots, \quad [F_n, \Phi] = 0.$$

On conclut de là que, si on a un système en involution de $n + 1$ équations distinctes F_1, \dots, F_{n+1} , les équations

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_n = a_n, \quad F_{n+1} = a_{n+1}$$

représentent une intégrale commune de ce système de $n + 1$ équations. Cette intégrale, si on y regarde a_{n+1}, \dots, a_{n+1} comme des constantes arbitraires, est une intégrale complète du système des n équations

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_n = a_n;$$

par conséquent, l'intégration de ce système est ramenée à la détermination de $n - m + 1$ fonctions F_{m+1}, \dots, F_{n+1} , formant avec les premières un système en involution de $n + 1$ fonctions distinctes. On voit de plus, d'après ce qui précède, qu'il n'est pas nécessaire de pouvoir résoudre les $(n + 1)$ équations $F_i = a_i$ par rapport à z, p_1, \dots, p_n ; nous n'avons fait qu'indiquer rapidement comment on pouvait se débarrasser directement de cette restriction.

On peut même aller plus loin; si, en appliquant la méthode de

Jacobi au système en involution

$$(26) \quad F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_m = a_m$$

on arrive à un système en involution

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_m = a_m, \quad F_{m+1} = a_{m+1}, \quad \dots, \quad F_{m+n} = a_{m+n}$$

dont on puisse déterminer les caractéristiques, c'est-à-dire tel qu'on puisse intégrer le système complet

$$[F_1, \Phi] = 0, \quad \dots, \quad [F_{m+n}, \Phi] = 0,$$

le problème sera résolu, car une intégrale complète du dernier système contenant en outre les constantes a_{m+1}, \dots, a_{m+n} , donnera évidemment une intégrale complète du système proposé. L'intégration étant commencée par la méthode de Jacobi, on pourra, à chaque instant de l'opération, abandonner cette méthode et appliquer celle des caractéristiques si elle est plus avantageuse. La remarque avait déjà été faite (§ 19), mais seulement pour les équations où z ne figure pas.

La théorie générale des multiplicités caractéristiques permet, comme on voit, de déduire d'un même point de vue les différentes méthodes d'intégration.

97. Pour simplifier la théorie générale, nous avons laissé de côté certains détails sur lesquels il est utile de revenir. En définitive, toute la théorie repose sur cette proposition fondamentale que toutes les intégrales d'un système en involution de m équations qui ont un élément commun en ont m de communes. Examinons sous quelles conditions précises ce théorème est exact. Soient

$$F_1 = 0, \quad \dots, \quad F_m = 0$$

un système en involution de m équations distinctes et

$$[F_1, \Phi] = 0, \quad \dots, \quad [F_m, \Phi] = 0$$

le système complet correspondant. Je dis d'abord que les m équations de ce système sont linéairement distinctes ; pour qu'il en fût autrement, il faudrait que tous les déterminants d'ordre m contenus dans le

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(p_1, \dots, p_m)}$$
$$(27) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + a_{n+1}^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}} + \dots + a_n^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + b^1 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + c_1^1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + \dots + c_n^1 \frac{\partial \Phi}{\partial p_n} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} + a_{m+1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+1}} + \dots + a_n^m \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + b^m \frac{\partial \Phi}{\partial z} + c_1^m \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + \dots + c_n^m \frac{\partial \Phi}{\partial p_n} = 0, \end{array} \right.$$
$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx_{n+1} = a^1_{n+1} dx_1 + \dots + a^n_{n+1} dx_n, \\ \dots\dots\dots \\ dx_n = a^1_n dx_1 + \dots + a^n_n dx_n, \\ dz = b^1 dx_1 + \dots + b^n dx_n, \\ dp_1 = c^1_1 dx_1 + \dots + c^n_1 dx_n, \\ \dots\dots\dots \\ dp_n = c^1_n dx_1 + \dots + c^n_n dx_n; \end{array} \right.$$
$$x_{m+1} = \varphi_1(x_1, \dots, x_m, s^0, x_1^0, p_1^0), \dots, p_n = \psi_n(x_1, \dots, x_m, s^0, x_1^0, p_1^0),$$

et, d'après les relations établies entre les systèmes jacobiens et les systèmes absolument intégrables d'équations aux différentielles totales (§ 35), les équations précédentes représentent précisément la multiplicité caractéristique issue de l'élément x^0, x_i^0, p_i^0 . Cette multiplicité est bien à m dimensions, puisque x_1, \dots, x_m sont des variables indépendantes. Les raisonnements faits plus haut deviennent

alors parfaitement rigoureux et on peut affirmer que toute intégrale du système proposé qui contient l'élément x^0, x^1, p_1^0 , en contient une multiplicité d'ordre m , issue de celui-là.

L'application de la méthode générale donne encore lieu aux remarques suivantes :

I. — L'intégration du système en involution proposé

$$F_1 = 0, \quad \dots, \quad F_n = 0$$

est ramenée à l'intégration du système d'équations aux différentielles totales (28); d'après la manière même dont on a obtenu ce nouveau système, il admet les intégrales premières

$$F_1 = a_1, \quad \dots, \quad F_n = a_n,$$

dont on peut se servir pour diminuer de m unités le nombre des fonctions inconnues. Si on obtient l'intégrale générale de ce système complètement intégrable (28), on aura intégré par là même toutes les équations (26), où $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont des constantes quelconques. Mais si on veut intégrer seulement les équations proposées (20), on pourra profiter de cette circonstance en faisant $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ dans la transformation précédente. Dans le cas où le système proposé est de la forme (19), les deux systèmes (20) et (26) sont équivalents; mais si le système en involution proposé est quelconque, son intégration constitue, en général, un problème plus simple que celle du système (26).

II. — Étant donné un système en involution de m équations linéaires par rapport aux variables p_i , on voit facilement que les coefficients a et b dans les équations (27) et (28) ne dépendent que de s, x_1, \dots, x_n . De tout point $(s^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ il part donc une infinité de multiplicités caractéristiques, mais toutes ces multiplicités caractéristiques ont en commun une multiplicité ponctuelle d'ordre m que l'on obtiendrait en intégrant le système complètement intégrable

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_{n+1} = a'_{n+1} dx_1 + \dots + a''_{n+1} dx_n \\ \dots\dots\dots \\ dx_n = a'_n dx_1 + \dots + a''_n dx_m \\ dz = b^1 dx_1 + \dots + b^n dx_m \end{array} \right.$$

Soit P_0 cette multiplicité ponctuelle; l'intégrale, lieu des multiplicités caractéristiques issues du point $(s^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$, se composera nécessairement de la multiplicité P_0 et de l'ensemble de ses plans tangents. Ceci nous explique pourquoi, dans l'intégration des systèmes d'équations linéaires, on n'a pas besoin de tenir compte des termes en p_1, \dots, p_n dans les équations différentielles des caractéristiques.

Tout système en involution de m équations linéaires admet, par conséquent, une intégrale complète représentée par $n + 1 - m$ relations entre les variables z, x_i ; si les équations de ce système dépendent en outre de $m - 1$ constantes arbitraires, l'élimination de ces paramètres conduira à une équation semi-linéaire (§ 91).

III. — Si tous les déterminants obtenus en prenant m colonnes dans le tableau (T) sont nuls pour les coordonnées z^0, x_i^0, p_i^0 d'un élément, le théorème fondamental peut être en défaut pour cet élément. Considérons, par exemple, le système en involution de deux équations

$$F_1(p, q, z - px - qy) = 0, \quad F_2(p, q, z - px - qy) = 0$$

dont la première exprime que le plan

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

est tangent à une certaine surface non développable Z_1 , tandis que la seconde exprime que le même plan est tangent à une autre surface non développable Z_2 . Soient P un plan tangent commun à ces deux surfaces, M et M' les points de contact et m un point du plan P . Supposons d'abord que le point m ne soit pas situé sur la droite MM' ; de l'élément formé par le point m et le plan P part une caractéristique de la première équation, à savoir la droite Mm ; d'un point quelconque m' de cette droite Mm part une caractéristique de la seconde équation, la droite $M'm'$. L'ensemble des droites $M'm'$ forme une multiplicité caractéristique à deux dimensions, le plan P lui-même. Si, au contraire, le point m est sur la droite MM' , les droites $mM, m'M'$ se réduisent toutes à la droite MM' ; la multiplicité caractéristique se réduit à une multiplicité à une dimension. Pour un point m pris sur la droite MM' , les cônes (T) et (T') relatifs aux deux équations seront tangents suivant la droite MM' et on vérifie

immédiatement que tous les déterminants d'ordre 2 du tableau rectangulaire sont nuls.

La théorie générale ne s'applique donc pas aux intégrales pour lesquelles tous les déterminants d'ordre m du tableau (T) sont nuls. Nous les appellerons *intégrales singulières*, nous réservant de montrer dans le chapitre suivant que les intégrales appelées plus haut singulières (§ 91) satisfont bien à ces conditions. Il est à remarquer que toute intégrale singulière d'une équation du système est une intégrale singulière pour le système; mais la réciproque n'est pas vraie. Ainsi, dans l'exemple de tout à l'heure, la développable circonscrite aux deux surfaces Z_1 et Z_2 est une intégrale singulière pour le système des deux équations, sans être une intégrale singulière d'aucune d'elles.

La recherche des intégrales singulières se ramenant à une question générale déjà traitée, la recherche des intégrales communes à plusieurs équations, nous ne nous y arrêterons pas davantage. Remarquons seulement qu'en se bornant, pour fixer les idées, au cas d'une seule équation, les raisonnements employés dans le cas de trois variables prouvent que, si la fonction F n'a pas été prise d'une façon particulière, l'équation $F = 0$ n'admet pas d'une manière normale d'intégrale singulière.

Pour traiter ce sujet plus complètement, il faudrait étudier les relations de contact des intégrales singulières avec les autres intégrales; ce point exige des discussions très délicates que l'on trouvera dans le beau Mémoire de M. Darboux, pour le cas d'une seule équation.

93. M. Sophus Lie a présenté la théorie générale sous une forme un peu différente, au moyen d'une notation nouvelle que nous allons faire connaître. Si dans les deux équations

$$F(x, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0, \quad dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0,$$

on remplace z par x_{n+1} , p_1 par $-\frac{p_1}{p_{n+1}}$, ..., p_n par $-\frac{p_n}{p_{n+1}}$, la relation $F = 0$ se change en une relation homogène et de degré zéro par rapport à p_1, \dots, p_{n+1} et la seconde équation devient

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_{n+1} dx_{n+1} = 0.$$

Changeons n en $n - 1$ et regardons x_1, \dots, x_n comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions, et p_1, \dots, p_n comme les coordonnées homogènes d'un plan passant par ce point

$$p_1(X_1 - x_1) + \dots + p_n(X_n - x_n) = 0,$$

le problème de l'intégration pourra être posé ainsi : Étant données q relations $F_1 = 0, \dots, F_q = 0$, homogènes par rapport aux p_i , trouver une suite $(n - 1)$ fois infinie d'éléments vérifiant ces q équations ainsi que la relation

$$p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n = 0.$$

La nouvelle notation a l'avantage d'être plus symétrique et elle permet en outre de tenir compte de certaines intégrales exceptionnelles qui disparaissent avec la définition ordinaire, comme un cylindre ayant ses génératrices parallèles à l'axe des z .

Étant donnée une relation homogène par rapport aux p_i , les équations différentielles des caractéristiques prennent la forme symétrique

$$\frac{dx_i}{\frac{\partial F}{\partial p_i}} = \frac{-dp_i}{\frac{\partial F}{\partial x_i}}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

et la détermination de ces caractéristiques revient à l'intégration des équations simultanées

$$(F, V) = 0, \quad \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial V}{\partial p_i} = 0,$$

qui forment un système complet, comme il est aisé de s'en assurer, car la dernière équation peut s'écrire $[z, V] = 0$.

La recherche des intégrales communes à plusieurs équations revient à l'intégration d'un système en involution de la forme

$$\begin{cases} p_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n, x_{p+1}, \dots, x_n, p_{s+1}, \dots, p_n), & (i=1, 2, \dots, s), \\ x_h = \psi_h(x_1, \dots, x_n, x_{p+1}, \dots, x_n), & (h=s+1, \dots, p); \end{cases}$$

la démonstration est la même que celle qui a été donnée plus haut. On peut simplifier ce système au moyen de la transformation suivante. Si on pose

$$x_k = X_k(x'_1, \dots, x'_n), \quad p_k = \sum_{i=1}^n p'_i \frac{dx'_i}{dx_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

la relation

$$p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n = 0$$

devient

$$p'_1 dx'_1 + \dots + p'_n dx'_n = 0,$$

et toute parenthèse $(F, \Phi)_{\mu}$ se change identiquement en $(F', \Phi')_{\mu}$, F' et Φ' désignant ce que deviennent F et Φ par la substitution précédente. La vérification directe de ce théorème n'offre aucune difficulté; il apparaîtra plus loin comme corollaire de la théorie générale des transformations de contact.

Appliquons à notre système en involution la transformation

$$x'_1 = x_1, \quad \dots, \quad x'_s = x_s, \quad x'_{s+1} = x_{s+1} - \psi_1, \quad \dots,$$

$$x'_\mu = x_\mu - \psi_\mu, \quad x'_{\mu+1} = x_{\mu+1}, \quad \dots, \quad x'_n = x_n,$$

$$p_\mu = \sum_{i=1}^s p'_i \frac{dx'_i}{dx_\mu},$$

nous sommes conduits à un nouveau système en involution de la forme

$$p'_i - H_i = 0, \quad x'_{i+1} = 0, \quad \dots, \quad x'_\mu = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Les parenthèses

$$(p'_i - H_i, x'_k), \quad (i = 1, 2, \dots, s; k = s + 1, \dots, \mu),$$

étant nulles, on en conclut que le nouveau système ne contient pas p'_{s+1}, \dots, p'_μ . On arrive donc à un système en involution de la forme

$$p_1 = f_1, \quad \dots, \quad p_s = f_s.$$

99. Puisque tout système se ramène à un système en involution de cette forme, il suffit de considérer un système

$$p_1 = f_1, \quad \dots, \quad p_s = f_s.$$

où f_1, \dots, f_s sont des fonctions homogènes et du premier degré de p_{s+1}, \dots , telles que toutes les parenthèses

$$(p_1 - f_1, p_2 - f_2)$$

soient identiquement nulles. Le théorème fondamental de Lie se

234 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

déduit alors très aisément de la méthode de Mayer pour l'intégration des systèmes jacobiens. En effet, les multiplicités caractéristiques du système en involution précédent sont déterminées par l'intégration du système jacobien

$$(p_1 - f_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (p_r - f_r, \Phi) = 0.$$

Si on pose

$$x_1 = a_1 + t, \quad x_2 = a_2 + t y_1, \quad \dots, \quad x_r = a_r + t y_{r-1}$$

ce système peut être remplacé (§ 30) par une équation unique

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - (\mathcal{F}, \Phi) = 0,$$

où

$$\mathcal{F} = f_1 + y_1 f_2 + \dots + y_{r-1} f_r,$$

et l'intégration de cette équation linéaire revient à celle de l'équation à $n - q + 1$ variables

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \mathcal{F} \left(t, y_1, \dots, y_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_{r+1}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) = 0.$$

Le théorème fondamental de Lie se déduit donc du théorème spécial de Mayer pour les équations linéaires et homogènes. Inversement, si on applique le théorème de Lie aux équations linéaires, on est conduit aux mêmes résultats que par la méthode directe de Mayer (1).

(1) Mayer, *Die Lie'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, *Mathematische Annalen*, t. VI, p. 182-183.

CHAPITRE XI

Transformations de contact (1).

100. Parmi les transformations des figures planes ou des figures dans l'espace, on a d'abord étudié celles qui font correspondre un point à un point et qui, par suite, sont définies par des formules de la forme

$$X = f(x, y, z), \quad Y = \varphi(x, y, z), \quad Z = \psi(x, y, z),$$

x, y, z étant les coordonnées d'un point de la première figure et X, Y, Z les coordonnées du point correspondant de la nouvelle figure. Nous désignerons une telle transformation sous le nom de transformation ponctuelle. Il est aisé de voir que ces transformations ne changent pas les relations de contact. En d'autres termes, si deux courbes ou deux surfaces sont tangentes, il en sera de même des courbes ou des surfaces transformées, et même la transformation conserve l'ordre du contact.

On connaît depuis longtemps d'autres modes de transformations que les précédents, qui jouissent de la même propriété. Telle est la transformation par polaires reciproques. A tout point M de l'une des figures ne correspond pas un point déterminé de l'autre figure, mais bien tous les points du plan polaire P du point M par rapport à la surface directrice du second degré Z . Mais si l'on considère, avec le

(1) Auteurs à consulter : LIE, *Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungstransformationen* (Mathematische Annalen, t. VIII, p. 215-303); *Theorie der Transformationsgruppen* (Zweiter Abschnitt). — HUGER, *Direkte Begründung der Theorie der Berührungstransformationen* (Mathematische Annalen, t. VIII, p. 304-312). — DARBOUX, *Solutions algébriques, etc.*, (1^{re} et 2^e parties); *Sur le problème de Pfaff* (Bulletin des Sciences mathématiques, t. VI, 2^e série).

point M , un plan π passant par ce point, il correspond au plan π un point m du plan P et toute surface tangente en M au plan π aura sa transformée par polaires réciproques qui sera tangente en m au plan P . Deux surfaces tangentes se changent donc en deux surfaces tangentes. De même, si sur la normale en M à une surface quelconque S on porte une longueur constante $MM' = l$, le point M' décrit une surface S' parallèle à la première. La position du point M' ne dépend pas seulement de la position du point M ; elle dépend aussi de la direction du plan tangent en M à la surface S . Mais, si on considère deux surfaces S, S_1 tangentes en M , les surfaces parallèles seront tangentes en M' puisque, comme on sait, les plans tangents à deux surfaces parallèles en deux points correspondants sont parallèles. Il serait facile de multiplier les exemples. Parmi les transformations les plus simples jouissant de la propriété précédente, on peut citer encore la transformation dans laquelle on fait correspondre à un point d'une surface le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point fixe sur le plan tangent en ce point.

101. Proposons-nous, d'une manière générale, de trouver toutes les transformations qui changent deux surfaces tangentes en deux surfaces tangentes, ou qui conservent les relations de contact. Soient x, y, z les coordonnées d'un point d'une surface, p, q les coefficients angulaires du plan tangent à cette surface, X, Y, Z les coordonnées du point correspondant de la surface transformée, P, Q les coefficients angulaires du plan tangent à cette nouvelle surface. Il est clair que X, Y, Z, P, Q ne doivent dépendre que de x, y, z, p, q ; les formules de transformation auront donc la forme suivante :

$$(1) \begin{cases} X = f_1(x, y, z, p, q), & Y = f_2(x, y, z, p, q), & Z = f_3(x, y, z, p, q), \\ P = \varphi_1(x, y, z, p, q), & Q = \varphi_2(x, y, z, p, q). \end{cases}$$

Une pareille transformation fait correspondre un élément à un élément, mais elle ne conserve pas nécessairement le contact. Si le point (x, y, z) décrit une surface S , p et q étant les coefficients angulaires du plan tangent à cette surface, le point X, Y, Z décrira une autre surface S' et il faudra que P et Q soient les coefficients angulaires du plan tangent à cette nouvelle surface, ce qui n'aura évidemment pas lieu si les fonctions f et φ sont quelconques. Pour

qu'il en soit ainsi, il faudra que l'on ait

$$dZ - P dX - Q dY = 0,$$

toutes les fois que l'on a

$$dz - p dx - q dy = 0,$$

et, comme la première expression est une fonction linéaire de dx , dy , dz , dp , dq , ceci ne pourra avoir lieu que si on a identiquement

$$dZ - P dX - Q dY = \rho (dz - p dx - q dy),$$

ρ étant une fonction quelconque de x , y , z , p , q , ne contenant pas les différentielles.

Plus généralement, étant données $(2n + 1)$ variables z , x_1, \dots, x_n , p_1, \dots, p_n et un système de $(2n + 1)$ fonctions Z , X_1, \dots, X_n , P_1, \dots, P_n de ces variables, on dira que la transformation

$$z' = Z, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

est une transformation de contact, si les fonctions Z , X_i , P_i satisfont identiquement à une relation de la forme

$$dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n = \rho (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n),$$

ρ étant une fonction quelconque de z , x_1, \dots, x_n , p_1, \dots, p_n . Une transformation de cette nature change une multiplicité M en une autre multiplicité M' , mais il faut remarquer que la multiplicité transformée ne sera pas nécessairement de même nature que la multiplicité donnée. Ainsi, une telle transformation pourra faire correspondre à l'ensemble d'une surface et de ses plans tangents l'ensemble d'une courbe et de ses plans tangents. Par exemple, la transformation par polaires réciproques appliquée à une surface développable donne une courbe et, appliquée à un plan, donne un point. Remarquons dès maintenant que, si on a deux multiplicités M_1 formées de deux courbes et de leurs plans tangents, pour que ces deux multiplicités aient un élément commun, il faut et il suffit que les courbes aient un point commun. Si donc une transformation de contact change des surfaces en des courbes, elle changera deux surfaces tangentes en deux courbes qui se coupent et inversement.

Il est clair que la transformation inverse d'une transformation de

détermineront les $(2n + 2 + h)$ fonctions $Z, X_n, P_n, \lambda_n, \rho$ en fonction de z, x_n, p_n .

De ces équations on peut tirer immédiatement le système

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} + p_n \left\{ \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \phi_n}{\partial z} \right\} = 0, \\ 1 = \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial Z} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \phi_n}{\partial Z}, \\ \phi_1 = 0, \quad \dots, \quad \phi_n = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{array} \right.$$

de $n + h + 1$ équations qui ne contiennent que $Z, X_1, \dots, X_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$. On tirera de là les valeurs de $Z, X_1, \dots, X_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ et, en portant ces valeurs dans les autres équations, on aura les valeurs de P_1, \dots, P_n et ρ .

Il n'y aurait exception que si les équations (5) étaient indéterminées ou incompatibles. On voit immédiatement que ces équations ne peuvent être indéterminées, mais il pourrait arriver qu'elles fussent incompatibles; cela arriverait si on pouvait éliminer Z, X_i, λ_i entre ces équations et on obtiendrait une relation de la forme

$$\varphi(z, x_n, p_n) = 0.$$

Ce cas exceptionnel écarté, on voit que les équations (5) définissent complètement une transformation de contact. Comme le nombre h peut prendre les valeurs $1, 2, \dots, n + 1$, on voit qu'on aura $(n + 1)$ catégories de transformations à considérer. Dans le cas limite où $h = n + 1$, les relations (5) déterminent complètement Z, X_1, \dots, X_n , et on a une transformation ponctuelle. Un autre cas limite très important est celui où $h = 1$. On a alors une seule relation entre les variables Z, X_n, z, x_n ,

$$\phi_1(Z, X_n, z, x_n) = 0.$$

et l'équation (2) devra être équivalente à l'équation

$$d\phi_1 = 0.$$

Ceci donne les conditions

$$\frac{1}{\frac{\partial \phi_1}{\partial Z}} = \frac{-P_n}{\frac{\partial \phi_1}{\partial X_n}} = \frac{-\rho}{\frac{\partial \phi_1}{\partial z}} = \frac{\rho P_n}{\frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}},$$

qui s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial Z} + \frac{\partial \phi_1}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial Z} P_i + \frac{\partial \phi_1}{\partial X_i} = 0, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z} p_i + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} = 0, \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

on tirera Z, X_i des équations

$$\phi_1 = 0, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} p_i + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} = 0,$$

à moins qu'on ne puisse éliminer Z, X_i entre ces équations et obtenir une relation de la forme

$$\varphi(z, x_i, p_i) = 0.$$

Mais alors les équations précédentes montrent que la relation $\phi_1 = 0$, où on considère Z et X_i comme des constantes, donnerait une intégrale de l'équation $\varphi = 0$. Donc, pour que la fonction ϕ_1 fournisse une transformation de contact, il faut et il suffit que la relation $\phi_1 = 0$, où on considère Z et X_i comme des constantes arbitraires, ne définisse pas une intégrale à $n + 1$ constantes d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. C'est ce qui aura lieu, en général, puisque cette fonction ϕ_1 contient $(n + 1)$ constantes.

EXEMPLE. — Prenons les relations

$$\begin{aligned} X_{p+1} &= x_{p+1}, \quad \dots, \quad X_n = x_n, \\ Z - z + X_1 x_1 + \dots + X_p x_p &= 0; \end{aligned}$$

on devra avoir

$$\begin{aligned} dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_p dX_p - \rho [dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n] \\ = \lambda [dZ - dz + X_1 dx_1 + x_1 dX_1 - \dots + X_p dx_p + x_p dX_p] \\ + \lambda_{p+1} [dX_{p+1} - dx_{p+1}] + \dots + \lambda_n [dX_n - dx_n], \end{aligned}$$

on voit de suite que l'on a

$$\begin{aligned} \lambda &= 1, \quad \rho = 1, \\ P_1 &= -x_1, \quad \dots, \quad P_p = -x_p, \quad X_1 = p_1, \quad \dots, \quad X_p = p_p, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$Z = z - p_1 x_1 - \dots - p_r x_r, \\ P_{p+1} = p_{p+1}, \dots, P_n = p_n.$$

Nous retrouvons une transformation que nous avons déjà employée plusieurs fois et qui comprend, comme cas particuliers, la transformation de Legendre et la transformation d'Ampère que l'on verra plus loin.

103. Considérons, en particulier, le cas de trois variables x, y, z . Dans ce cas, il y aura trois classes de transformations de contact, suivant qu'on établit 1, 2 ou 3 relations entre x, y, z, X, Y, Z . Le cas de trois relations conduit aux transformations ponctuelles.

Supposons qu'on parte d'une seule relation entre x, y, z, X, Y, Z ,

$$\phi(X, Y, Z, x, y, z) = 0.$$

Il faudra adjoindre à cette équation, pour déterminer X, Y, Z, P, Q et p , les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial Z} P + \frac{\partial \phi}{\partial X} &= 0, & \frac{\partial \phi}{\partial Z} Q + \frac{\partial \phi}{\partial Y} &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} P + \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \phi}{\partial z} q + \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, \\ p \frac{\partial \phi}{\partial Z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

La transformation est complètement définie si on se donne la relation $\phi = 0$, appelée par Plücker *équation directrice*; X, Y, Z seront données par les formules

$$(A) \quad \phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} + p \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} + q \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

La transformation ainsi obtenue peut être interprétée géométriquement comme il suit. Si on considère, dans l'équation $\phi = 0$, X, Y, Z comme des constantes, cette équation, où x, y, z sont les coordonnées courantes, représente une certaine surface Σ . De même, si dans $\phi = 0$ on considère x, y, z comme des constantes, cette équation représente une surface Σ' . A tout point X, Y, Z , l'équation $\phi = 0$ fait donc correspondre une surface Σ et à tout point x, y, z une

surface Σ' . Cela posé, imaginons que le point (x, y, z) décrive une surface S ; la surface correspondante S' décrite par le point X, Y, Z sera donnée par les formules (A) qui expriment que S' est l'enveloppe des surfaces Σ' relatives aux divers points de S . Il est aisé de voir que l'équation (A) exprime aussi que S' est le lieu des points X, Y, Z tels que la surface Σ correspondante soit tangente à S . Ces propriétés sont évidentes pour la transformation par polaires réciproques.

EXEMPLE I. — Soit

$$\phi = Xx + Yy - Z - z = 0;$$

on a

$$X - p = 0, \quad Y - q = 0, \quad x - P = 0, \quad y - Q = 0,$$

et, par suite,

$$Z = px + qy - z,$$

c'est la transformation de Legendre.

Plus généralement, supposons que la fonction ϕ soit bilinéaire, de façon que les surfaces Σ et Σ' soient des plans,

$$\begin{aligned} \phi = & X(ax + by + cz + d) + Y(a'x + b'y + c'z + d') \\ & + Z(a''x + b''y + c''z + d'') - (ax + \beta y + \gamma z + \delta) = 0. \end{aligned}$$

Effectuons d'abord la transformation homographique

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{ax + by + cz + d}{ax + \beta y + \gamma z + \delta}, \\ y_1 &= \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{ax + \beta y + \gamma z + \delta}, \\ z_1 &= \frac{a''x + b''y + c''z + d''}{ax + \beta y + \gamma z + \delta}; \end{aligned} \right.$$

ϕ prendra alors la forme

$$Xx_1 + Yy_1 + Zz_1 - 1 = 0.$$

Lorsque le point (x, y, z) décrit une surface S , le point (x_1, y_1, z_1) décrit une surface S_1 homographique à la première. D'ailleurs, l'équation

$$Xx_1 + Yy_1 + Zz_1 - 1 = 0$$

représente le plan polaire du point (x_1, y_1, z_1) par rapport à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0.$$

L'enveloppe de Σ' est donc la transformée par polaires réciproques de S_1 par rapport à cette sphère. On conclut de là que, quand ϕ est bilinéaire, la transformation est équivalente à une transformation homographique suivie d'une transformation par polaires réciproques.

EXEMPLE II. — Soit

$$\phi = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 - R^2 = 0.$$

Il faut lui adjoindre les relations

$$\begin{aligned} X - x + p(Z - z) &= 0, & Y - y + q(Z - z) &= 0, \\ X - x + P(Z - z) &= 0, & Y - y + Q(Z - z) &= 0; \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{aligned} P &= p, & Q &= q, \\ Z &= z \pm \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \\ X &= x \mp \frac{Rp}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, & Y &= y \mp \frac{Rq}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}; \end{aligned} \right.$$

c'est la transformation par laquelle on passe d'une surface à une surface parallèle, ou dilatation. Les surfaces Σ et Σ' sont des sphères de rayon R ayant respectivement pour centres le point (X, Y, Z) et le point (x, y, z) .

EXEMPLE III. — En prenant

$$\phi = X^2 + Y^2 + Z^2 - Xx - Yy - Zz = 0,$$

on retrouve la transformation par laquelle on passe d'une surface à sa polaire relativement à l'origine. La surface Σ est un plan et la surface Σ' une sphère.

104. Supposons maintenant qu'il existe deux relations entre X, Y, Z, x, y, z ,

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0.$$

Il faudra leur adjoindre les équations

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial Z} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial Z}, \\ -P &= \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial X} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial X}, \quad -Q = \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial Y} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial Y}, \\ -\rho &= \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \\ \rho p &= \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \quad \rho q = \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y}. \end{aligned}$$

Il est aisé de tirer des trois dernières équations une relation ne contenant plus ρ , λ_1 et λ_2 ; en éliminant ρ on a, en effet,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + p \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + p \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right) &= 0, \\ \lambda_1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + q \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + q \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right) &= 0; \end{aligned}$$

comme λ_1 et λ_2 ne peuvent être nuls à la fois, d'après la première des relations écrites plus haut, on en conclut la nouvelle équation

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + p \frac{\partial \psi_1}{\partial z} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + p \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + q \frac{\partial \psi_1}{\partial z} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + q \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

qui, jointe aux équations

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0,$$

permettra de déterminer X, Y, Z .

On peut encore donner de ces équations une interprétation géométrique. Considérons, dans les équations $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0$, X, Y, Z comme des constantes et x, y, z comme des coordonnées courantes. Ces équations définissent une certaine courbe C , lieu du point (x, y, z) . En d'autres termes, ces équations font correspondre à tout point (X, Y, Z) une courbe C , et de même, à tout point (x, y, z) correspond une courbe C' représentée par les mêmes équations où on regarde X, Y, Z comme les coordonnées courantes. Lorsque le point (x, y, z) décrit

une surface S , les courbes C' relatives aux divers points de S forment une congruence. L'équation $\Delta = 0$ détermine la surface focale de cette congruence, surface qui est la transformée S' de la surface S . On montrerait aussi que S' est le lieu des points X, Y, Z tels que les courbes C correspondantes soient tangentes à la surface S .

Pour avoir les transformations les plus simples de cette espèce, il est naturel de supposer que les courbes C et C' sont des droites.

EXEMPLE I. — Soit

$$\phi_1 = Y - y = 0, \quad \phi_2 = Z - z + Xx = 0,$$

on aura

$$\Delta = X - p = 0,$$

et, par suite,

$$X = p, \quad Y = y, \quad Z = z - px.$$

En écrivant que

$$dx - x dp - p dx - P dp - Q dy = dz - p dx - q dy,$$

on trouve

$$P = -x, \quad Q = q.$$

On a ainsi la transformation connue sous le nom de *transformation d'Ampère*.

EXEMPLE II. — M. Lie a donné un autre exemple remarquable où les courbes C et C' sont des droites, en partant des deux relations

$$\begin{aligned} \phi_1 &= X + iY + z + xZ = 0, \\ \phi_2 &= x(X - iY) + y - Z = 0. \end{aligned}$$

A tout point (X, Y, Z) correspond une droite appartenant à un complexe linéaire et à tout point (x, y, z) une droite qui rencontre le cercle imaginaire de l'infini.

Calculons Δ ; on trouve

$$\Delta = Z + p - q(X - iY) = 0;$$

on tire de là aisément les formules suivantes :

$$\left. \begin{aligned} X + iY &= -z - x \frac{px + qy}{q - x}, & X - iY &= \frac{y + p}{q - x}, \\ Z &= \frac{px + qy}{q - x}, \\ P &= \frac{qx - 1}{q + x}, & Q &= -i \frac{1 + qx}{q + x}. \end{aligned} \right\}$$

Cette transformation change les lignes droites en sphères ou, d'une façon plus précise, fait correspondre au système doublement infini d'éléments formés d'un point d'une droite et d'un plan passant par cette droite le système doublement infini d'éléments formés par un point d'une sphère et le plan tangent en ce point. Soient, en effet,

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

les équations d'une droite. La transformée est le lieu des points X, Y, Z tels que la courbe C correspondante rencontre cette droite, c'est donc la surface qui a pour équation

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ Z & 0 & 1 & X + iY \\ X - iY & 1 & 0 & -Z \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire une sphère, comme il est aisé de le voir en développant le déterminant. A deux droites qui se coupent, cette transformation fait correspondre deux sphères tangentes. Aux tangentes asymptotiques d'une surface quelconque S correspondent les sphères osculatrices ⁽¹⁾ de la transformée S' et aux lignes asymptotiques de S les lignes de courbure de la transformée S' ⁽²⁾.

(1) Deux surfaces tangentes en un point M sont dites osculatrices lorsque les deux tangentes en M à la courbe d'intersection sont confondues. Les sphères osculatrices à une surface en un point M sont les deux sphères tangentes en M qui ont pour centres les centres de courbure principaux.

(2) Pour plus de détails sur cette importante transformation, voir le Mémoire déjà cité de Lie (*Mathematische Annalen*, t. V).

EXEMPLE III. — Soient

$$\begin{aligned}\phi_1 &= X^2 + Y^2 + Z^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0, \\ \phi_2 &= Xx + Yy + Zz = 0;\end{aligned}$$

les courbes C et C' sont alors des cercles. On a

$$\Delta = Z(py - qx) + X(y + qz) - Y(x + pz) = 0.$$

Cette équation $\Delta = 0$ représente un plan qui passe par la droite OM et par la normale MN à la surface en M . On conclut de là la construction suivante du point m correspondant au point M : dans le plan passant par OM et la normale MN à la surface, on mène la perpendiculaire Om à OM sur laquelle on prend une longueur $Om = OM$. C'est la transformation dite *apsidale*, qui permet de passer de l'ellipsoïde à la surface des ondes. Les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 étant symétriques en x, y, z et X, Y, Z , on en conclut que la transformation est réciproque.

105. Les paragraphes précédents contiennent la détermination, sous forme finie, de toutes les transformations de contact. Mais on peut se proposer sur ces transformations bien d'autres problèmes. Par exemple, étant donnée une fonction Z des $2n + 1$ variables z, x_1, p_1 , on peut se demander s'il existe d'autres fonctions X_1, P_1 telles que les formules

$$z' = Z, \quad x'_1 = X_1, \quad p'_1 = P_1$$

définissent une transformation de contact. La solution de cette question et de bien d'autres analogues se déduit sans difficulté des théorèmes suivants qui sont fondamentaux dans cette théorie.

THÉORÈME (1). — Soient $Z, X_1, P_1, 2n + 1$ fonctions des $2n + 1$ variables z, x_1, p_1 , dont les différentielles vérifient identiquement

(1) Si on suppose connue la théorie générale des équations aux dérivées partielles du premier ordre, la proposition peut s'établir très aisément. En effet, de l'identité (1) on déduit que les relations

$$Z = a, \quad X_1 = a_1, \quad P_1 = a_2$$

où a, a_1, a_2 sont des constantes quelconques, entraînent la relation $dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0$. Par conséquent les $(2n + 1)$ fonctions Z, X_1 sont distinctes (55) et les équa-

la relation

$$(6) \quad dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n = p(ds - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n),$$

où p est une fonction des variables z, x_i, p_i , qui n'est pas nulle : ces $2n + 1$ fonctions sont indépendantes et satisfont aux relations

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= 0, & [Z, X_i] &= 0, & [X_n, P_i] &= 0, \\ [X_n, P_j] &= -p, & [Z, P_i] &= -pP_i, & [P_i, P_j] &= 0. \end{aligned}$$

tion $[Z, X_i] = 0$, $[X_i, X_j] = 0$ doivent être des conséquences des précédentes, ce qui ne peut avoir lieu que si ces crochets sont identiquement nuls, puisqu'ils ne contiennent pas a, a_1, \dots, a_n . D'un autre côté, la relation (6) peut s'écrire

$$d(Z - X_{\alpha_1} P_{\alpha_1} - \dots - X_{\alpha_q} P_{\alpha_q}) + X_{\alpha_1} dP_{\alpha_1} + \dots + X_{\alpha_q} dP_{\alpha_q} - P_{\alpha_{q+1}} dX_{\alpha_{q+1}} - \dots - P_{\alpha_n} dX_{\alpha_n} = p(ds - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n),$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les nombres $1, 2, \dots, n$, rangés dans un certain ordre. Cette identité est de même forme que la première, mais les fonctions Z, X_1, \dots, X_n sont remplacées par

$$Z - X_{\alpha_1} P_{\alpha_1} - \dots - X_{\alpha_q} P_{\alpha_q}, \quad P_{\alpha_1}, \dots, P_{\alpha_q}, \quad X_{\alpha_{q+1}}, \dots, X_{\alpha_n}.$$

On a donc

$$[P_i, P_j] = 0, \quad [P_i, X_j] = 0, \quad (i \leq q), \quad [P_i, Z] = P_i [P_i, X_1].$$

L'équation (6) peut encore s'écrire

$$d\left(Z - \frac{1}{\sqrt{S}}\right) - \sum_{i=1}^n P_i d\left(X_i + \frac{P_i}{\sqrt{S}}\right) = p(ds - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n),$$

où $S = 1 + P_1^2 + \dots + P_n^2$. On a par conséquent

$$\left[X_i + \frac{P_i}{\sqrt{S}}, X_j + \frac{P_j}{\sqrt{S}}\right] = 0,$$

ce qui donne

$$[P_i, X_i] = [P_n, X_n] = \dots = [P_n, X_n].$$

Enfin, pour avoir la valeur du crochet $[X_n, P_i]$ dérivons la relation (6) sous la forme

$$dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n - p P_{n+1} dx_{n+1} = p(ds - p_1 dx_1 - \dots - p_{n+1} dx_{n+1}),$$

en introduisant un nouveau couple de variables x_{n+1}, p_{n+1} . Comme Z, X_n, P_n, p ne contiennent pas x_{n+1}, p_{n+1} on aura, d'après ce qui précède

$$[P_i, X_n] = [p P_{n+1}, x_{n+1}] = p.$$

On a ainsi les valeurs de tous les crochets. Il ne reste plus qu'à faire voir que les $2n + 1$ fonctions Z, X_i, P_i sont indépendantes. Supposons qu'on ait une relation de la forme

$$P_i = \varphi(Z, X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n);$$

on devrait avoir $[P_i, X_i] = p$ et des relations précédentes on déduit au contraire $[P_i, X_i] = 0$.

M. Lie a déduit ce théorème de la théorie du problème de Pfaff. MM. Mayer et Darboux ont donné ensuite des démonstrations directes. La démonstration suivante est celle de M. Darboux.

L'équation (6) peut être remplacée par les $2n + 1$ équations suivantes :

$$(7) \quad \frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial X_i}{\partial z} = p,$$

$$(8) \quad \frac{\partial Z}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = -p P_k,$$

$$(9) \quad \frac{\partial Z}{\partial p_k} - \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Employons toujours la notation

$$\frac{d}{dx_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial}{\partial z},$$

on pourra alors remplacer les relations (8) par les relations

$$(10) \quad \frac{dZ}{dx_k} - \sum_{i=1}^n P_i \frac{dX_i}{dx_k} = 0,$$

obtenues en éliminant p entre les équations (7) et (8). Soit u une fonction quelconque de z, x_i, p_i ; en supposant que les différentielles dx_i, dz soient liées par la relation

$$dz = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n,$$

on aura

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial p_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial p_n} dp_n,$$

c'est-à-dire

$$du = \frac{du}{dx_1} dx_1 + \dots + \frac{du}{dx_n} dx_n + \frac{\partial u}{\partial p_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial p_n} dp_n.$$

Appliquons cette formule aux fonctions X_i et P_i . Nous aurons

$$(11) \quad \begin{cases} dX_i = \frac{dX_i}{dx_1} dx_1 + \dots + \frac{dX_i}{dx_n} dx_n + \frac{\partial X_i}{\partial p_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial X_i}{\partial p_n} dp_n \\ dP_i = \frac{dP_i}{dx_1} dx_1 + \dots + \frac{dP_i}{dx_n} dx_n + \frac{\partial P_i}{\partial p_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial P_i}{\partial p_n} dp_n \end{cases}$$

270. LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Cela posé, imaginons un second système de différentielles que nous désignerons par la lettre δ et que nous emploierons en même temps que le premier; on aura d'abord

$$\delta Z - P_1 \delta X_1 - \dots - P_n \delta X_n = p (\delta s - p_1 \delta x_1 - \dots - p_n \delta x_n),$$

et, en différentiant cette relation dans le premier système d'accroissements, il vient

$$\begin{aligned} d\delta Z - dP_1 \delta X_1 - \dots - dP_n \delta X_n - P_1 d\delta X_1 - \dots - P_n d\delta X_n \\ = dp (\delta s - p_1 \delta x_1 - \dots - p_n \delta x_n) \\ + p \{ d\delta s - dp_1 \delta x_1 - \dots - dp_n \delta x_n - p_1 d\delta x_1 - \dots - p_n d\delta x_n \}. \end{aligned}$$

Supposons toujours que l'on ait

$$ds = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n,$$

$$\delta s = p_1 \delta x_1 + \dots + p_n \delta x_n,$$

permutons les différentielles d et δ dans la relation précédente et retranchons les deux relations ainsi obtenues; il viendra, en remarquant que les opérations $d\delta$ et δd sont équivalentes,

$$\begin{aligned} dX_1 \delta P_1 - dP_1 \delta X_1 + \dots + dX_n \delta P_n - dP_n \delta X_n \\ = p [dx_1 \delta p_1 - dp_1 \delta x_1 + \dots + dx_n \delta p_n - dp_n \delta x_n]. \end{aligned}$$

Écrivons que cette dernière relation a lieu, quels que soient les accroissements $\delta x_i, \delta p_i$, après y avoir remplacé $\delta P_i, \delta X_i$ par leurs valeurs tirées des équations (11) où on aurait remplacé d par δ ; il viendra

$$(12) \quad \begin{cases} p dx_i = \frac{\partial P_1}{\partial p_i} dX_1 - \frac{\partial X_1}{\partial p_i} dP_1 + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial p_i} dX_n - \frac{\partial X_n}{\partial p_i} dP_n, \\ -p dp_i = \frac{dP_1}{dx_i} dX_1 - \frac{dX_1}{dx_i} dP_1 + \dots + \frac{dP_n}{dx_i} dX_n - \frac{dX_n}{dx_i} dP_n. \end{cases}$$

Les deux systèmes d'équations (11) et (12) doivent être équivalents; si on remplace dans le système (12) dX_i, dP_i par leurs valeurs tirées de (11), on doit aboutir à des identités. On en conclut, d'après un théorème bien connu sur les substitutions linéaires, que si Δ désigne le déterminant des coefficients de dx_i, dp_i dans les équations (11) et Δ' celui des coefficients de dX_i et dP_i dans les équations (12)

réécrites par rapport à dx_i et dp_i , on aura

$\Delta\Delta' = 1.$

Or,

[illegible]

on voit facilement que le second déterminant se ramène au premier par une permutation convenable de lignes et de colonnes. Par conséquent,

$$\Delta' = \frac{\Delta}{p^{2n}},$$

दूध

$$\Delta^2 = \rho^2, \quad \Delta = \pm \rho.$$

Considérons maintenant le déterminant fonctionnel de Z , X_0 , P_0 .

$$I = \frac{D(Z, X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n)}{D(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)},$$

[illegible]

Ajoutons aux éléments de la deuxième colonne ceux de la première multipliés par p_1 , etc..., aux éléments de la $(n + 1)^{\text{e}}$ ceux de la

première multipliés par p_n ; on trouve

[illegible]

Enfin, ajoutons à la première ligne les éléments de la seconde multipliés par $-P_1$, etc..., ceux de la $(n+1)^{\text{e}}$ multipliés par $-P_n$, il vient, en tenant compte des relations (7), (9) et (10),

$$I = \begin{vmatrix} p, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \frac{\partial X_1}{\partial z} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial P_n}{\partial z} & & & \Delta & & \\ \vdots & & & & & \end{vmatrix} = p\Delta.$$

d'où

$$l = \pm p^{n+1}.$$

Comme ρ est différent de 0, on en conclut qu'il en est de même de l . Les fonctions Z , X_i , P_i sont donc indépendantes et on peut résoudre les équations

$$z' = z, \quad x'_i = x_i, \quad p'_i = p_i$$

par rapport à z, x_t, p_t .

Pour démontrer la seconde partie du théorème, remplaçons, dans la formule générale

$$du = \frac{du}{dx_1} dx_1 + \dots + \frac{du}{dx_n} dx_n + \frac{\partial u}{\partial p_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial p_n} dp_n.$$

$dx_1, \dots, dx_n, dp_1, \dots, dp_n$ par leurs valeurs tirées des formules (12), il vient :

$$\rho du = [P_1, u] dX_1 + \dots + [P_n, u] dX_n - [X_1, u] dP_1 - \dots - [X_n, u] dP_n.$$

Si on remplace α , dans cette formule, successivement par X_i , P_i et Z , en écrivant que les coefficients de dX_i et dP_i sont nuls puisque ces quantités sont arbitraires, d'après les formules (13), et en tenant compte de la relation

$$dZ = P_1 dX_1 + \dots + P_n dX_n,$$

on trouve précisément les relations qu'il s'agissait d'établir

$$\begin{aligned} [X_i, X_k] &= 0, \quad [Z, X_i] = 0, \quad [P_i, P_k] = 0, \\ [X_i, P_j] &= -\rho, \quad [Z, P_i] = -\rho P_i, \quad [X_i, P_k] = 0, \quad (i \geq k). \end{aligned}$$

Il resterait, pour compléter ces relations, à calculer les crochets

$$[\rho, Z], \quad [\rho, X_i], \quad [\rho, P_i];$$

c'est ce qui se fait très aisément en appliquant la formule générale de Mayer

$$\begin{aligned} [u, v], w] + [v, w], u] + [w, u], v] \\ = \frac{\partial w}{\partial z} [v, u] + \frac{\partial u}{\partial z} [w, v] + \frac{\partial v}{\partial z} [u, w] \end{aligned}$$

à trois des fonctions Z , X_i , P_i . On trouve ainsi (1)

$$\begin{aligned} [\rho, Z] &= \rho^2 - \rho \frac{\partial Z}{\partial z}, \\ [\rho, X_i] &= -\rho \frac{\partial X_i}{\partial z}, \\ [\rho, P_i] &= -\rho \frac{\partial P_i}{\partial z}. \end{aligned}$$

108. Réciproquement, étant données $(n+1)$ fonctions distinctes Z , X_1, \dots, X_n des variables z, x_i, p_i , vérifiant les relations

$$[Z, X_i] = 0, \quad [X_i, X_k] = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

on peut toujours trouver, et d'une seule manière, n fonctions P_1, P_2, \dots, P_n des mêmes variables, telles que l'on ait

$$dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n = \rho (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n).$$

Nous allons montrer, à cet effet, que les $2n$ équations (9) et (10)

(1) Ces formules sont dues à H. Darboux (Bulletin des sciences mathématiques, t. VI, 2^e série, p. 62).

Tout ceci nous permet maintenant de résoudre le problème que nous nous sommes proposé (§ 105). Étant donnée une fonction Z des variables z, x_1, p_1 , on cherchera d'abord n fonctions X_1, \dots, X_n des mêmes variables, formant avec Z un système en involution de $(n + 1)$ fonctions distinctes. Les équations (9) et (10) fourniront alors, par de simples opérations algébriques, des fonctions P_1, \dots, P_n telles que la transformation

$$z' = Z, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i$$

soit une transformation de contact.

107. Étant données deux fonctions quelconques F, H des variables z, x_1, p_1 , si on fait une transformation de contact en remplaçant les variables z, x_1, p_1 par des fonctions de nouvelles variables z', x'_1, p'_1 , les fonctions F et H se transformeront en de nouvelles fonctions F' et H' des variables z', x'_1, p'_1 et le crochet $[F, H]_{z, x, p}$ se transformera, à un facteur près, dans le crochet $[F', H']_{z', x', p'}$ des fonctions F' et H' par rapport aux variables z', x'_1, p'_1 . En d'autres termes, le crochet $[F, H]$ est un invariant relativement à toute transformation de contact.

Supposons que l'on ait entre les différentielles des fonctions z, x_1, p_1 des variables nouvelles z', x'_1, p'_1 la relation

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = \rho (dz' - p'_1 dx'_1 - \dots - p'_n dx'_n).$$

Toutes les fois que le crochet $[F, H]$ sera nul, il en sera de même du crochet $[F', H']_{z', x', p'}$; en effet, lorsque $[F, H] = 0$, on peut trouver des fonctions $H_1, \dots, H_n, P_1, P_2, \dots, P_n$ telles que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned} dF - P_1 dH - P_2 dH_1 - \dots - P_n dH_n \\ = \Lambda (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n). \end{aligned}$$

En remplaçant, dans cette identité, z, x_1, p_1 par leurs valeurs en fonction des nouvelles variables, elle deviendra

$$\begin{aligned} dF' - P'_1 dH' - P'_2 dH'_1 - \dots - P'_n dH'_n \\ = \Lambda' \rho (dz' - p'_1 dx'_1 - \dots - p'_n dx'_n), \end{aligned}$$

et de là on conclut que le nouveau crochet est nul

$$[F', H']_{x, x', p} = 0.$$

Les deux crochets $[F', H]$ et $[F', H']_{x, x', p}$, s'annulant en même temps, ne doivent différer que par un facteur dépendant de la transformation seulement. Il est facile de calculer ce facteur, ce qui fournit en même temps une vérification du théorème. Remarquons pour cela que si on a deux fonctions

$$F(a_1, a_2, \dots, a_r), \quad H(a_1, \dots, a_r),$$

où a_1, a_2, \dots, a_r sont des fonctions quelconques de z, x_i, p_i , on aura

$$[F, H] = \sum_i \sum_k \frac{D(F, H)}{D(a_i, a_k)} [a_i, a_k].$$

Appliquons cette formule aux fonctions F, H , les variables intermédiaires étant ici z', x'_i, p'_i ; il vient

$$\begin{aligned} [F, H] &= \sum_i \frac{D(F', H')}{D(z', x'_i)} [z', x'_i] \\ &+ \sum_i \frac{D(F', H')}{D(z', p'_i)} [z', p'_i] + \sum_i \sum_k \frac{D(F', H')}{D(x'_i, x'_k)} [x'_i, x'_k] \\ &+ \sum_i \sum_k \frac{D(F', H')}{D(x'_i, p'_k)} [x'_i, p'_k] + \sum_i \sum_k \frac{D(F', H')}{D(p'_i, p'_k)} [p'_i, p'_k]. \end{aligned}$$

En tenant compte des relations qui ont été établies (§ 105) entre les fonctions z', x'_i, p'_i des variables z, x_i, p_i , il reste

$$[F, H] = \frac{1}{\rho} \sum_i - \frac{D(F', H')}{D(z', p'_i)} p'_i - \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{D(F', H')}{D(x'_i, p'_i)} = \frac{1}{\rho} [F', H']_{x, x', p}.$$

Par conséquent,

$$[F', H']_{x, x', p} = \rho [F, H]_{x, x', p}$$

108. Parmi les conséquences de la théorie précédente, il convient de signaler dès à présent les suivantes :

Les intégrales de l'équation linéaire

$$[Z, F] = 0$$

sont $Z, X_1, \dots, X_n, \frac{P_1}{P_i}, \dots, \frac{P_n}{P_i}$; de même, les intégrales de l'équation linéaire

$$[X_i, F] = 0$$

sont $Z, X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n$. Par conséquent, si on est parvenu à trouver n intégrales X_1, \dots, X_n de l'équation linéaire $[Z, F] = 0$, formant avec Z un système de $n + 1$ fonctions distinctes telles que tous les crochets $[X_i, X_k]$ soient identiquement nuls, on aura les autres intégrales par des différentiations et la résolution d'un système d'équations du premier degré (§ 66).

Plus généralement, le système complet de μ équations

$$[X_1, F] = 0, \quad \dots, \quad [X_\mu, F] = 0$$

admet les $2n + 1 - \mu$ intégrales distinctes

$$Z, X_1, \dots, X_n, P_{\mu+1}, \dots, P_n;$$

donc, si on connaît $n + 1 - \mu$ intégrales de ce système complet $Z, X_{\mu+1}, \dots, X_n$, formant avec X_1, \dots, X_μ un système de $n + 1$ fonctions distinctes en involution, on aura l'intégrale générale par des différentiations et la résolution d'un système d'équations du premier degré.

109. Étant donnée une équation du premier ordre

$$(13) \quad F(z, x_i, p_i) = 0,$$

si on remplace z, x_i, p_i par des fonctions de nouvelles variables z', x'_i, p'_i ,

$$z = f(z', x'_i, p'_i), \quad x_i = f_i(z', x'_i, p'_i), \quad p_i = q_i(z', x'_i, p'_i), \\ (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

satisfaisant à la relation

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = p (dz' - p'_1 dx'_1 - \dots - p'_n dx'_n),$$

l'équation proposée se change en une nouvelle équation du premier ordre

$$(14) \quad F_1(z', x'_i, p'_i) = 0,$$

et, comme toute multiplicité M , se change en une multiplicité M' , toute intégrale de la première équation se change en une intégrale de la seconde et inversement; d'une intégrale complète de l'une d'elles on déduira une intégrale complète de l'autre. Tel est le sens qu'il faut attacher à la transformation qui a été employée à plusieurs reprises (§§ 93, 99).

Les caractéristiques se correspondent dans les deux équations: soient, en effet, $\Phi_1, \dots, \Phi_{2n-1}$, les $2n-1$ intégrales distinctes, autres que F , de l'équation linéaire

$$[F, \Phi] = 0;$$

les caractéristiques de l'équation (13) sont représentées par les équations

$$F = 0, \quad \Phi_1 = C_1, \quad \dots, \quad \Phi_{2n-1} = C_{2n-1};$$

après la transformation, ces équations deviennent

$$F_1 = 0, \quad \Phi'_1 = C_1, \quad \dots, \quad \Phi'_{2n-1} = C_{2n-1},$$

et comme on avait $[F, \Phi]_{x,p} = 0$, on aura aussi $[F_1, \Phi']_{x',p'} = 0$, de sorte que ces nouvelles relations donnent les caractéristiques de l'équation (14).

Les équations différentielles des caractéristiques étant

$$\frac{dx_i}{\frac{\partial F}{\partial p_i}} = \frac{-dp_i}{\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial p_1} p_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_n} p_n}, \quad (i, k=1, 2, \dots, n),$$

on en conclut que, si on fait une transformation de contact qui change F en F_1 , le système précédent se change en un nouveau système de même forme

$$\frac{dx'_i}{\frac{\partial F_1}{\partial p'_i}} = \frac{-dp'_i}{\frac{\partial F_1}{\partial x'_i} + p'_i \frac{\partial F_1}{\partial z'}} = \frac{dz'}{\frac{\partial F_1}{\partial p'_1} p'_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial p'_n} p'_n}, \quad (i, k=1, 2, \dots, n),$$

où $F(z, x, p)$ est remplacé par $F_1(z', x', p')$.

D'une manière générale, toute transformation de contact change un système en involution de n équations en un système en involution de n équations; toute intégrale du premier système se change en

une intégrale du nouveau système et les multiplicités caractéristiques se correspondent encore dans les deux systèmes.

Pour donner une application de cette propriété générale, considérons les équations aux dérivées partielles du premier ordre à trois variables, dont les caractéristiques sont des lignes asymptotiques (§ 77). Si on applique à ces équations la transformation de M. Lie (§ 104), on est conduit à des équations du premier ordre dont les caractéristiques sont des lignes de courbure. On trouve ainsi deux catégories d'équations jouissant de cette propriété : les unes admettent une intégrale complète composée de sphères; l'intégrale générale étant une enveloppe de sphères, il est clair que les caractéristiques sont des lignes de courbure. Les autres équations s'obtiennent en écrivant qu'il existe une relation entre les quatre paramètres d'une des sphères osculatrices en chaque point d'une surface intégrale ⁽¹⁾.

110. Transformations en x, p . — Parmi les transformations de contact, il y a lieu de considérer plus particulièrement celles où les fonctions X_i, P_i ne contiennent pas la variable z ; on les appelle, pour abréger, *transformations en x, p* . On obtient des transformations de cette espèce en partant d'un système quelconque de relations entre $z, x_1, \dots, x_n, Z, X_1, \dots, X_n$, où les variables Z et z ne figurent que dans la combinaison $Z - \Lambda z$, Λ étant une constante arbitraire. Soient, en effet,

$$Z - \Lambda z - \phi_1(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n) = 0, \quad \phi_2 = 0, \dots, \phi_h = 0,$$

un système de relations de cette forme, ϕ_i ne contenant que les variables x_i, X_i . Les équations qu'il faudra joindre à celles-là pour déterminer la transformation et qu'on tirera de l'identité

$$\begin{aligned} dZ - \sum P_i dX_i - p \left(dz - \sum p_i dx_i \right) \\ = \lambda_1 [dZ - \Lambda dz - d\phi_1] + \lambda_2 d\phi_2 + \dots + \lambda_h d\phi_h, \end{aligned}$$

donnent d'abord $\lambda_1 = 1, \Lambda = p$ et il reste l'identité

$$-\sum P_i dX_i + \Lambda \sum p_i dx_i = -d\phi_1 + \lambda_2 d\phi_2 + \dots + \lambda_h d\phi_h.$$

(1) Quand on écrit une relation entre les quatre paramètres d'une des sphères osculatrices, on est conduit à une équation du second ordre. Mais cette équation du second ordre admet une solution singulière du premier ordre, dont les intégraux donnent la véritable solution du problème. Voir Darboux, *Solutions algébriques*, p. 222.)

qui conduit à des relations ne contenant plus que les variables $X_1, P_1, x_1, p_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n$. On trouvera donc pour $X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n$, $Z = Az$ des fonctions de x_i, p_i seulement et la transformation ainsi obtenue sera bien une transformation en x, p .

On obtient ainsi toutes les transformations de cette espèce. Supposons, en effet, que dans l'identité (6) les fonctions X_i, P_i ne contiennent pas z ; les formules (7), (8) et (9) deviennent

$$(7)' \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = \rho,$$

$$(8)' \quad \frac{\partial Z}{\partial x_i} - P_i \frac{\partial X_1}{\partial x_i} - \dots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial x_i} = -\rho p_i$$

$$(9)' \quad \frac{\partial Z}{\partial p_k} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_k} - \dots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial p_k} = 0, \quad (i, k=1, 2, \dots, n);$$

de la relation générale $[P_i, X_i] = \rho$ on conclut que ρ ne dépend pas de z et, par conséquent, Z sera de la forme

$$Z = \rho z + \Pi(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n).$$

Remplaçons Z par cette valeur dans les équations (8)' et (9)'; il vient

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} z = \varphi_i(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial p_k} z = \varphi_k(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n),$$

ce qui ne peut avoir lieu que si on a $\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial p_k} = 0$. La fonction ρ se réduit donc à une constante A , différente de zéro, et Z est de la forme

$$Z = Az + \Pi(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n).$$

Si on élimine p_1, \dots, p_n entre les équations qui donnent X_1, \dots, X_n, Z , il est clair que Z et z ne figureront dans les relations obtenues que dans la combinaison $Z = Az$. En rapprochant tous ces résultats du théorème général démontré au § 105, on peut donc énoncer la proposition suivante :

Si on a une identité de la forme

$$dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n = \rho (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n),$$

où p n'est pas nul et où les fonctions X_i, P_i ne renferment pas la variable z , p se réduit à une constante A et Z est de la forme

$$Z = Az + \Pi(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n);$$

de plus, les $2n$ fonctions X_i, P_i sont indépendantes et on a les relations

$$(X_i, X_j) = 0, \quad (X_i, P_j) = 0, \quad (P_i, X_j) = A, \quad (P_i, P_j) = 0, \\ [Az + \Pi, X_j] = 0, \quad [Az + \Pi, P_j] = -AP_j.$$

On peut toujours, sans restreindre la généralité, supposer $A = 1$, car cela revient à remplacer Z par AZ et X_i par AX_i . Si on remplace en outre Z par $z - \Omega(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$, on parvient à l'énoncé suivant :

Étant données $2n + 1$ fonctions Ω, X_i, P_i des $2n$ variables indépendantes x_i, p_i , dont les différentielles totales vérifient la relation

$$(15) \quad d\Omega + P_1 dX_1 + \dots + P_n dX_n = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$$

les $2n$ fonctions X_i, P_i sont indépendantes et on a les relations

$$(16) \quad \begin{cases} (X_i, X_j) = 0, & (X_i, P_j) = 0, & (P_i, P_j) = 0, & (P_i, X_j) = 1, \\ [z - \Omega, X_j] = 0, & [z - \Omega, P_j] = -P_j. \end{cases}$$

III. Inversement, supposons que l'on connaisse n fonctions distinctes X_1, \dots, X_n des variables x_i, p_i , telles que toutes les parenthèses (X_i, X_j) soient nulles. Les équations linéaires

$$(17) \quad [X_i, \Phi] = 0, \quad \dots, \quad [X_n, \Phi] = 0$$

forment un système complet de n équations distinctes dont on connaît déjà n intégrales X_1, \dots, X_n ; ce système admettra donc une autre intégrale qui contiendra nécessairement z . Si on prend un nouveau système de variables indépendantes

$$z, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n}$$

où $y_1 = X_1, \dots, y_n = X_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n}$ étant des fonctions de x_i, p_i , choisies arbitrairement, mais de façon à former avec X_1, \dots, X_n un système de $2n$ fonctions distinctes, le système complet précédent se

change en un nouveau système complet où les coefficients seront encore indépendants de z . Ces nouvelles équations devant admettre comme intégrales y_1, y_2, \dots, y_n ne contiendront pas de termes en $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}$. On pourra les résoudre par rapport à $\frac{\partial \Phi}{\partial y_{n+1}}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}$; autrement on en tirerait $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ et le système (17) n'admettrait pas d'intégrales contenant z , ce qui est impossible. Les équations (17) seront donc remplacées par des équations de la forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_{n+1}} + \Lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} + \Lambda_n \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

où les coefficients Λ ne contiennent pas z . Pour qu'un tel système soit jacobien, il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial \Lambda_i}{\partial y_{n+1}} = \frac{\partial \Lambda_j}{\partial y_{n+1}},$$

et, en posant $\Phi = z - \Omega$, on aura Ω par une quadrature. On peut donc obtenir par une quadrature une fonction Ω des variables x, p vérifiant les n équations $[z - \Omega, X_i] = 0$. Une fois Ω déterminé, les relations (8)' et (9)' détermineront, et d'une seule façon, les valeurs de P_1, \dots, P_n . Le raisonnement est le même que celui qui a été fait plus haut (§ 100). On conclut de là la proposition suivante :

Étant données n fonctions distinctes X_1, \dots, X_n des $2n$ variables x, p , satisfaisant aux relations $(X_i, X_j) = 0$, on peut toujours trouver des fonctions Ω, P_1, \dots, P_n des mêmes variables donnant lieu à l'identité (15).

La fonction Ω s'obtient par une quadrature et on a ensuite P_1, \dots, P_n en résolvant un système d'équations du premier degré.

112. On peut faire encore une autre hypothèse. Supposons que l'on ait $2n$ fonctions $X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n$ des $2n$ variables x, p satisfaisant aux relations

$$(X_i, X_k) = 0, \quad (P_i, P_k) = 0, \quad (X_i, P_k) = 0, \quad (P_i, X_k) = 1, \\ (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Je dis d'abord que ces $2n$ fonctions sont distinctes. En effet, s'il existait une relation telle que

$$\Phi(X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n) = 0,$$

on en déduirait

$$(X_i, \Phi) = -\frac{\partial \Phi}{\partial P_i} = 0, \quad (P_i, \Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = 0,$$

et la fonction Φ se réduirait à une constante. D'après ce qui précède, on pourra donc trouver des fonctions V, Π_1, \dots, Π_n donnant lieu à l'identité

$$dV + \Pi_1 dX_1 + \dots + \Pi_n dX_n = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n;$$

la différence $P_i - \Pi_i$ sera, par conséquent, une intégrale commune des n équations linéaires

$$(X_i, f) = 0, \quad \dots, \quad (X_n, f) = 0,$$

dont on connaît n intégrales distinctes X_1, \dots, X_n . On aura donc

$$P_i = \Pi_i + W_i(X_1, \dots, X_n),$$

et les relations $(P_i, P_k) = 0$ donnent ensuite

$$(\Pi_i + W_i, \Pi_k + W_k) = \frac{\partial W_i}{\partial X_k} - \frac{\partial W_k}{\partial X_i} = 0.$$

Il suit de là que l'expression

$$\sum_{i=1}^n P_i dX_i - \sum_{i=1}^n \Pi_i dX_i$$

est une différentielle exacte $dW = \sum W_i dX_i$ et on a l'identité

$$d(V - W) + \sum_{i=1}^n P_i dX_i = \sum_{i=1}^n p_i dx_i.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant données $2n$ fonctions X_i, P_i des $2n$ variables indépendantes x_i, p_i satisfaisant aux relations

$$(18) \quad (X_i, X_k) = 0, \quad (X_i, P_k) = 0, \quad (P_i, P_k) = 0, \quad (P_i, X_k) = 1, \\ (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

ces $2n$ fonctions sont indépendantes et il existe une fonction Ω donnant lieu, avec les précédentes, à l'identité (15)

$$d\Omega + P_1 dX_1 + \dots + P_n dX_n = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n.$$

Remarquons que la fonction Ω est déterminée, à une constante additive près, quand on connaît les fonctions X_i, P_i . On peut donc regarder une transformation en x, p comme entièrement définie quand on connaît les $2n$ fonctions X_i, P_i satisfaisant aux conditions (18).

113. Les transformations en x, p jouent le même rôle par rapport aux équations aux dérivées partielles où z n'entre pas, que les transformations de contact générales par rapport aux équations quelconques. Ainsi, étant données deux fonctions quelconques F, Φ des variables x_i, p_i , désignons par F', Φ' ce que deviennent ces fonctions après une transformation en x, p ,

$$x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i,$$

les fonctions X_i, P_i satisfaisant aux relations (18); on aura identiquement

$$(F', \Phi')_{x,p} = (F, \Phi)_{x,p}.$$

Toute équation du premier ordre, où z n'entre pas, se change en une équation de même forme et les équations différentielles des caractéristiques donnent, après la transformation, les équations différentielles des caractéristiques de la nouvelle équation.

Ceci s'applique en particulier aux systèmes canoniques. Étant donné le système d'équations différentielles

$$(19) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

imaginons que l'on prenne un nouveau système de $2n$ variables

$$x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i,$$

les fonctions X_i, P_i satisfaisant aux relations (18), et soit H' ce que devient la fonction H par cette substitution. Le système (19) est alors remplacé par un système de même forme

$$(19)' \quad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \quad \frac{dp'_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial x'_i}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Ce théorème était connu de Bour⁽¹⁾ et de Jacobi⁽²⁾, qui en a fait d'importantes applications à la théorie des perturbations. Il se présente ici comme une conséquence des propriétés d'invariance du système des caractéristiques, relativement à une transformation de contact.

On verra de même que si on connaît n intégrales $f_1, \dots, f_r, \dots, f_r$ du système complet

$$(f_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (f_r, f) = 0, \quad \text{où} \quad (f_i, f_k) = 0,$$

formant un système en involution, les autres intégrales de ce système s'obtiendront par une quadrature et des opérations algébriques.

114. Transformations homogènes. — Si dans l'identité (15) la fonction Ω se réduit à une constante, cette identité prend la forme

$$P_1 dX_1 + \dots + P_n dX_n = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n,$$

et les dernières des relations (16) donnent

$$\begin{aligned} [z, X_i] &= - \left(p_1 \frac{\partial X_i}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial X_i}{\partial p_n} \right) = 0, \\ [z, P_i] &= - \left(p_1 \frac{\partial P_i}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial P_i}{\partial p_n} \right) = -P_i; \end{aligned}$$

les fonctions X_i sont donc des fonctions homogènes de degré 0 et les P_i des fonctions homogènes de degré 1 des variables p_i . La proposition du § 110 peut alors s'énoncer ainsi :

Si $2n$ fonctions X_i, P_i des $2n$ variables x_i, p_i satisfont à l'identité

$$(20) \quad P_1 dX_1 + \dots + P_n dX_n = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n,$$

ces $2n$ fonctions sont indépendantes, X_i est une fonction homogène de degré 0 et P_i une fonction homogène de degré 1 des variables p_i , et on a

$$(21) \quad (X_i, X_k) = 0, \quad (X_i, P_k) = 0, \quad (P_i, P_k) = 0, \quad (P_i, X_k) = 1, \\ (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

L'identité (20) peut encore s'écrire

$$dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n,$$

(1) Mémoires des savants étrangers, t. XIV.

(2) Neue Methoden, etc.; Vorlesungen über Dynamik.

en posant $Z = z$. Le théorème précédent se déduit alors du théorème général du § 105 en supposant que dans l'identité précédente X_i et P_i ne contiennent pas z . La transformation de contact

$$z' = Z, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i$$

change une fonction homogène de degré q des variables p'_i en une fonction homogène de degré q des variables p_i . Nous l'appellerons, pour abréger, *transformation homogène*.

Réciproquement, étant données n fonctions distinctes X_1, \dots, X_n des variables x_i, p_i , homogènes et de degré 0 par rapport aux p_i et satisfaisant aux relations $(X_i, X_k) = 0$, on peut toujours trouver, et d'une seule manière, n fonctions P_1, \dots, P_n des mêmes variables, telles que l'on ait l'identité

$$P_1 dX_1 + \dots + P_n dX_n = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n.$$

Ou aura, en effet, pour déterminer P_1, \dots, P_n , les $2n$ équations

$$\begin{aligned} A_k &= P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_k} + \dots + P_n \frac{\partial X_n}{\partial x_k} - p_k = 0, \\ B_k &= P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_k} + \dots + P_n \frac{\partial X_n}{\partial p_k} = 0, \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

dont les premiers membres vérifient les n relations linéaires

$$\sum \left(A_k \frac{\partial X_h}{\partial p_k} - B_k \frac{\partial X_h}{\partial x_k} \right) = \sum P_i (X_h, X_i) - \sum p_i \frac{\partial X_h}{\partial p_i} = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Les fonctions X_1, \dots, X_n étant distinctes, on pourra toujours résoudre n de ces équations par rapport à P_1, \dots, P_n et les valeurs ainsi obtenues satisfont aux n dernières. (Voir § 105.)

Étant données $2n$ fonctions X_i, P_i des variables x_i, p_i satisfaisant aux relations

$$(X_i, X_k) = 0, \quad (X_i, P_k) = 0, \quad (P_i, P_k) = 0, \quad (P_i, X_k) = 1, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

X_i étant une fonction homogène de degré 0 et P_i une fonction homogène de degré 1 des variables p_i , on a identiquement

$$P_1 dX_1 + \dots + P_n dX_n = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n.$$

On démontrera d'abord, comme au § 113, que les fonctions X_i, P_i sont distinctes. Par suite, on pourra trouver n fonctions Π_1, \dots, Π_n homogènes et de degré 1 par rapport aux p_i , donnant lieu à l'identité

$$\sum \Pi_i dX_i = \sum p_i dx_i.$$

La différence $P_i - \Pi_i$ sera une intégrale du système complet

$$(X_i, f) = 0, \quad \dots, \quad (X_n, f) = 0,$$

et comme cette intégrale est homogène et de degré 1, elle sera forcément nulle, puisqu'elle ne peut être une fonction de X_1, \dots, X_n .

115. De toute transformation homogène à $2n + 2$ variables (x, p) , on peut déduire une transformation de contact générale à $2n + 1$ variables z, x, p . Supposons, en effet, qu'on ait une identité de la forme

$$(22) \quad Q_1 dY_1 + \dots + Q_{n+1} dY_{n+1} = q_1 dy_1 + \dots + q_{n+1} dy_{n+1};$$

posons

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_{n+1} = Z, \quad Y_1 = X_1, \quad \dots, \quad Y_n = X_n, \\ y_{n+1} = z, \quad y_1 = x_1, \quad \dots, \quad y_n = x_n, \\ -\frac{Q_1}{Q_{n+1}} = P_1, \quad \dots, \quad -\frac{Q_n}{Q_{n+1}} = P_n, \\ -\frac{q_1}{q_{n+1}} = p_1, \quad \dots, \quad -\frac{q_n}{q_{n+1}} = p_n, \quad \frac{q_{n+1}}{Q_{n+1}} = p; \end{array} \right.$$

Z, X_i, P_i, p seront des fonctions des seules variables z, x, p et la relation (22) devient

$$(24) \quad dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n = p(dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n).$$

On aura donc bien une transformation de contact à $2n + 1$ variables z, x, p . Inversement, de l'identité (24) on peut remonter à l'identité (22) par la transformation (23). Donc, de la transformation de contact générale à $2n + 1$ variables (z, x, p) on déduit la transformation homogène générale à $2n + 2$ variables.

Prenons encore

$$(F, \Phi)_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right),$$

F et Φ étant deux fonctions quelconques de $y_1, \dots, y_{n+1}, q_1, \dots, q_{n+1}$.
Si F et Φ sont des fonctions homogènes de degré 0 des q_i et si on pose

$$y_{n+1} = z, \quad y_1 = x_1, \quad \dots, \quad y_n = x_n, \\ \frac{q_1}{q_{n+1}} = -p_1, \quad \dots, \quad \frac{q_n}{q_{n+1}} = -p_n.$$

F et Φ deviennent des fonctions de z, x_i, p_i et on vérifie immédiatement que l'on a

$$(F, \Phi)_{n+1} = -\frac{1}{q_{n+1}} [F, \Phi]_{z,p}.$$

Pour que les $2n + 1$ fonctions $Q_1, \dots, Q_{n+1}, Y_1, \dots, Y_{n+1}$ des variables y_i, q_i vérifient l'identité (22), il faut et il suffit, on vient de le voir, que l'on ait les relations

$$q_1 \frac{\partial Y_i}{\partial q_1} + \dots + q_{n+1} \frac{\partial Y_i}{\partial q_{n+1}} = 0, \quad q_1 \frac{\partial Q_i}{\partial q_1} + \dots + q_{n+1} \frac{\partial Q_i}{\partial q_{n+1}} = Q_n, \\ (Y_i, Y_k)_{n+1} = 0, \quad (Y_i, Q_k)_{n+1} = 0, \quad (Q_i, Q_k)_{n+1} = 0, \quad (Q_i, Y_k)_{n+1} = 1, \\ (i, k = 1, 2, \dots, n + 1).$$

Si on effectue la transformation (23), l'identité (22) donne l'identité (24), $Z, X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n, \rho$ désignant des fonctions des $2n + 1$ variables z, x_i, p_i . Les relations $(Y_i, Y_k)_{n+1} = 0$ fournissent les nouvelles relations

$$[Z, X_i] = 0, \quad [X_i, X_k] = 0;$$

voyons ce que deviennent les autres. La relation $(Q_{n+1}, Y_{n+1})_{n+1} = 1$, par exemple, peut s'écrire

$$\left(\frac{q_{n+1}}{\rho}, Y_{n+1}\right)_{n+1} = 1,$$

ou

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{1}{\rho^2} [\rho, Z] = 1.$$

On déduira de même des autres relations qui ont lieu entre les Q_i, Y_i les équations nouvelles

$$[\rho, X_i] + \rho \frac{\partial X_i}{\partial z} = 0, \quad [\rho, P_i] + \rho \frac{\partial P_i}{\partial z} = 0, \quad [P_i, X_j] = \rho, \quad [P_i, X_k] = 0, \\ [P_i, Z] = \rho P_i, \quad [P_i, P_k] = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

D'où on conclut le théorème suivant qui complète la proposition du § 105 :

Pour que $2n + 2$ fonctions $Z, X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n, \rho$ des $2n + 1$ variables $z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ vérifient identiquement la relation

$$dZ - P_1 dx_1 - \dots - P_n dx_n = \rho (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n),$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{cases} [P_i, P_j] = 0, & [P_i, X_j] = 0, & [X_i, X_j] = 0, & [P_i, X_j] = \rho, \\ [X_i, Z] = 0, & [P_i, Z] = \rho P_i, & \rho \leq 0, \\ \left[\rho, X_i \right] + \rho \frac{\partial X_i}{\partial z} = 0, & \left[\rho, P_i \right] + \rho \frac{\partial P_i}{\partial z} = 0, & \left[\rho, Z \right] + \rho \frac{\partial Z}{\partial z} - \rho^2 = 0, \\ & (i, k = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

On reconnaît d'ailleurs aisément, en appliquant la formule générale de Mayer

$$\begin{aligned} & [[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] \\ &= \frac{\partial w}{\partial z} [v, u] + \frac{\partial u}{\partial z} [w, v] + \frac{\partial v}{\partial z} [u, w], \end{aligned}$$

que les équations de la dernière ligne sont des conséquences des premières.

116. Applications de la théorie précédente. — Après cette étude sommaire des propriétés fondamentales des transformations de contact, nous allons appliquer les résultats obtenus à la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

La méthode d'intégration de Jacobi se déduit immédiatement de ce qui précède, débarrassée de toutes ses restrictions. S'il s'agit, en effet, d'intégrer l'équation du premier ordre

$$(25) \quad Z = a,$$

et si on a obtenu n fonctions X_1, \dots, X_n formant avec Z un système de $n + 1$ fonctions distinctes satisfaisant aux relations

$$[Z, X_i] = 0, \quad [X_i, X_k] = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

on a vu qu'on pouvait trouver n fonctions P_1, \dots, P_n donnant lieu à

l'identité

$$dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_n dX_n = \rho (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n),$$

ρ n'étant pas nul. Les $n + 1$ équations

$$(26) \quad Z = a_0, \quad X_1 = a_1, \quad \dots, \quad X_n = a_n,$$

où a_1, \dots, a_n sont des constantes arbitraires, entraînent donc la relation

$$(27) \quad dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0$$

et, par conséquent, fournissent une intégrale complète de l'équation (25). On peut d'ailleurs obtenir avec la même facilité l'intégrale générale. En effet, le système des équations (25) et (27) peut être remplacé par le système des deux équations

$$(28) \quad \begin{aligned} Z &= a_0, \\ P_1 dX_1 + \dots + P_n dX_n &= 0, \end{aligned}$$

dont on obtient la solution générale par la méthode qui a déjà servi bien des fois. On satisfait à la relation (28) de plusieurs manières :

1° En posant $X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n$, ce qui donne une intégrale complète.

2° En établissant entre X_1, \dots, X_n , h relations distinctes

$$(29) \quad \phi_1 = 0, \quad \dots, \quad \phi_h = 0.$$

et en écrivant que l'on a identiquement

$$P_1 dX_1 + \dots + P_n dX_n = \lambda_1 d\phi_1 + \dots + \lambda_h d\phi_h,$$

c'est-à-dire

$$(30) \quad P_i = \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial X_i} + \dots + \lambda_h \frac{\partial \phi_h}{\partial X_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

L'élimination de $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ entre les $n + h + 1$ équations (25), (29) et (30) conduit à $n + 1$ relations entre z, x_n, p_i ; c'est l'intégrale générale.

3° On satisfait encore à l'équation (28) en prenant

$$(31) \quad P_1 = 0, \quad \dots, \quad P_n = 0.$$

L'intégrale définie par les équations (25) et (31) est une intégrale singulière. En effet, pour tous les éléments de cette intégrale, on doit avoir identiquement

$$dZ = p (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = p, \quad \frac{\partial Z}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_i} = -p p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et, par suite,

$$\frac{\partial Z}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

ce qui est bien la définition des intégrales singulières (§ 14). Il est clair d'ailleurs que cette solution singulière n'existera qu'autant que les équations qui la définissent ne deviennent pas incompatibles.

117. Ce procédé s'étend de lui-même aux systèmes en involution. Car les équations

$$Z = a_n, \quad X_1 = a_1, \quad \dots, \quad X_{n-1} = a_{n-1}, \quad dz - \sum_{i=1}^n p_i dx_i = 0$$

sont équivalentes aux équations

$$Z = a_n, \quad X_1 = a_1, \quad \dots, \quad X_{n-1} = a_{n-1}, \\ P_n dX_n + \dots + P_1 dX_1 = 0,$$

et on peut traiter comme tout à l'heure cette dernière relation. Si on prend

$$X_n = a_n, \quad \dots, \quad X_1 = a_1,$$

a_n, \dots, a_1 étant des constantes arbitraires, on a une intégrale complète. Si on prend

$$P_n = 0, \quad \dots, \quad P_1 = 0,$$

l'intégrale ainsi obtenue satisfait à la définition des intégrales singulières (§ 97). On a, en effet, pour tous les éléments de cette intégrale, l'identité

$$dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_{n-1} dX_{n-1} = p (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial z} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} - \dots - P_{n-1} \frac{\partial X_{n-1}}{\partial z} &= p, \\ \frac{\partial Z}{\partial x_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} - \dots - P_{n-1} \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_i} &= -p p_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \\ \frac{\partial Z}{\partial p_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_i} - \dots - P_{n-1} \frac{\partial X_{n-1}}{\partial p_i} &= 0,\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dx_i} - P_1 \frac{dX_1}{dx_i} - \dots - P_{n-1} \frac{dX_{n-1}}{dx_i} = 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial p_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_i} - \dots - P_{n-1} \frac{\partial X_{n-1}}{\partial p_i} = 0. \end{cases}$$

On a un système de $2n$ équations linéaires à $n-1$ indéterminées P_1, \dots, P_{n-1} . Pour que ce système soit compatible, il faut donc que tous les déterminants d'ordre n contenus dans le tableau rectangulaire

$$\begin{vmatrix} \frac{dZ}{dx_1}, & \dots, & \frac{\partial Z}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dX_{n-1}}{dx_1}, & \dots, & \frac{\partial X_{n-1}}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

soient nuls pour tous les éléments de l'intégrale considérée.

118. D'une manière générale, la connaissance d'une transformation de contact

$$z' = Z, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i$$

permet de former une infinité de systèmes en involution dont on peut écrire immédiatement une intégrale complète. En effet, nous savons que les équations

$$Z = a_0, \quad X_i = a_i, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

où a_0, a_1, \dots, a_n sont des constantes arbitraires, ont pour conséquence la relation

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0$$

et, par suite, représentent toujours une multiplicité M_n . Par consé-

quent, les équations précédentes fournissent une intégrale complète du système

$$\phi_1(Z, X_1, \dots, X_n) = 0, \quad \dots, \quad \phi_h(Z, X_1, \dots, X_n) = 0,$$

pourvu que l'on ait

$$\phi_1(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0, \quad \dots, \quad \phi_h(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0,$$

ce qui laisse bien subsister $n - h + 1$ constantes arbitraires.

Des remarques de cette nature avaient déjà été faites par Euler et Lagrange au sujet de certaines classes d'équations différentielles, analogues à l'équation de Clairaut, que l'on peut intégrer par des différentiations. Ces équations sont précisément celles que l'on obtient en portant d'une transformation de contact connue dans le plan. Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas de trois variables et soient Z, X, Y trois fonctions distinctes de z, x, y donnant lieu à l'identité

$$dZ = P dX + Q dY = \varepsilon (dz - p dx - q dy);$$

soit, d'autre part,

$$(32) \quad U = f(X, Y, Z) = 0$$

une équation du premier ordre. Intégrer cette équation, cela revient à exprimer x, y, z, p, q en fonction de deux variables indépendantes de telle façon que l'on ait la relation (32) et la relation

$$(33) \quad dz - p dx - q dy = 0.$$

De l'équation (32) on tire

$$dU = \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial Y} dY + \frac{\partial f}{\partial Z} dZ = 0,$$

ou

$$dU = \left(\frac{\partial f}{\partial X} + P \frac{\partial f}{\partial Z} \right) dX + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} + Q \frac{\partial f}{\partial Z} \right) dY + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial Z} (dz - p dx - q dy) = 0,$$

et le système (32) et (33) peut être remplacé par le suivant :

$$\begin{cases} (32) & U = f(X, Y, Z) = 0, \\ (34) & \left(\frac{\partial f}{\partial X} + P \frac{\partial f}{\partial Z} \right) dX + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} + Q \frac{\partial f}{\partial Z} \right) dY = 0. \end{cases}$$

On satisfait à ces équations de plusieurs manières :

1° En posant $X = a$, $Y = b$, $f(X, Y, Z) = 0$; c'est l'intégrale complète;

2° En établissant entre X et Y une relation de forme arbitraire

$$\varphi(X, Y) = 0$$

qui, jointe à l'équation (34), donne

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X} + P \frac{\partial f}{\partial Z}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - \frac{\partial \varphi}{\partial X} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} + Q \frac{\partial f}{\partial Z}\right) = 0;$$

avec la relation $U = 0$, on a l'intégrale générale;

3° En prenant

$$U = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial X} + P \frac{\partial f}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial Y} + Q \frac{\partial f}{\partial Z} = 0.$$

Si ces trois équations sont compatibles, elles déterminent l'intégrale singulière.

L'équation (32) s'intègre donc par des différentiations et des éliminations. Mais on ne doit point considérer les équations de cette forme comme formant une classe particulière. Au contraire, il résulte de ce qui précède qu'étant donnée une équation quelconque du premier ordre $Z = 0$, on peut toujours trouver deux autres fonctions X et Y déterminant avec celle-ci une transformation de contact. Toute la difficulté du problème consiste précisément à trouver ces deux fonctions X et Y , tandis que, si l'équation est de la forme (32), la question est immédiatement résolue.

Quelques explications géométriques font bien comprendre la nature de ce procédé d'intégration. Imaginons que les fonctions X, Y, Z soient déduites d'une seule relation

$$(35) \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$

à laquelle il faudra joindre (§ 103) les équations

$$(36) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q = 0.$$

Considérons pour un moment X, Y, Z comme des paramètres, x, y, z comme des coordonnées courantes. On a ainsi une surface Σ dépendant

de trois paramètres dont on peut disposer de façon qu'elle ait avec une surface donnée S en un point donné (x, y, z, p, q) un contact du premier ordre. Les valeurs des paramètres X, Y, Z seront précisément déterminées par les équations (35) et (36). Toute équation aux dérivées partielles du premier ordre telle que

$$(32) \quad f(X, Y, Z) = 0$$

exprime donc la propriété suivante des surfaces intégrales : si l'on considère une de ces surfaces S et la surface Z tangente à S en un de ses points, les trois paramètres dont dépend cette surface Z satisfont à la relation (32). Or, il est clair que l'on a des surfaces satisfaisant à cette condition : 1° en prenant les surfaces Z elles-mêmes pour lesquelles les trois paramètres vérifient l'équation (32); 2° en joignant à l'équation (32) une autre relation arbitraire $\phi(X, Y, Z) = 0$ et en prenant l'enveloppe de la suite simplement infinie de surfaces Z dont les paramètres satisfont à ces deux relations; 3° en prenant l'enveloppe de toutes les surfaces Z dont les paramètres vérifient uniquement la relation (32). On retrouve ainsi les trois catégories d'intégrales, l'intégrale complète, l'intégrale générale et l'intégrale singulière.

On aurait une interprétation analogue si la transformation de contact était déduite de deux relations entre x, y, z, X, Y, Z .

Prenons, par exemple,

$$\phi = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 - R^2,$$

on aura

$$X = x - \frac{Rp}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Y = y - \frac{Rq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Z = z + \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

La surface Z est une sphère de rayon R ayant pour centre le point de coordonnées X, Y, Z . Toute équation de la forme

$$f\left(x - \frac{Rp}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, y - \frac{Rq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, z + \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 0$$

exprime donc que la sphère de rayon R tangente en un point quelconque à la surface intégrale S a son centre sur une surface donnée S' . L'intégrale complète se composera d'une sphère de rayon R ayant

x_{s+1}, \dots, x_n . Si on change alors z en $z + \alpha + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, x_{s+1} en $x_{s+1} + \alpha_{s+1}$, ..., x_n en $x_n + \alpha_n$, on introduit dans le système (37) ainsi que dans l'intégrale complète (38) $m + 1$ constantes arbitraires $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Nous pouvons donc remplacer le système (37) par un nouveau système contenant $m + 1$ constantes

$$(39) \quad F(z, x_1, p_1, \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad F_1 = 0, \quad \dots, \quad F_n = 0,$$

et admettant une intégrale complète définie par h relations

$$(40) \quad f_1(z, x_1, \dots, x_n, \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad \dots, \quad f_h = 0;$$

le système (39) n'étant pas au fond plus général que le système (37), c'est sur ce dernier système que nous raisonnerons. D'après la manière même dont nous avons obtenu les équations (39), on peut résoudre ces équations par rapport à $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$; soient

$$(41) \quad \alpha = \varphi(z, x_1, p_1), \quad \alpha_1 = \varphi_1(z, x_1, p_1), \quad \dots, \quad \alpha_n = \varphi_n(z, x_1, p_1)$$

les valeurs ainsi obtenues. Le système (39) peut encore s'écrire

$$(39)' \quad \varphi = \text{Const.}, \quad \varphi_1 = \text{Const.}, \quad \dots, \quad \varphi_n = \text{Const.}$$

Soit P la multiplicité ponctuelle représentée par les équations (40). La multiplicité M_n correspondante s'obtiendra comme il suit : Quand on se déplace sur P , les coordonnées z, x_1, \dots, x_n sont liées par les seules relations (40); par conséquent, la relation

$$(42) \quad dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0$$

devra être une conséquence des relations $df_1 = 0, \dots, df_h = 0$. Il faudra donc que l'on ait

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = \lambda_1 df_1 + \dots + \lambda_h df_h$$

c'est-à-dire

$$(43) \quad \begin{cases} 1 = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial z}, \\ -p_i = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Les $(n + 1 + h)$ équations (40) et (43) permettent d'exprimer $z, x_1, p_1, \lambda_1, \dots, \lambda_h$ en fonctions de n variables indépendantes; elles repré-

sont dans la multiplicité M_n correspondante à P . Par hypothèse, l'élimination de $a_{n+1}, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ entre les équations (40) et (43) conduit aux relations (39) seulement. Cela revient à dire que ces équations (40) et (43) peuvent être résolues par rapport à $a, a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, les valeurs de a, a_1, \dots, a_n étant données précisément par les relations (41). Soient

$$a_{n+1} = \varphi_{n+1}(z, x_1, p_1), \quad \dots, \quad a_n = \varphi_n(z, x_1, p_1),$$

les valeurs obtenues pour a_{n+1}, \dots, a_n . Introduisons n fonctions nouvelles b_1, \dots, b_n , définies par les équations

$$(44) \quad \left\{ \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} + \dots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial a} \right) b_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_i} + \dots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial a_i} = 0, \right. \\ \left. (i = 1, 2, \dots, n). \right.$$

Des équations (40) et (43) qui définissent les fonctions a_i , on tire, en différentiant et formant l'expression $\lambda_1 df_1 + \dots + \lambda_n df_n$,

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} + \dots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial a} \right) (da - b_1 da_1 - \dots - b_n da_n) \\ + \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial z} \right) (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n) = 0.$$

En posant

$$(45) \quad p \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} + \dots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial a} \right) + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial z} = 0,$$

on aura

$$(46) \quad da - b_1 da_1 - \dots - b_n da_n = p (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n).$$

Nous retrouvons donc l'équation fondamentale des transformations de contact. Comme p n'est pas nul, on voit d'abord que les fonctions $a, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont indépendantes et, par suite, on pourra exprimer z, x_1, p_1 en fonction de a, a_1, b_1 . Nous voyons en outre que les équations (39)' forment un système en involution et le calcul précédent nous donne d'autres fonctions a_{n+1}, \dots, a_n formant avec celui-là un nouveau système en involution de $n + 1$ équations. Il conduit donc au but que l'on se propose d'obtenir quand on applique la méthode de Jacobi et Mayer.

Il est aisé de déduire de là que les différentes classes d'intégrales, obtenues en établissant une ou plusieurs relations entre $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ne sont plus distinctes quand on part de la nouvelle intégrale complète. En effet, si on regarde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions, la transformation précédente revient à une transformation de contact. Or, si l'on a dans l'espace à n dimensions une multiplicité M_{n-r} , déduite d'une multiplicité ponctuelle représentée par r relations entre $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, après la transformation, la multiplicité ponctuelle correspondante sera, en général, représentée par une seule relation entre $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, si la transformation n'est pas choisie d'une façon particulière. On voit donc qu'une classification des intégrales, basée sur le nombre des relations établies entre $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, serait illusoire; cette distinction tient au choix de l'intégrale complète, mais n'a rien d'essentiel pour l'équation aux dérivées partielles elle-même.

121. On peut rattacher à la théorie des transformations de contact une méthode d'intégration des équations simultanées, due à Korkine ⁽¹⁾, et dont la démonstration directe exige de longs calculs. D'une manière générale, soit

$$(54) \quad Y_1 = 0, \quad \dots, \quad Y_n = 0$$

un système en involution. Supposons qu'on ait obtenu une intégrale complète de l'équation

$$Y_1 = \alpha_1;$$

on pourra alors, nous venons de le voir (§ 119), déterminer par des calculs algébriques d'autres fonctions $Z, X_2, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n$ telles que les formules

$$z' = Z, \quad x'_k = X_k, \quad p'_k = P_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

où $Y_1 = X_1$, définissent une transformation de contact. Par cette transformation, le système (54) se change en un nouveau système en involution

$$(55) \quad x'_1 = 0, \quad Y'_1 = 0, \quad \dots, \quad Y'_n = 0.$$

⁽¹⁾ Korkine, *Comptes rendus*, t. LXVIII, p. 1499. La première idée de cette méthode paraît due à Bour.

Y'_1, \dots, Y'_m étant des fonctions de z', x'_1, p'_1 . Puisque ce système est en involution, on a identiquement

$$[x'_1, Y'_i] = -\frac{\partial Y'_i}{\partial p'_1} = 0.$$

Les fonctions Y'_i ne contiennent donc pas p'_1 et on est ramené à un système en involution de $m-1$ équations à $n-1$ variables x'_1, \dots, x'_n .

Pour préciser davantage, supposons que les équations proposées

$$f_1 = 0, \quad \dots, \quad f_m = 0$$

ne contiennent pas z et soit

$$z + a = F(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_n)$$

une intégrale complète de l'équation $f_1 = a_1$. Considérons la transformation de contact obtenue en partant de la relation

$$z + z' = F(x_1, x_2, \dots, x_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_n);$$

il faudra joindre à cette relation les suivantes

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial x'_i}, \quad p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et ces équations définiront $x'_1, \dots, x'_n, p'_1, \dots, p'_n$ en fonction de x_1, p_1 . Pour avoir x'_1 par exemple, il faudra éliminer x'_2, \dots, x'_n entre les n dernières équations; mais cette élimination conduit à la relation $x'_1 = f_1$. La première équation du nouveau système sera donc $x'_1 = 0$, et les autres équations

$$f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_m = 0$$

formeront un nouveau système en involution ne renfermant pas p'_1 .

Des transformations analogues ont été employées par M. Mayer ⁽¹⁾ pour démontrer la méthode de Lie.

⁽¹⁾ Mayer, *Die Lie'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* (Mathematische Annalen, t. VI, p. 188-193).

CHAPITRE XII

Théorie des groupes. Méthode générale d'intégration ⁽¹⁾.

122. Avant d'aborder la théorie des groupes, résumons les différentes méthodes d'intégration qui ont été établies. Nous supposons désormais que z ne figure pas dans les équations qu'il s'agit d'intégrer. Soit

$$(1) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_m = 0, \quad (m < n),$$

un système en involution de m équations distinctes. Pour intégrer par la méthode de Jacobi et Mayer, il faudra commencer par déterminer $n - m$ fonctions f_{m+1}, \dots, f_n des variables x_1, p_1 , formant avec les précédentes un système en involution de n fonctions distinctes. Cela fait, si les équations

$$f_1 = a_1, \quad \dots, \quad f_n = a_n$$

peuvent être résolues par rapport à p_1, \dots, p_n , on aura une intégrale complète par une quadrature. S'il n'en est pas ainsi, on emploiera la méthode suivante qui est, au fond, équivalente à la première et qui s'applique à tous les cas ; on déterminera, par une quadrature, une fonction Ω et des fonctions P_1, \dots, P_n des variables x_1, p_1 donnant lieu à l'identité

$$d(z - \Omega) - P_1 df_1 - \dots - P_n df_n = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n,$$

et l'intégration sera terminée (§ 114, 117).

⁽¹⁾ Lie, *Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungstransformationen* (Mathematische Annalen, t. VIII, p. 215-313; *ibid.*, t. XI, p. 364-535). — *Théorie der Transformations-Gruppen*, zweiter Abschnitt, p. 170-222.

Dans la méthode de Cauchy généralisée (§ 94), on procède autrement. On est ramené, en effet, à intégrer le système complet

$$(2) \quad [f_1, \Phi] = 0, \quad \dots, \quad [f_m, \Phi] = 0;$$

supposons qu'on ait intégré le système complet

$$(3) \quad (f_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (f_m, \Phi) = 0,$$

c'est-à-dire qu'on ait trouvé les $2n - m$ intégrales du système (2) qui ne contiennent pas z . Ce système (2) admettra en outre une autre intégrale qui contiendra nécessairement z , et les considérations employées au § 111 montrent encore que cette dernière intégrale s'obtiendra par une quadrature. Ainsi, abstraction faite d'une quadrature finale, la différence des deux méthodes peut être caractérisée comme il suit. Dans la méthode de Cauchy, on cherche l'intégrale générale du système complet (3), tandis que, dans la méthode de Jacobi, on cherche seulement les $n - m$ intégrales de ce système qui forment avec f_1, \dots, f_m un nouveau système en involution.

Les deux méthodes peuvent être considérées, on l'a déjà remarqué plusieurs fois (§§ 69, 90), comme des cas particuliers d'une méthode plus générale. Supposons, en effet, qu'on ait obtenu un système en involution de $m + k$ équations, renfermant le système (1),

$$(4) \quad f_1 = 0, \quad \dots, \quad f_m = 0, \quad f_{m+1} = 0, \quad \dots, \quad f_{m+k} = 0,$$

tel qu'on sache intégrer le système complet

$$(5) \quad (f_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (f_{m+k}, \Phi) = 0;$$

on aura par une quadrature une intégrale complète des équations

$$f_1 = a_1, \quad \dots, \quad f_{m+k} = a_{m+k}.$$

et, par suite, des équations (1). Le problème de l'intégration peut donc être posé ainsi : Trouver un système en involution de $m + k$ équations distinctes comprenant les équations (1).

$$f_1 = 0, \quad \dots, \quad f_m = 0, \quad f_{m+1} = 0, \quad \dots, \quad f_{m+k} = 0, \quad (m + k \leq n),$$

et trouver ensuite l'intégrale générale du système complet

$$(f_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (f_{m+k}, \Phi) = 0.$$

Si $k=0$, on a la méthode de Cauchy; si $k=n-m$, on a la méthode de Jacobi.

123. Cela posé, imaginons qu'on ait obtenu plusieurs intégrales $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, distinctes de f_1, \dots, f_m , du système complet (3). D'après le théorème de Poisson, toutes les parenthèses (φ_i, φ_k) seront des intégrales du même système. Nous pouvons donc toujours supposer que les $m+k$ fonctions $f_1, \dots, f_m, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ sont distinctes et que les parenthèses (φ_i, φ_k) s'expriment au moyen de ces fonctions elles-mêmes; car, s'il n'en était pas ainsi, on ajouterait ces parenthèses aux intégrales déjà obtenues et on recommencerait les mêmes opérations.

Plusieurs cas peuvent se présenter. Si $k=2n-2m$, l'intégration est terminée immédiatement par la méthode de Cauchy. Supposons $k < 2n-2m$ et admettons de plus, pour fixer les idées, qu'aucune des parenthèses (φ_i, φ_k) n'est identiquement nulle. Si k est voisin de $2n-2m$, il y aura avantage, en général, à terminer l'intégration par la méthode de Cauchy. Pour appliquer celle de Jacobi, il faudra adjoindre aux fonctions f_1, \dots, f_m une des intégrales déjà obtenues, φ_1 par exemple, et chercher une intégrale du système complet

$$(f_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (f_m, \Phi) = 0, \quad (\varphi_1, \Phi) = 0.$$

En opérant ainsi, il semble que les autres intégrales $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_k$ ne servent plus à rien. Il est donc naturel de se demander si on ne pourrait pas, sans renoncer à la méthode de Jacobi, profiter de ces intégrales pour simplifier davantage l'intégration et quel est le meilleur moyen pour obtenir ce but. La réponse à cette question nous sera fournie par la *Theorie des groupes*, qui est due encore à M. Sophus Lie.

124. Soient u_1, \dots, u_r r fonctions distinctes des $2n$ variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$. On dit que ces fonctions forment un groupe si toutes les parenthèses (u_i, u_k) s'expriment au moyen des fonctions u_1, u_2, \dots, u_r seulement

$$(u_i, u_k) = f_{ik}(u_1, u_2, \dots, u_r), \quad (i, k = 1, 2, \dots, r).$$

Le nombre entier r est l'ordre du groupe. Si toutes les fonctions f_{ik} sont identiquement nulles, le groupe se réduit à un système en

involution. L'ordre d'un groupe est au plus égal à $2n$, de même que l'ordre d'un système en involution ne peut dépasser n .

Toute fonction de u_1, u_2, \dots, u_r , telle que $F(u_1, \dots, u_r)$, appartient au groupe (u_1, \dots, u_r) . Étant données deux fonctions $F(u_1, \dots, u_r)$ et $\Phi(u_1, \dots, u_r)$, appartenant à un même groupe, il en est de même de la parenthèse (F, Φ) . On a, en effet,

$$(F, \Phi) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial F}{\partial u_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} (u_i, u_k) = \sum_i \sum_k \frac{\partial F}{\partial u_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} f_{ik}(u_1, \dots, u_r).$$

Il suit de là que, si on considère r fonctions distinctes quelconques v_1, \dots, v_r , appartenant au groupe (u_1, \dots, u_r) , ces r fonctions forment encore un groupe, puisque les parenthèses (v_i, v_k) s'expriment au moyen de u_1, \dots, u_r et, par suite, au moyen de v_1, \dots, v_r . Nous ne considérerons pas les groupes (u_1, \dots, u_r) et (v_1, \dots, v_r) comme deux groupes distincts, mais comme deux formes d'un même groupe. Il est clair qu'un groupe déterminé est susceptible d'une infinité de formes différentes. On remarquera que si un groupe est en involution, toutes les formes possibles du groupe seront également en involution.

Donnons encore quelques définitions. Si les fonctions u_1, \dots, u_p d'un groupe d'ordre p appartiennent à un groupe d'ordre r $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_r)$, on dit que le second groupe contient le premier ou que le premier est un sous-groupe du second. Une fonction v est dite en involution avec un groupe (u_1, \dots, u_r) si on a $(v, u_i) = 0$, quelle que soit la fonction u_i du groupe. Plus généralement, deux groupes (u_1, \dots, u_r) et (v_1, \dots, v_p) sont en involution l'un avec l'autre si on a

$$(u_i, v_k) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r; \quad k = 1, 2, \dots, p);$$

deux fonctions quelconques u et v , appartenant respectivement à chacun des groupes, seront toujours en involution. De ces définitions découlent immédiatement un certain nombre de propriétés dont la démonstration n'offre aucune difficulté :

1° Si on a s fonctions u_1, u_2, \dots, u_s telles que toutes les parenthèses (u_i, u_k) s'expriment au moyen de ces fonctions elles-mêmes, elles appartiennent à un groupe dont l'ordre est au plus égal à s . Ce groupe sera d'ordre s si les s fonctions sont distinctes. Pour prendre le cas général, supposons qu'il existe q relations distinctes entre

ces s fonctions; alors elles pourront toutes s'exprimer au moyen de $s - q$ d'entre elles, soit u_1, u_2, \dots, u_{s-q} , qui seront indépendantes, et toutes les parenthèses (u_i, u_j) se réduiront elles-mêmes à des fonctions de u_1, \dots, u_{s-q} . Donc ces $s - q$ fonctions déterminent un groupe d'ordre $s - q$.

2° Étant donné: deux groupes G et G' , les fonctions qui appartiennent à la fois à ces deux groupes forment un troisième groupe. En effet, supposons que les deux groupes aient p fonctions distinctes communes w_1, \dots, w_p . Toute parenthèse (w_i, w_j) , devant appartenir à la fois aux deux groupes G et G' , s'exprimera au moyen de w_1, \dots, w_p .

3° Toute transformation de contact en x, p change un groupe d'ordre r (u_1, \dots, u_r) en un nouveau groupe d'ordre r (u'_1, \dots, u'_r) et chaque parenthèse $(u'_i, u'_j)_{x,p}$ s'exprime au moyen de u'_1, \dots, u'_r comme $(u_i, u_j)_{x,p}$ au moyen de u_1, \dots, u_r . Soient

$$x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

les formules de transformation, X_i, P_i étant des fonctions de x, p qui vérifient les relations

$$(X_i, X_k) = 0, \quad (X_i, P_k) = 0, \quad (X_i, P_j) = -1, \quad (P_i, P_k) = 0;$$

u_1, u_2, \dots, u_r se changeant en u'_1, u'_2, \dots, u'_r , on a vu qu'on avait identiquement

$$(u_i, u_k)_{x,p} = (u'_i, u'_k)_{x',p'}.$$

Les relations

$$(u_i, u_k) = f_{ik}(u_1, \dots, u_r)$$

deviennent donc

$$(u'_i, u'_k) = f_{ik}(u'_1, \dots, u'_r).$$

En particulier, si $f_{ik} = 0$, on aura de même $(u'_i, u'_k) = 0$ (§ 117).

123. La théorie des groupes repose sur le théorème suivant qui est fondamental :

THÉORÈME. — Si r fonctions distinctes u_1, \dots, u_r des $2n$ variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ déterminent un groupe d'ordre r , les r équations linéaires

$$(6) \quad (u_i, f) = 0, \quad \dots, \quad (u_r, f) = 0$$

forment un système complet.

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial u_1}{\partial p_n} \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ \frac{\partial u_r}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial u_r}{\partial p_n} \end{array}$$
$$(x_n, 0) = A_1(0);$$
$$((u_1, u_2), f) + ((u_2, f), u_1) + ((f, u_1), u_2) = 0$$
$$\Lambda_i(\Lambda_j(f)) - \Lambda_j(\Lambda_i(f)) = ((u_i, u_j), f).$$
$$A_i(A_2(n)) - A_2(A_i(n)) = \frac{\partial f_{12}}{\partial u_1} A_1(n) + \dots + \frac{\partial f_{12}}{\partial u_r} A_r(n),$$

REMARQUE. — La réciproque du théorème est exacte. Si on a r fonctions distinctes q_1, \dots, q_r des $2n$ variables x, p , pour que les r équations

$$(q_1, n) = 0, \quad \dots, \quad (q_n, n) = 0.$$

$$((p_n, q_n), f) = 0;$$

si le système est complet, cette équation doit être une conséquence des premières, ce qui ne peut avoir lieu que si (ξ_1, ξ_2) est une fonction de $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$.

Les équations (6) admettent $2n - r$ intégrales distinctes $v_1, v_2, \dots, v_{2n-r}$, et toute autre intégrale s'exprime au moyen de celles-là. D'après le théorème de Poisson, les expressions (v_1, v_2) seront aussi des intégrales de (6) et, par suite, s'exprimeront au moyen de v_1, \dots, v_{2n-r} . Ces $2n - r$ fonctions déterminent donc un groupe (v_1, \dots, v_{2n-r}) d'ordre $2n - r$, dont toutes les fonctions sont en involution avec le groupe primitif. On l'appelle le *groupe polaire du premier*. Les équations

$$(v_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (v_{2n-r}, f) = 0$$

forment à leur tour un système complet qui admet les r intégrales distinctes u_1, \dots, u_r , et dont, par conséquent, toutes les intégrales s'expriment au moyen de u_1, \dots, u_r . Il y a donc réciprocité entre les deux groupes (u_1, \dots, u_r) et (v_1, \dots, v_{2n-r}) ; chacun d'eux est le groupe polaire de l'autre. On les appelle pour cette raison *groupes réciproques*.

Le groupe polaire d'un groupe donné se composant des fonctions qui sont en involution avec ce groupe, il est clair que toute transformation de contact change deux groupes réciproques en deux groupes réciproques.

126. Une fonction U appartenant à un groupe (u_1, \dots, u_r) est dite une *fonction distinguée* (*ausgezeichnete*) de ce groupe, lorsqu'elle est en involution avec toutes les fonctions du groupe. Il suit de là que les fonctions distinguées d'un groupe sont les fonctions communes à ce groupe et à son groupe polaire; deux groupes polaires ont les mêmes fonctions distinguées, les fonctions communes à ces deux groupes. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_{2n-r})$ le groupe polaire du groupe proposé et $F(x, p)$ une fonction distinguée commune à ces deux groupes; $F(x, p)$ pourra s'exprimer comme fonction des u_i ou comme fonction des v_i seulement. Il en résultera donc une relation de la forme

$$F(x, p) = U(u_1, \dots, u_r) = V(v_1, \dots, v_{2n-r}).$$

S'il existe m fonctions distinguées, on aura ainsi m relations distinctes entre les fonctions des deux groupes

$$(7) \quad U_i(u_1, \dots, u_r) = V_i(v_1, \dots, v_{2n-r}), \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

On aura donc le nombre des fonctions distinguées en cherchant le nombre d'équations linéairement distinctes du système (9) ou, ce qui revient au même, l'ordre des premiers mineurs du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \dots & (u_1, u_r) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & \dots & (u_2, u_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_r, u_1) & (u_r, u_2) & \dots & (u_r, u_r) \end{vmatrix}$$

qui sont différents de zéro. Si ce déterminant est nul, ainsi que tous ses mineurs d'ordre 1, 2, ..., $(m - 1)$, sans que tous les mineurs d'ordre m soient nuls, les équations (9) se réduisent à $(r - m)$ équations linéaires distinctes, et le groupe admet m fonctions distinguées distinctes.

Lorsqu'on a trouvé le nombre m des fonctions distinguées, la détermination de ces fonctions elles-mêmes exige l'intégration du système complet (10), c'est-à-dire les opérations $m, m - 1, \dots, 2, 1$, si on applique la méthode de Mayer. Ces opérations se simplifient si on connaît déjà μ fonctions distinguées.

Si le déterminant D n'est pas nul, le groupe ne renfermera aucune fonction distinguée. Ce cas ne pourra se présenter si r est impair, car D est un déterminant gauche d'après les relations $(u_i, u_i) = 0$, $(u_i, u_k) + (u_k, u_i) = 0$. Donc, tout groupe d'ordre impair renferme au moins une fonction distinguée.

Soient U_1, U_2, \dots, U_m les m fonctions distinguées distinctes d'un groupe (u_1, \dots, u_r) . Quoique la détermination de ces fonctions exige en général des intégrations, on peut toujours former un système d'équations linéaires

$$(11) \quad B_1(f) = 0, \quad \dots, \quad B_m(f) = 0,$$

équivalent au système complet

$$(12) \quad (U_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (U_m, f) = 0.$$

Soit (r_1, \dots, r_{2n-r}) le groupe polaire du groupe proposé; les équations (12) admettent les intégrales $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_{2n-r}$, qui se réduisent à $2n - m$ fonctions distinctes. Tout système de m équations linéaires distinctes admettant les mêmes intégrales sera nécessairement

équivalent au système (12). Cela posé, les r équations

$$(u_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (u_r, f) = 0$$

admettent les intégrales v_1, \dots, v_{r-1} , et il en sera de même de toute équation

$$(13) \quad \lambda_1 (u_1, f) + \dots + \lambda_r (u_r, f) = 0,$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ étant des coefficients quelconques. Cette nouvelle équation sera vérifiée pour $f = u_1, \dots, f = u_r$, pourvu que les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ vérifient les r relations

$$\lambda_1 (u_1, u_i) + \dots + \lambda_r (u_r, u_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

On a un système de r équations linéaires et homogènes dont le déterminant est précisément D. Par hypothèse, ce déterminant est nul, ainsi que tous ses mineurs d'ordre $r - 1$, sans que tous ses mineurs d'ordre r soient nuls. On pourra donc trouver m équations distinctes de la forme (13) admettant les intégrales u_1, \dots, u_r . Ces m équations

$$B_1(f) = 0, \quad \dots, \quad B_m(f) = 0$$

admettent les intégrales $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_{r-1}$, et, par conséquent, forment un système équivalent au système (12).

128. Parmi les formes en nombre infini d'un même groupe, il est naturel de prendre pour *forme canonique* celle pour laquelle les parenthèses $(u_i, u_j) = f_{ij}(u_1, \dots, u_r)$ ont les valeurs les plus simples possible. Si on considère d'abord un système en involution, toute autre forme du même groupe sera également en involution et le groupe est réduit de lui-même à la forme canonique. Il suffit donc de considérer un groupe différent d'un système en involution. Remarquons d'abord que, si ce groupe est d'ordre r , il renfermera au plus $r - 2$ fonctions distinguées distinctes. En effet, s'il en avait $r - 1$, U_1, \dots, U_{r-1} , on compléterait le groupe en ajoutant à celles-là une autre fonction V . On aurait alors les relations

$$(U_1, V) = 0, \quad \dots, \quad (U_{r-1}, V) = 0, \quad (U_i, U_j) = 0,$$

et le groupe se réduirait à un système en involution.

Prenons donc un groupe (u_1, \dots, u_r) non en involution, et soit u_1 une fonction non distinguée du groupe, de telle façon que l'une au moins des expressions $(u_1, u_2), \dots, (u_1, u_r)$ soit différente de zéro. On pourra trouver une autre fonction du groupe $F(u_1, \dots, u_r)$ satisfaisant à la condition $(u_1, F) = 1$. En effet, cette condition développée s'écrit

$$(u_1, u_2) \frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots + (u_1, u_r) \frac{\partial F}{\partial u_r} = 1,$$

et on a pour déterminer F une équation linéaire dont le premier membre n'est pas identiquement nul. Prenons pour u_2 une intégrale de cette équation, de telle sorte que l'on ait

$$(u_1, u_2) = 1;$$

je dis qu'on pourra compléter le groupe avec $r - 2$ fonctions u'_1, \dots, u'_{r-2} , vérifiant les relations

$$(u_1, F) = 0, \quad (u_2, F) = 0.$$

Si on suppose que F est une simple fonction de u_1, \dots, u_r , ces équations s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u_2} + (u_1, u_2) \frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots + (u_1, u_r) \frac{\partial F}{\partial u_r} = 0, \\ -\frac{\partial F}{\partial u_1} + (u_2, u_1) \frac{\partial F}{\partial u_2} + \dots + (u_r, u_1) \frac{\partial F}{\partial u_r} = 0; \end{cases}$$

elles sont évidemment distinctes et forment un système complet, car

$$(u_1, (u_2, F)) - (u_2, (u_1, F)) = ((u_1, u_2), F) = (1, F) = 0.$$

Solent u'_1, \dots, u'_{r-2} , $r - 2$ solutions distinctes de ce système formant un groupe d'ordre $r - 2$. Les r fonctions $u_1, u_2, u'_1, \dots, u'_{r-2}$ sont indépendantes; en effet, toute relation entre ces fonctions contiendrait nécessairement u_1 ou u_2 , u_1 par exemple. Soit

$$\phi(u_1, u_2, u'_1, \dots, u'_{r-2}) = 0$$

cette relation; on aurait

$$(u_1, \phi) = \frac{\partial \phi}{\partial u_1} (u_1, u_2) + \frac{\partial \phi}{\partial u'_1} (u_2, u'_1) + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial u'_{r-2}} (u_2, u'_{r-2}) = 0,$$

et le premier membre se réduit à $-\frac{\partial \phi}{\partial u_1}$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant donné un groupe (u_1, \dots, u_r) non en involution, on peut toujours décomposer ce groupe en deux autres : un groupe de deux fonctions u_1, u_2 , telles que $(u_1, u_2) = 1$, et un groupe de $r - 2$ fonctions $u'_1, u'_2, \dots, u'_{r-2}$, en involution avec le premier ⁽¹⁾.

Pourrions la réduction. Si $u'_1, u'_2, \dots, u'_{r-2}$ est un système en involution, le groupe proposé est ramené à la forme canonique

$$X_1, P_1, u'_1, \dots, u'_{r-2},$$

où $X_1 = u_2, P_1 = u_1$, pour laquelle on a les relations

$$(P_1, X_1) = 1, \quad (P_1, u'_i) = 0, \quad (X_1, u'_i) = 0, \quad (u'_i, u'_j) = 0.$$

Si le groupe $(u'_1, u'_2, \dots, u'_{r-2})$ n'est pas en involution, en lui appliquant le même procédé, on le décomposera en deux groupes

$$X_2, P_2, u'_1, \dots, u'_{r-3};$$

si (u'_1, \dots, u'_{r-3}) est en involution, le système proposé sera ramené à la forme canonique

$$X_1, P_1, X_2, P_2, u'_1, u'_2, \dots, u'_{r-3},$$

pour laquelle toutes les parenthèses seront nulles, sauf (P_1, X_1) et (P_2, X_2) , qui se réduiront à l'unité. Si (u'_1, \dots, u'_{r-3}) n'est pas en involution, on recommencera les mêmes opérations, et, en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à un système en involution, on voit qu'on peut toujours mettre un groupe sous la forme canonique

$$X_1, P_1, X_2, P_2, \dots, X_r, P_r, X_{r+1}, \dots, X_{n+r},$$

(1) Considérons en particulier une équation linéaire $(x, f) = 0$, où x est une fonction donnée de $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ et f une fonction inconnue des mêmes variables. Les $2n - 2$ intégrales, autres que x , de cette équation forment avec x un groupe d'ordre $2n - 1$. Soit a_1 une de ces intégrales : a_1 ne peut être une fonction distinguée, car les deux équations $(x, f) = 0$, $(x_1, f) = 0$ auraient $2n - 1$ intégrales communes. Par conséquent, on pourra compléter la solution avec $2n - 2$ intégrales a_2, \dots, a_{2n-2} , satisfaisant aux relations

$$(x_1, a_2) = 1, \quad (x_1, a_3) = 0, \quad \dots, \quad (x_1, a_{2n-2}) = 0.$$

(Voir Mécanique analytique, 3^e et 4^e éditions. Note de H. Bertrand.) L'application répétée du théorème de Poincaré aux deux intégrales a_1 et $F(a_2, a_3, \dots, a_{2n-2})$ fournira $2n - 2$ intégrales distinctes, si la fonction F n'a pas été prise d'une façon particulière.

X_i, P_i étant des fonctions indépendantes telles que toutes les parenthèses (P_i, X_i) aient pour valeur l'unité, tandis que toutes les autres parenthèses sont nulles.

Un groupe étant réduit à la forme canonique, les équations qui déterminent les fonctions distinguées $\Pi (X_1, \dots, X_{q+m}, P_1, \dots, P_q)$ prennent la forme

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, q);$$

toute fonction distinguée se réduit donc à une simple fonction de X_{q+1}, \dots, X_{q+m} . La différence entre le nombre des fonctions distinctes d'un groupe $(2q + m)$ et le nombre des fonctions distinguées m est donc toujours un nombre pair $2q$.

En réunissant tous ces résultats, on peut énoncer la proposition suivante :

Tout groupe de fonctions peut être ramené à la forme canonique

$$X_1, P_1, \dots, X_q, P_q, X_{q+1}, \dots, X_{q+m}$$

pour laquelle toutes les parenthèses sont nulles, sauf les parenthèses (P_i, X_i) , qui se réduisent à l'unité. Les fonctions distinguées du groupe sont les seules fonctions de X_{q+1}, \dots, X_{q+m} .

La différence entre l'ordre du groupe et le nombre des fonctions distinguées est un nombre pair.

129. Étant donné un groupe canonique d'ordre $2q + m < 2n$, on peut trouver d'autres groupes canoniques renfermant celui-là, en particulier des groupes d'ordre $2n$. Prenons d'abord un groupe

$$(A) \quad P_1, P_1, \dots, P_q, X_1, \dots, X_q, X_{q+1}, \dots, X_{q+m}, \quad (m > 0),$$

renfermant des fonctions distinguées. Supprimons une de ces fonctions distinguées, X_{q+1} par exemple, on a un nouveau groupe

$$(B) \quad P_1, \dots, P_q, X_1, \dots, X_q, X_{q+2}, \dots, X_{q+m},$$

dont le groupe polaire renfermera X_{q+1} et sera de la forme

$$(C) \quad X_{q+1}, U_1, U_2, \dots;$$

d'ailleurs, X_{r+1} n'est pas une fonction distinguée du groupe (C), puisqu'elle n'appartient pas au groupe (B). On pourra donc trouver dans (C) une autre fonction P_{r+1} telle que $(P_{r+1}, X_{r+1}) = 1$; P_{r+1} ne peut appartenir au groupe (A), car si on avait

$$P_{r+1} = \varphi(P_1, \dots, P_r, X_1, \dots, X_{r+m}),$$

on en déduirait $(X_{r+1}, P_{r+1}) = 0$. Par conséquent les fonctions

$$(A)' \quad P_1, \dots, P_r, P_{r+1}, X_1, \dots, X_{r+1}, \dots, X_{r+m},$$

forment un nouveau groupe canonique $(A)'$, renfermant le groupe (A), et ayant une fonction distinguée de moins.

En répétant les mêmes opérations sur le groupe $(A)'$ et ainsi de suite autant de fois qu'il est nécessaire, on voit que tout groupe canonique est renfermé dans un autre groupe canonique qui n'admet pas de fonctions distinguées.

Prenons un groupe de cette espèce

$$P_1, P_2, \dots, P_r, X_1, \dots, X_r;$$

en lui ajoutant une fonction X_{r+1} du groupe polaire, on a un nouveau groupe renfermant une fonction distinguée

$$P_1, \dots, P_r, X_1, \dots, X_r, X_{r+1},$$

que l'on peut compléter en ajoutant une fonction P_{r+1} , de façon à avoir un groupe canonique de $2r + 2$ termes

$$P_1, \dots, P_{r+1}, X_1, \dots, X_{r+1},$$

sans fonction distinguée. En continuant ainsi, on arrivera à un groupe canonique de $2n$ termes

$$P_1, \dots, P_n, X_1, \dots, X_n.$$

Donc, étant donné un groupe canonique quelconque

$$P_1, \dots, P_r, X_1, \dots, X_{r+m},$$

on peut toujours trouver d'autres fonctions $P_{r+1}, \dots, P_n, X_{r+m+1},$

..., X_n , telles que les fonctions

$$P_1, \dots, P_n, P_{g+1}, \dots, P_n, X_1, \dots, X_{g+n}, X_{g+n+1}, \dots, X_n$$

forment un groupe canonique de $2n$ termes.

130. Les résultats du paragraphe précédent permettent de résoudre une question qui est très importante dans la théorie des groupes. Étant donnés deux groupes de r fonctions (u_1, \dots, u_r) et (v_1, \dots, v_r) , dans quels cas peut-on passer de l'un à l'autre par une transformation de contact? En termes plus précis, que faut-il pour qu'il existe une transformation de contact changeant u_1, \dots, u_r en de nouvelles fonctions w_1, \dots, w_r , qui s'expriment au moyen de v_1, \dots, v_r ?

Il est évident d'abord que toute transformation de contact ne change pas le nombre des fonctions distinguées d'un groupe. Par conséquent, le problème ne sera possible que si les deux groupes ont le même nombre de fonctions distinguées. Cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante. En effet, soit

$$P_1, \dots, P_g, X_1, \dots, X_{g+n},$$

un groupe d'ordre $r = 2g + n$, avec n fonctions distinguées. Nous venons de voir qu'il existe toujours d'autres fonctions $P_{g+1}, \dots, P_n, X_{g+n+1}, \dots, X_n$, telles que

$$P_1, \dots, P_n, X_1, \dots, X_n,$$

soit un groupe canonique. On aura donc les relations

$$(X_i, X_k) = 0, \quad (X_i, P_k) = 0, \quad (P_i, P_k) = 0, \quad (P_i, X_k) = 1, \\ (i, k = 1, 2, \dots, n);$$

par suite (§ 119), on pourra trouver une autre fonction $\Omega(x_n, p_n)$, telle que les formules

$$z' = z - \Omega, \quad x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i,$$

définissent une transformation de contact. Par cette transformation, le groupe considéré sera ramené à la forme

$$p'_1, \dots, p'_n, x'_1, \dots, x'_{g+n};$$

tout autre groupe du même ordre, ayant le même nombre n de

fonctions distinguées, pourra être ramené à cette même forme par une autre transformation de contact et, par conséquent, on pourra passer de l'un à l'autre par une transformation de contact.

Donc, les seuls invariants d'un groupe relativement à toute transformation de contact sont l'ordre du groupe et le nombre des fonctions distinguées.

131. Tout groupe à $2q + m$ termes, renfermant m fonctions distinguées, pouvant être ramené à la forme canonique

$$P_1, \dots, P_q, X_1, \dots, X_q, X_{q+1}, \dots, X_{q+m},$$

contient un système en involution d'ordre $q + m$, le système X_1, \dots, X_{q+m} . D'ailleurs, il ne peut contenir de système en involution d'ordre supérieur à $q + m$. Soit, en effet, Φ_1, \dots, Φ_r un sous-groupe en involution du groupe proposé; on a vu plus haut qu'on pouvait trouver d'autres fonctions $X_{n+q+1}, \dots, X_n, P_{q+1}, \dots, P_n$ formant avec le premier groupe un groupe canonique

$$P_1, \dots, P_n, X_1, \dots, X_n.$$

Les fonctions

$$\Phi_1, \dots, \Phi_r, X_{n+q+1}, \dots, X_n$$

formeront un système en involution dont l'ordre sera $r + n - q - m$. On a, par conséquent,

$$r + n - q - m \leq n, \quad \text{d'où} \quad r \leq q + m.$$

REMARQUE. — Si l'ordre d'un groupe est supérieur à n , il est facile d'avoir une limite supérieure du nombre m . Soit r l'ordre d'un groupe G ,

$$r = 2q + m = n + k;$$

G contient un système en involution d'ordre $m + q$. Donc, on a

$$m + q \leq n, \quad \text{ou} \quad 2m + 2q \leq 2n,$$

et, par suite, en retranchant les deux relations,

$$m \leq n - k.$$

La détermination d'un système en involution d'ordre maximum $m + q$,

130. LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

contenu dans un groupe d'ordre $2q + m$ avec m fonctions distinguées, exige, en général, des intégrations. Soit (u_1, \dots, u_{2q+m}) le groupe proposé. On commencera par déterminer m fonctions distinguées U_1, \dots, U_m , ce qui exige les opérations $m, m-1, \dots, 3, 2, 1$. Prenant ensuite une autre fonction non distinguée du groupe, u_1 par exemple, l'équation linéaire

$$(u_1, F) = 0,$$

où on remplace F par une fonction de u_1, \dots, u_{2q+m} , est une équation linéaire à $2q + m$ variables, dont on connaît $m + 1$ intégrales u_1, U_1, \dots, U_m . On aura une nouvelle intégrale w_1 par une opération d'ordre $2q - 2$. On considérera ensuite le système complet

$$(u_1, F) = 0, \quad (w_1, F) = 0,$$

dont on connaît $m + 2$ intégrales $u_1, w_1, U_1, \dots, U_m$, et ainsi de suite. En résumé, on aura un système en involution d'ordre $q + m$, contenu dans le groupe proposé, par les opérations

$$m, m-1, \dots, 3, 2, 1; \quad 2q-2, 2q-4, \dots, 4, 2.$$

132. Arrivons maintenant à l'objet essentiel de ce chapitre. Soit

$$(14) \quad f_1 = C_1, \quad \dots, \quad f_r = C_r$$

un système en involution, qu'il s'agit d'intégrer; supposons que l'on ait obtenu, par un moyen quelconque, un certain nombre d'intégrales f_{r+1}, \dots, f_s , différentes de f_1, \dots, f_r , du système complet

$$(15) \quad (f_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (f_r, f) = 0.$$

Par exemple, s'il s'agit d'une équation unique $f_1 = 0$, provenant d'un problème de mécanique, les principes généraux de la mécanique feront souvent connaître un certain nombre d'intégrales, autres que f_1 , de l'équation linéaire $(f_1, f) = 0$. Comment peut-on utiliser ces intégrales connues, pour simplifier l'intégration du système en involution proposé?

On peut toujours supposer que l'application du théorème de Poisson à deux quelconques des intégrales f_{r+1}, \dots, f_s ne donne pas d'intégrale distincte de f_1, \dots, f_r . S'il n'en était pas ainsi, on ajouterait les nouvelles intégrales ainsi obtenues aux anciennes, et ainsi de suite.

Il suffit donc d'examiner le cas où les r fonctions $f_1, \dots, f_q, \dots, f_r$ forment un groupe. Si l'ordre r est égal à $2n - q$, on a immédiatement l'intégrale générale du système complet (15) et il suffira d'une quadrature (§ 122) pour avoir également l'intégrale générale du système en involution (14). Nous supposons, par conséquent, $r < 2n - q$.

Le groupe $(f_1, \dots, f_q, \dots, f_r)$ contient les q fonctions distinguées f_1, \dots, f_q , mais il peut en contenir d'autres. Pour plus de généralité, nous supposons que ce groupe contient en outre m fonctions distinguées, distinctes de f_1, \dots, f_q ($m \geq 0$). On a vu plus haut (§ 127) comment on pouvait toujours déterminer le nombre entier m par des calculs élémentaires. On aura alors

$$r = q + m + 2v, \quad v \geq 0.$$

Ce groupe contiendra un système en involution d'ordre $q + m + v$.

$$f_1, \dots, f_q, \Omega_1, \dots, \Omega_m, W_1, \dots, W_v,$$

et, si on peut déterminer ce système, l'intégration du système en involution proposé sera ramenée à l'intégration d'un nouveau système en involution de $(q + m + v)$ équations, problème qui est évidemment plus simple que le proposé et qui n'exige que les opérations

$$2n - 2q - 2m - 2v, \quad 2n - 2 - 2q - 2m - 2v, \quad \dots, \quad 4, 2,$$

et une quadrature, si on emploie la méthode de Jacobi et Mayer.

123. C'est une circonstance de ce genre qui se présente dans le problème des trois corps. Supposons, pour simplifier, que l'un des corps soit fixe. On est alors conduit à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a,$$

et le principe des aires fait connaître trois intégrales F_1, F_2, F_3 de l'équation linéaire $(H, F) = 0$. Ces trois intégrales forment un groupe, car on a les relations

$$(F_1, F_2) = F_3, \quad (F_1, F_3) = F_2, \quad (F_2, F_3) = F_1;$$

ce groupe étant d'ordre 3, sans être en involution, ne peut contenir

qu'une fonction distinguée. Pour l'obtenir, nous avons à considérer les trois équations

$$(F_1, \Phi) = F_1 \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} - F_2 \frac{\partial \Phi}{\partial F_2} = 0,$$

$$(F_2, \Phi) = -F_1 \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} + F_2 \frac{\partial \Phi}{\partial F_2} = 0,$$

$$(F_3, \Phi) = F_1 \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} - F_2 \frac{\partial \Phi}{\partial F_2} = 0,$$

qui se réduisent à deux équations distinctes et qui admettent l'intégrale commune

$$\Phi = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

Les trois équations

$$H = a, \quad F_1 = b, \quad F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = c$$

forment alors un système en involution et l'intégration d'un pareil système par la méthode de Jacobi et Mayer n'exige que les opérations 6, 4, 2, et une quadrature.

On arrive à un résultat tout pareil dans le cas général, où aucun des corps n'est supposé fixe ⁽¹⁾. On a alors une équation du premier ordre à neuf variables

$$H(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = a,$$

et les théorèmes généraux de la mécanique fournissent 8 intégrales distinctes de l'équation linéaire $(H, F) = 0$. Ces intégrales forment un groupe qui contient deux fonctions distinguées et qui renferme, par conséquent, un système en involution d'ordre 5. Les intégrations nécessaires pour déterminer ce système peuvent être effectuées et, en ajoutant l'équation $H = a$, on est conduit à un système en involution de six équations. Les opérations qu'il faudrait faire pour achever le problème sont donc du même ordre que dans le cas particulier examiné d'abord.

136. Au lieu de déterminer le système en involution d'ordre $q + m + v$ contenu dans le groupe $(f_1, \dots, f_r, \dots, f_s)$, on obtient

(1) *Ueb. Mathematische Analysis*, I. VIII, p. 232.

des simplifications équivalentes en déterminant simplement les m fonctions distinguées, autres que f_1, \dots, f_r . Soient $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ ces m fonctions distinguées et Φ_1, \dots, Φ_v , les $2v$ fonctions qui complètent le groupe

$$f_1, \dots, f_r, \Omega_1, \dots, \Omega_m, \Phi_1, \dots, \Phi_v.$$

Considérons le système complet

$$(f_1, f) = 0, \dots, (f_r, f) = 0, (\Omega_1, f) = 0, \dots, (\Phi_v, f) = 0,$$

dont on connaît $m + q$ intégrales f_1, \dots, Ω_m ; on en obtiendra une autre f_{r+1} par une opération d'ordre $2n - 2m - 2q - 2v$. Cette fonction f_{r+1} n'appartiendra pas au groupe, car elle serait une fonction distinguée dans ce groupe, c'est-à-dire une fonction de $f_1, \dots, f_r, \Omega_1, \dots, \Omega_m$ et, d'après la façon dont on opère, il ne pourra pas en être ainsi. On sera alors ramené à intégrer un système en involution

$$f_1 = C_1, \dots, f_r = C_r, f_{r+1} = C_{r+1}, \Omega_1 = C'_1, \dots, \Omega_m = C'_m,$$

connaissant les $2v$ solutions Φ_1, \dots, Φ_v du système complet

$$(f_1, f) = 0, \dots, (f_{r+1}, f) = 0, (\Omega_1, f) = 0, \dots, (\Omega_m, f) = 0.$$

Nous opérerons de la même façon que tout à l'heure en considérant le système complet

$$(f_1, f) = 0, \dots, (f_{r+1}, f) = 0, (\Omega_1, f) = 0, \dots, (\Phi_v, f) = 0,$$

dont on connaît $m + q + 1$ intégrales. On en trouvera une autre par une opération d'ordre $2n - 2m - 2q - 2v - 2$. En continuant ainsi, on arrivera, par une opération d'ordre 2, à un système en involution

$$f_1 = 0, \dots, f_p = 0, \Omega_1 = 0, \dots, \Omega_m = 0, \quad p = n - m - v,$$

connaissant les $2v$ solutions Φ_1, \dots, Φ_v du système complet

$$(f_1, f) = 0, \dots, (f_p, f) = 0, (\Omega_1, f) = 0, \dots, (\Omega_m, f) = 0.$$

L'intégration de ce système n'exige plus qu'une quadrature.

En résumé, pour intégrer un système en involution

$$f_1 = C_1, \dots, f_r = C_r,$$

224 LEÇONS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

connaissant $2v + m$ intégrales des équations $(f_1, f) = 0$, qui forment avec f_2, \dots, f_n un groupe possédant, outre f_2, \dots, f_n , m fonctions distinguées, la méthode précédente exige les opérations

$$m, \quad m-1, \quad \dots, \quad 3, 2, 1, \\ 2n-2q-2m-2v, \quad 2n-2-2q-2m-2v, \quad \dots, \quad 0, 1, 2.$$

La méthode de Cauchy généralisée exige les opérations

$$2n-2q-m-2v, \quad 2n-2q-m-2v-1, \quad \dots, \quad 3, 2, 1.$$

Considérons en particulier le cas d'une seule équation

$$f_1(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = C_1,$$

et soient $\Phi_1, \dots, \Phi_{v+m}$ des intégrales connues de l'équation $(f_1, f) = 0$ qui forment avec f_1 un groupe renfermant m fonctions distinguées sans compter f_1 . On a plusieurs cas à distinguer, suivant que le nombre $2v + m$ est inférieur ou supérieur à n .

1° Soit $2v + m < n - 1$; on aura aussi $m < n - 1$ et, par conséquent,

$$2v + 2m < 2n - 2.$$

Les nombres

$$m, \quad m-1, \quad \dots, \quad 3, 2, 1, \\ 2n-2-2v-2m, \quad 2n-4-2v-2m, \quad \dots,$$

seront respectivement plus petits que les nombres

$$2n-2-2v-m, \quad 2n-3-2v-m, \quad \dots, \quad 3, 2, 1;$$

la nouvelle méthode est plus simple que celle de Cauchy.

2° Soit $2v + m = n - 1$; si $v = 0$, les fonctions $f_1, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$ forment un système en involution et l'intégration est terminée immédiatement par la méthode de Jacobi. Si $v > 0$, on aura $m \leq n - 2$, $2v + 2m \leq 2n - 4$ et, par suite, $2n - 2v - 2m - 2 > 0$. La méthode est encore plus simple que celle de Cauchy.

3° Soit $2v + m \geq n$. On verra encore que la nouvelle méthode est plus simple que celle de Cauchy, à moins que l'on n'ait

$$2n - 2v - 2m - 2 = 0;$$

dans ce cas, le groupe $(f_1, \Phi_1, \dots, \Phi_{v+m})$ contient un système en

involution d'ordre $r + m + 1 = n$ et nous verrons plus loin qu'il suffit alors d'une quadrature pour achever l'intégration.

135. Les méthodes précédentes supposent que l'on a déterminé préalablement les fonctions distinguées du groupe $(f_1, \dots, f_r, \dots, f_r)$. M. Lie est revenu sur ce sujet dans le tome XI des *Mathematische Annalen*, et a montré que cette détermination n'était pas nécessaire. La méthode générale à laquelle il est parvenu ainsi paraît atteindre le plus grand degré de simplification possible. Nous établirons d'abord un certain nombre de propositions préliminaires.

Soient $Z, X_1, \dots, X_m, P_1, \dots, P_m, 2m + 1$ fonctions quelconques des $2n + 1$ variables indépendantes z, x_1, p_1 , dont les différentielles satisfont à la relation

$$(16) \quad dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_m dX_m = p(dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n),$$

où p est une fonction des variables z, x_1, p_1 qui n'est pas nulle. Le nombre entier m ne peut être inférieur à n , car, si on a entre les variables z, x_1, p_1 les $m + 1$ relations

$$Z = a, \quad X_1 = a_1, \quad \dots, \quad X_m = a_m,$$

où a, a_1, \dots, a_m sont des constantes quelconques, on aura entre les différentielles la relation

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0,$$

ce qui exige (§ 80) qu'il y ait au moins $n + 1$ équations distinctes entre les variables. On a examiné en détail, dans le chapitre précédent, le cas où $m = n$. Supposons maintenant $m \geq n$. Quelques-unes des démonstrations données au § 103 subsistent sans modification. Ainsi, en supposant que les différentielles dz, dx_1, \dots, dx_n soient liées par la relation

$$dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0,$$

on aura d'abord

$$(17) \quad \begin{cases} dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial X_i}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial X_i}{\partial p_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial X_i}{\partial p_n} dp_n \\ dP_i = \frac{\partial P_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial P_i}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial P_i}{\partial p_1} dp_1 + \dots + \frac{\partial P_i}{\partial p_n} dp_n \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

On démontrera ensuite, en reprenant les calculs qui ont été faits à la page 270, que l'on a encore

$$(18) \begin{cases} p dx_i = \frac{\partial P_1}{\partial p_i} dX_1 - \frac{\partial X_1}{\partial p_i} dP_1 + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial p_i} dX_n - \frac{\partial X_n}{\partial p_i} dP_n \\ -p dp_i = \frac{\partial P_1}{\partial x_i} dX_1 - \frac{\partial X_1}{\partial x_i} dP_1 + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial x_i} dX_n - \frac{\partial X_n}{\partial x_i} dP_n \end{cases}$$

u étant une fonction quelconque de z, x_i, p_i , si on remplace dx_i, dp_i par les valeurs précédentes dans la formule qui donne du

$$du = \frac{du}{dx_1} dx_1 + \dots + \frac{du}{dx_n} dx_n + \frac{du}{dp_1} dp_1 + \dots + \frac{du}{dp_n} dp_n$$

il vient

$$(19) \begin{cases} p du = [P_1, u] dX_1 + \dots + [P_n, u] dX_n \\ \quad - [X_1, u] dP_1 - \dots - [X_n, u] dP_n. \end{cases}$$

Si m est plus grand que n , les $2m$ fonctions X_i, P_i ne sont plus indépendantes et on ne peut pas conclure de cette relation que les crochets $[X_i, X_k]$ et les analogues soient nuls en général.

136. Considérons maintenant une identité de la forme

$$(20) dU + F_1 df_1 + \dots + F_r df_r = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n \quad (r \geq n),$$

où U, F_i, f_i sont des fonctions des $2n$ variables $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$. Cette identité peut se ramener à la forme (16) en l'écrivant

$$d(z - U) - F_1 df_1 - \dots - F_r df_r = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n$$

et les formules (18) et (19) deviennent ici

$$(18)' \begin{cases} dx_i = \frac{\partial F_1}{\partial p_i} df_1 - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} dF_1 + \dots + \frac{\partial F_r}{\partial p_i} df_r - \frac{\partial f_r}{\partial p_i} dF_r \\ -dp_i = \frac{\partial F_1}{\partial x_i} df_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dF_1 + \dots + \frac{\partial F_r}{\partial x_i} df_r - \frac{\partial f_r}{\partial x_i} dF_r \end{cases}$$

et

$$(19)' \begin{cases} du = (F_1, u) df_1 + \dots + (F_r, u) df_r \\ \quad - (f_1, u) dF_1 - \dots - (f_r, u) dF_r \end{cases}$$

u étant une fonction quelconque des variables x_i, p_i .

donc, parmi les fonctions $f_1, \dots, f_r, F_{q+1}, \dots, F_r$, il y en aura toujours $2n - q$ d'indépendantes. Elles donneront, par conséquent, l'intégrale générale du système complet (21).

Pour obtenir les formules (23), remarquons que l'identité (20) équivaut aux $2n$ relations

$$(23) \quad p_k = \sum_{i=1}^r F_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$(24) \quad 0 = \sum_{i=1}^r F_i \frac{\partial f_i}{\partial p_k} + \frac{\partial U}{\partial p_k}.$$

Remplaçons $\frac{\partial U}{\partial x_k}, \frac{\partial U}{\partial p_k}$ par leurs valeurs tirées de ces formules dans

$$[f_1, z - U] = \sum_{i=1}^r p_i \frac{\partial f_i}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial p_i} \right),$$

on trouve

$$[f_1, z - U] = \sum_{i=1}^r F_i (f_i, f_i) = 0,$$

et on voit de même que l'on aura

$$[f_r, z - U] = 0, \quad \dots, \quad [f_r, z - U] = 0.$$

137. Nous avons encore besoin de connaître la solution du problème suivant : Étant données r fonctions f_1, \dots, f_r des variables x, p , telles qu'il existe d'autres fonctions F_1, \dots, F_r, U , donnant lieu avec les précédentes à l'identité (20), comment obtiendra-t-on ces nouvelles fonctions U, F_1, \dots, F_r ?

Prenons pour nouvelles variables indépendantes f_1, \dots, f_r et $2n - r$ quantités $u_1, u_2, \dots, u_{2n-r}$, formant avec f_1, \dots, f_r un système de $2n$ fonctions distinctes. La relation (20) devient

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{2n-r} \sum_{j=1}^r p_j \frac{\partial x_j}{\partial u_i} du_i + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r p_j \frac{\partial x_j}{\partial f_i} df_i \\ & = \sum_j F_j dL + \sum_i \frac{\partial U}{\partial u_i} du_i + \sum_j \frac{\partial U}{\partial f_j} df_j \end{aligned} \right.$$

et elle peut être remplacée par les $2n$ relations

$$(26) \quad \frac{\partial U}{\partial u_i} = \sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial u_i},$$

$$(27) \quad F_j = -\frac{\partial U}{\partial f_j} + \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial f_j}.$$

Des formules (26) on déduira U par une quadrature, en supposant, bien entendu, que le problème soit possible, et on aura ensuite F_1, \dots, F_r au moyen des formules (27). Remarquons qu'on peut toujours ajouter à U une fonction arbitraire de f_1, \dots, f_r ; ce qui était évident a priori. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Soient f_1, \dots, f_r des fonctions connues de x_1, \dots, x_n , p_1, \dots, p_n telles qu'il existe une relation de la forme

$$(28) \quad dU + F_1 df_1 + \dots + F_r df_r = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n;$$

U s'obtient par une quadrature, et on a ensuite F_1, \dots, F_r par des différentiations seulement.

138. L'application de ces résultats aux équations aux dérivées partielles conduit à l'important théorème ci-dessous.

THÉORÈME. — Soit

$$(29) \quad f_1 = C_1, \quad \dots, \quad f_r = C_r$$

un système en involution, et soient $f_1, \dots, f_r, \dots, f_n$ r intégrales distinctes du système complet

$$(30) \quad (f_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (f_r, f) = 0;$$

s'il existe d'autres fonctions F_1, \dots, F_r, U , telles que l'on ait la relation (28), l'intégration du système (29) n'exige qu'une quadrature.

En effet, nous venons de voir qu'on aura par une quadrature les fonctions U, F_1, \dots, F_r . Les fonctions $f_1, \dots, f_r, F_{r+1}, \dots, F_n$ donneront l'intégrale générale du système complet (29) et U sera une intégrale des équations

$$[f_i, z - U] = 0, \quad \dots, \quad [f_r, z - U] = 0;$$

on aura donc $2n - q + 1$ intégrales distinctes du système complet

$$[f_1, \Phi] = 0, \quad \dots, \quad [f_r, \Phi] = 0$$

et la méthode de Cauchy généralisée (§ 94) nous fournira par des éliminations une intégrale complète du système en involution (28).

Ce théorème donne une réelle importance à la question suivante :

Connaissant les r intégrales $f_1, \dots, f_r, \dots, f_r$ du système complet (29), comment reconnaître si on peut trouver d'autres fonctions F_1, \dots, F_r, U , telles que l'on ait la relation (20)? Nous supposons que l'application du théorème de Poisson aux intégrales connues ne donne pas d'intégrales nouvelles, c'est-à-dire que les fonctions $f_1, \dots, f_r, \dots, f_r$ forment un groupe. Pour qu'il existe une relation de la forme (20), il faut et il suffit que ce groupe renferme un système en involution d'ordre n .

D'abord, il est clair que la condition est suffisante; en effet, si elle est remplie, le groupe $(f_1, \dots, f_r, \dots, f_r)$ peut être ramené à la forme canonique (§ 128)

$$P_1, \dots, P_a, \quad X_1, \dots, X_a,$$

et on a une relation de la forme

$$p_1 dx_1 + \dots + p_a dx_a = Q_1 dX_1 + \dots + Q_a dX_a + dV;$$

comme X_1, \dots, X_a sont des fonctions de f_1, \dots, f_r , cette relation peut aussi s'écrire

$$p_1 dx_1 + \dots + p_a dx_a = F_1 df_1 + \dots + F_r df_r + dV.$$

Inversement, si on a une identité de la forme (20), les fonctions f_1, \dots, f_r engendrent un groupe qui renferme un système en involution d'ordre n . Soit

$$P_1, \dots, P_\beta, \quad X_1, \dots, X_\beta, \quad (\beta \leq a \leq n),$$

la forme canonique de ce groupe; la relation (20) pourra s'écrire

$$\sum_{i=1}^a p_i dx_i = \sum_{i=1}^{\beta} A_i dX_i + \sum_{i=1}^{\beta} B_i dP_i + dV.$$

On peut trouver d'autres fonctions $P_{\beta+1}, \dots, P_a, X_{\beta+1}, \dots, X_a$ telles

que le groupe

$$P_1, \dots, P_n, \quad X_1, \dots, X_n$$

soit un groupe canonique et on a par conséquent

$$\sum_{i=1}^n p_i dx_i = P_1 dX_1 + \dots + P_n dX_n + dW.$$

En retranchant les deux identités membre à membre, il vient

$$\sum_{i=1}^n P_i dX_i = \sum_{i=1}^n A_i dX_i + \sum_{i=1}^n B_i dP_i + d(V - W);$$

or, une telle identité est impossible, si $a < n$. Car, en prenant $X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n$ pour variables indépendantes, on aurait les deux équations incompatibles

$$\frac{\partial (V - W)}{\partial X_n} = P_n, \quad \frac{\partial (V - W)}{\partial P_n} = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, qui n'est qu'une autre forme du théorème précédent :

Étant donné un système en involution

$$f_1 = C_1, \quad \dots, \quad f_r = C_r,$$

si on connaît r intégrales $f_1, \dots, f_r, \dots, f$, du système complet

$$(f_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (f_r, f) = 0,$$

formant un groupe qui renferme un système en involution d'ordre n (ce qu'on peut toujours reconnaître par des opérations élémentaires), l'intégration du système en involution proposé se ramène à une quadrature.

129. La proposition de Jacobi sur le dernier multiplicateur n'est qu'un cas particulier de ce théorème. Soit $f_1 = C_1$ une équation unique; l'équation linéaire $(f_r, f) = 0$ admet, entre $f_1, 2n - 2$ intégrales distinctes. Supposons qu'on ait obtenu toutes les intégrales, sauf une, et qu'on ne puisse obtenir cette dernière intégrale par l'application du théorème de Poisson; alors les intégrales connues

$f_1, f_2, \dots, f_{2n-2}$ forment un groupe d'ordre $2n - 2$ dont la forme canonique sera

$$P_1, \dots, P_\beta, \quad X_1, \dots, X_\alpha \quad (\alpha + \beta = 2n - 2);$$

comme le groupe contient une fonction distinguée f_1 , β sera inférieur à α et on aura forcément $\alpha = n$. Les intégrales X_1, \dots, X_n formeront donc un système en involution d'ordre n . Par conséquent, d'après le théorème précédent, on pourra obtenir la dernière intégrale de l'équation $(f_1, f) = 0$ par une quadrature.

La proposition précédente va même plus loin que la théorie de Jacobi. En effet, une quadrature unique nous donne à la fois une intégrale complète de l'équation $f_1 = C_1$ et la dernière intégrale de l'équation $(f_1, f) = 0$. En employant le dernier multiplicateur, une fois la dernière intégrale de l'équation $(f_1, f) = 0$ obtenue par une quadrature, il faudrait encore une quadrature pour avoir une intégrale complète de l'équation $f_1 = C_1$.

140. Voici maintenant comment on pourra se servir des intégrales connues pour simplifier l'intégration. Soit toujours

$$(28) \quad f_1 = C_1, \quad \dots, \quad f_r = C_r$$

le système en involution proposé, et soient $f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_s$ les intégrales connues du système complet

$$(29) \quad (f_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (f_r, f) = 0;$$

nous supposons que ces intégrales forment un groupe qui admet, outre f_1, \dots, f_r , m fonctions distinguées $\Omega_1, \dots, \Omega_m$, d'ailleurs inconnues. On a vu plus haut (§ 127) comment on pouvait obtenir, par les calculs les plus élémentaires, un système d'équations linéaires

$$(30) \quad B_1(f) = 0, \quad \dots, \quad B_r(f) = 0, \quad \dots, \quad B_{r+m}(f) = 0,$$

équivalent au système complet

$$(31) \quad (f_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (f_r, f) = 0, \quad (\Omega_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (\Omega_m, f) = 0.$$

Il suffira, par exemple, de poser

$$B_1(f) = (f_1, f), \quad \dots, \quad B_r(f) = (f_r, f),$$

et de former ensuite les équations de la forme

$$\lambda_1 (f_{r+1}, f) + \dots + \lambda_{r-m} (f_r, f) = 0,$$

qui admettent les intégrales f_{r+1}, \dots, f_r . Il existe m équations distinctes seulement satisfaisant à ces conditions; on les prendra pour $B_{r+1}(f), \dots, B_{r+m}(f)$.

Le système (30) ainsi obtenu admet les r intégrales $f_1, \dots, f_r, \dots, f_r$; on en obtiendra une nouvelle intégrale par une opération d'ordre

$$2n - q - m - r,$$

ou, en remarquant que la différence $r - q - m$ est un nombre pair $2v$, par une opération d'ordre

$$2n - 2q - 2m - 2v.$$

Soit ϕ_1 une intégrale du système (30); deux cas peuvent se présenter. D'abord, il peut arriver que les fonctions $f_1, \dots, f_r, \dots, f_r, \phi_1$ forment un groupe; les fonctions $f_1, \dots, f_r, \Omega_1, \dots, \Omega_m$ seront des fonctions distinguées de ce groupe et, comme la différence $r + 1 - q - m$ n'est pas un nombre pair, ce groupe admettra une fonction distinguée de plus Ω_{m+1} (*). On est donc conduit à un problème de même forme que le premier, les nombres r et m étant remplacés par $r + 1$ et $m + 1$. On formera comme tout à l'heure un système complet

$$B_1(f) = 0, \quad \dots, \quad B_{r+m+1}(f) = 0,$$

équivalent au système

$$(f_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (f_r, f) = 0, \quad (\Omega_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (\Omega_{m+1}, f) = 0,$$

dont on connaît $r + 1$ intégrales; la recherche d'une nouvelle intégrale exigera une opération d'ordre

$$2n - r - 1 - q - m - 1 = 2n - 2q - 2m - 2v - 2.$$

L'ordre de cette opération est, comme on voit, inférieur de deux unités à l'ordre de la première.

(*) Le nouveau groupe ne peut contenir plus de $m + 1$ fonctions distinguées. D'après la façon même dont on calcule le nombre des fonctions distinguées d'un groupe, on voit, en effet, que, si un groupe d'ordre r contient m fonctions distinguées, un sous-groupe d'ordre $r - q$ en contient $m - q$.

Il peut arriver que les fonctions f_1, \dots, f_r, ϕ_1 ne forment pas un groupe. Alors l'application du théorème de Poisson nous donnera d'autres intégrales ϕ_2, \dots, ϕ_s . Dans le groupe ainsi obtenu $(f_1, \dots, f_r, \phi_1, \dots, \phi_s)$ les fonctions $f_1, \dots, f_r, \Omega_1, \dots, \Omega_m$ sont des fonctions distinguées, mais il peut y en avoir d'autres $\Omega_{m+1}, \dots, \Omega_{m+m'}$. Le problème a encore repris la forme primitive, sauf que r et m sont remplacés respectivement par $r + s$ et $m + m'$. L'opération suivante sera d'ordre

$$2n - (r + s) - (q + m + m'),$$

et, comme s est au moins égal à 2, cet ordre est inférieur d'au moins deux unités à celui de la première opération. On verra de même que l'ordre de la troisième opération sera inférieur d'au moins deux unités à celui de la seconde. et ainsi de suite.

Supposons que de cette façon on ait obtenu assez d'intégrales (f_1, \dots, f_p) pour que le système complet

$$(f_1, f) = 0, \dots, (f_r, f) = 0, (\Omega_1, f) = 0, \dots, (\Omega_p, f) = 0$$

où $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ sont les fonctions distinguées, autres que f_1, \dots, f_r , du groupe (f_1, \dots, f_p) , n'admette pas d'autres intégrales que f_1, \dots, f_p . On aura dans ce cas

$$2n = q + \mu + p,$$

$$\text{ou, en posant } p - q - \mu = 2t,$$

$$n = q + \mu + t.$$

Le groupe (f_1, \dots, f_p) contient alors un système en involution d'ordre n et, d'après le théorème général démontré plus haut, l'intégration du système (28) n'exige plus qu'une quadrature.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — Étant donné un système en involution

$$f_1 = C_1, \dots, f_r = C_r,$$

si on connaît r intégrales f_1, \dots, f_r du système complet

$$(f_1, f) = 0, \dots, (f_r, f) = 0,$$

formant un groupe qui admet, outre f_1, \dots, f_r , m fonctions distin-

guées inconnues, l'intégration du système en involution proposé n'exige, dans les cas les plus défavorables, que les opérations

$$2n - q - m - r, \quad 2n - q - m - r - 2, \quad \dots, \quad 6, 4, 2,$$

et une quadrature.

Toutes ces opérations sont d'ordre pair et l'ordre diminue d'au moins deux unités quand on passe d'une opération à la suivante.

141. Pour donner un exemple, supposons que l'on ait une équation unique

$$f(x_1, \dots, x_{10}, p_1, \dots, p_{10}) = C_1,$$

et que l'on connaisse 7 intégrales $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_7$ de l'équation $(f, \varphi) = 0$ formant avec f un groupe d'ordre 8. Plusieurs cas sont à distinguer :

1° Ce groupe admet, avec f , une autre fonction distinguée; l'intégration exige alors les opérations

$$10, 8, 6, 4, 2;$$

2° Le groupe renferme 4 fonctions distinguées. On a à effectuer les opérations

$$8, 6, 4, 2;$$

3° Le groupe renferme 6 fonctions distinguées. Les opérations nécessaires sont d'ordre

$$6, 4, 2;$$

4° Enfin, si le groupe est en involution, l'emploi de la méthode de Jacobi exige les opérations

$$4, 2.$$

L'emploi de la méthode de Cauchy, combinée avec le dernier multiplicateur, nécessiterait les opérations

$$11, 10, 8, 6, \dots, 4, 2, 2,$$

et deux quadratures.

Supposons encore que l'on connaisse 8 intégrales $\varphi_1, \dots, \varphi_8$ de

l'équation $(f, \varphi) = 0$, formant un groupe avec f . Tous les cas possibles sont résumés dans le tableau suivant :

Le groupe contient 1 fonction distinguée			ordres.				
—	3	—	10,	8,	6,	4,	2
—	5	—		8,	6,	4,	2
—	7	—			6,	4,	2
—	9	—				4,	2
							2

REMARQUE. — On voit, sur cet exemple, que la connaissance de 8 intégrales de l'équation $(f, \varphi) = 0$ ne donne pas de plus grandes simplifications que la connaissance de 7 intégrales seulement. C'est là un fait général, que l'on vérifiera bien aisément d'après les développements qui précèdent : si on connaît toutes les solutions, sauf $2m + 1$, du système complet

$$(f_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (f_r, f) = 0, \quad \text{ou} \quad (f_1, f_2) = 0,$$

le problème de l'intégration n'est pas plus difficile que si on connaissait toutes les solutions, sauf $2m$.

142. Équations homogènes. — Nous allons maintenant nous occuper des équations homogènes et de degré zéro par rapport aux variables p_1, \dots, p_n . Ce cas particulier est important à considérer, car il se présente toutes les fois que l'on a des équations du premier ordre dont on fait disparaître la fonction inconnue par l'artifice de Jacobi. Soit donc

$$(32) \quad N_1 = C_1, \quad \dots, \quad N_r = C_r,$$

un système en involution de q équations distinctes, où N_1, \dots, N_r sont des fonctions homogènes de degré zéro des variables p_i . (D'une manière générale, on désignera par la lettre H une fonction homogène de degré quelconque, par la lettre N ou X une fonction homogène du degré zéro, et par la lettre P une fonction homogène du premier degré; il s'agira toujours, dans la suite, d'homogénéité par rapport aux p_i .) La méthode de Cauchy généralisée ramène l'intégration du système en involution (32) à l'intégration du système complet

$$(33) \quad [N_1, \phi] = 0, \quad \dots, \quad [N_r, \phi] = 0,$$

et, comme z est une solution de ce système, il suffira d'intégrer le système complet

$$(34) \quad (N_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (N_r, \Phi) = 0,$$

pour avoir une intégrale complète du système (32) sans aucune quadrature.

On peut encore simplifier l'intégration. Posons, d'une manière générale,

$$M(F) = p_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_n} = [F, z],$$

et soit H une fonction homogène de degré s , de façon que $M(H) = s.H$. Appliquons la formule générale de Mayer aux trois fonctions z, H, F , les deux dernières ne renfermant pas z ; il vient

$$[[H, F], z] + [[F, z], H] + [[z, H], F] = [F, H],$$

ou, en posant $[H, F] = A(F)$,

$$(35) \quad M(A(F)) - A(M(F)) = (s - 1) A(F).$$

Par conséquent, si K est une solution de l'équation $(H, F) = 0$, où H est une fonction homogène, $M(K)$ sera une intégrale de la même équation.

La même formule (35) nous montre aussi que l'on peut ajouter aux équations (34) la nouvelle équation $M(\Phi) = 0$, sans cesser d'avoir un système complet ⁽¹⁾. Le nouveau système

$$(36) \quad (N_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (N_r, \Phi) = 0, \quad M(\Phi) = 0$$

admet $2n - 2q - 1$ intégrales, autres que N_1, \dots, N_r , que l'on obtiendra par les opérations $2n - 2q - 1, 2n - 2q - 2, \dots, 3, 2, 1$. Soient $\Phi_1, \dots, \Phi_{2n-2q-1}$ ces intégrales; toutes les parenthèses (Φ_i, Φ_j) seront des intégrales du système (34) et, comme ces parenthèses sont homogènes et de degré -1 , elles ne pourront être des fonctions de $N_1, \dots, N_r, \Phi_1, \dots, \Phi_{2n-2q-1}$. En ajoutant une de ces parenthèses, différente de zéro, aux intégrales déjà connues, on aura l'intégrale

(1) Si l'équation $M(\Phi) = 0$ était une conséquence des équations (34), les $2n - q$ intégrales de ce système $\Phi_1, \dots, \Phi_{2n-q}$ seraient des fonctions homogènes d'ordre zéro. Les parenthèses (Φ_i, Φ_j) , qui sont homogènes et de degré -1 , devraient être identiquement nulles. On aurait donc $2n - q \leq s$, ou $q \geq s$, et nous supposons $q < s$.

générale de (34). Le procédé ne serait en défaut que si toutes les parenthèses (Φ_n, Φ_s) étaient nulles. Ceci ne peut arriver que lorsque les fonctions N_i et Φ_s forment un système en involution d'ordre n , et, dans ce cas, l'intégration est immédiatement terminée par la méthode de Jacobi.

Pour intégrer le système (32) par la méthode de Jacobi, on commencera par chercher une intégrale N_{q+1} , différente de N_1, \dots, N_q du système (36), ce qui se fera par une opération d'ordre $2n - 2q - 1$. On cherchera ensuite une intégrale du système complet

$$(37) \quad (N_i, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (N_{q+1}, \Phi) = 0, \quad M(\Phi) = 0,$$

différente de N_1, \dots, N_{q+1} , ce qui exige une opération d'ordre $2n - 2q - 3$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait obtenu un système en involution de n fonctions distinctes d'ordre nul $N_1, \dots, N_q, \dots, N_n$. Cela fait, on aura sans difficulté n fonctions P_1, \dots, P_n donnant lieu à l'identité (§ 114)

$$P_1 dN_1 + \dots + P_n dN_n = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n,$$

qui peut encore s'écrire

$$dZ - P_1 dN_1 - \dots - P_n dN_n = dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n$$

où $Z = z$.

Les équations

$$z = s, \quad N_1 = C_1, \quad \dots, \quad N_n = C_n$$

donnent, par conséquent, une intégrale complète du système proposé.

On est maintenant conduit à se demander quel est le meilleur moyen de simplifier l'intégration quand on connaît un certain nombre d'intégrales du système complet (34). Il nous faut, pour cela, entrer dans quelques détails sur la théorie des groupes homogènes.

143. Un groupe d'ordre r est dit *groupe homogène* s'il contient r fonctions distinctes homogènes H_1, \dots, H_r . La théorie de ces groupes spéciaux repose sur la proposition suivante : Si K est une fonction des variables x_i, p_i , appartenant à un groupe homogène, $M(K)$ appartient au même groupe.

En effet, soit (H_1, \dots, H_r) un groupe homogène et K une fonction

appartenant à ce groupe, $K = \phi(H_1, \dots, H_r)$. Des relations

$$M(H_i) = s_i H_i, \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

on déduit, en multipliant par $\frac{\partial \phi}{\partial H_i}$ et ajoutant,

$$M(K) = \sum_{i=1}^r s_i H_i \frac{\partial \phi}{\partial H_i} = \phi_1(H_1, \dots, H_r).$$

Réciproquement, si un groupe d'ordre r contient r fonctions distinctes K_1, \dots, K_r telles que les expressions $M(K_i)$ soient des fonctions de K_1, \dots, K_r seulement, ce groupe est homogène.

Soit

$$M(K_i) = \Omega_i(K_1, \dots, K_r), \quad (i = 1, 2, \dots, r);$$

si toutes les fonctions Ω_i sont nulles, les fonctions K_i sont homogènes et de degré zéro. Si l'une au moins des fonctions Ω_i n'est pas nulle, on pourra trouver r fonctions distinctes appartenant au groupe, homogènes et du premier ordre. En désignant par Φ une fonction de K_1, \dots, K_r , l'équation $M(\Phi) = \Phi$ peut, en effet, s'écrire

$$\sum_{i=1}^r \frac{\partial \Phi}{\partial K_i} \Omega_i(K_1, \dots, K_r) = \Phi,$$

et on a pour déterminer Φ une équation linéaire à r variables indépendantes avec second membre, qui admet, par conséquent, r intégrales distinctes. De là se déduisent diverses conséquences :

1° Les groupes homogènes se divisent en deux classes, suivant qu'ils admettent r fonctions distinctes homogènes d'ordre nul, ou non. Dans le premier cas, toutes les fonctions du groupe sont d'ordre nul; on peut le représenter par (N_1, \dots, N_r) . Dans le cas contraire, on peut toujours trouver, par des divisions et des élévations de puissances convenables, $r - 1$ fonctions distinctes du groupe, qui soient homogènes et d'ordre 0, et une autre qui soit d'ordre 1, par exemple, de sorte que le groupe aura la forme (N_1, \dots, N_{r-1}, P) . Si toutes les fonctions sont d'ordre nul, le groupe est nécessairement en involution, car les parenthèses (N_i, N_j) devraient être d'ordre -1 .

2° Les fonctions communes à deux groupes homogènes forment

un groupe homogène. Car, si L est une fonction commune à deux groupes, il en est de même de $M(L)$.

3° Étant données v fonctions quelconques Φ_1, \dots, Φ_s des variables x_1, p_1 , imaginons qu'on forme toutes les expressions $M(\Phi_i)$ et (Φ_i, Φ_j) . Ajoutons aux fonctions Φ toutes celles de ces expressions qui ne s'expriment pas au moyen des fonctions Φ elles-mêmes. On obtient ainsi un nouveau système de $v + s$ fonctions distinctes $\Phi_1, \dots, \Phi_{v+s}$, sur lesquelles on peut recommencer les mêmes opérations. En continuant ainsi, il est clair qu'on finira par arriver à un groupe homogène. Les v fonctions Φ_1, \dots, Φ_s engendrent donc un groupe homogène.

4° Le groupe polaire d'un groupe homogène est homogène. Soit (H_1, \dots, H_r) le groupe proposé. Si K est une intégrale du système complet

$$(H_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (H_r, \Phi) = 0,$$

il en est de même, d'après la formule (35), de $M(K)$; ce qui suffit pour établir la proposition.

144. Il résulte aussi de là que les fonctions distinguées d'un groupe homogène forment un groupe homogène. Car les fonctions distinguées d'un groupe sont les fonctions communes à ce groupe et à son groupe polaire. Soit $(H_1, \dots, H_{r-1}, H_r)$ un groupe homogène renfermant m fonctions distinguées. Deux cas peuvent se présenter : ou bien toutes ces fonctions sont d'ordre nul, ou bien elles ne sont pas toutes d'ordre nul. Il est facile de distinguer ces deux cas. On obtient le nombre des fonctions distinguées en cherchant le nombre d'intégrales communes des équations

$$(H_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (H_r, \Phi) = 0,$$

où on suppose que Φ ne dépend que de H_1, \dots, H_r . Si ces équations se réduisent à $r - m$ équations distinctes, par exemple aux $r - m$ premières

$$(38) \quad (H_1, \Phi) = 0, \quad \dots, \quad (H_{r-m}, \Phi) = 0,$$

le groupe admet m fonctions distinguées. Pour avoir les fonctions distinguées d'ordre nul, il faudra joindre aux équations (38) la

relation

$$(39) \quad M(\Phi) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial \Phi}{\partial H_i} M(H_i) = \sum_{i=1}^r a_i H_i \frac{\partial \Phi}{\partial H_i} = 0.$$

Si l'équation (39) est une combinaison linéaire des équations (38), toutes les fonctions distinguées sont d'ordre nul. Si l'équation (39) n'est pas une combinaison linéaire des équations (38), les équations (38) et (39) forment un système complet dont les $m - 1$ intégrales communes donnent $m - 1$ fonctions distinguées d'ordre nul. Les équations (38) admettent une autre intégrale commune dont l'ordre pourra être pris égal à 1 par exemple.

145. On a vu plus haut (§ 128) que tout groupe pouvait être ramené à une forme canonique $P_1, \dots, P_m, X_1, \dots, X_r$, où toutes les parenthèses sont nulles, sauf les parenthèses (P_i, X_i) qui ont pour valeur l'unité. Dans le cas des groupes homogènes, on peut de plus supposer que les fonctions X_i, P_i sont homogènes, d'ordre 0 et 1 respectivement. Prenons, en effet, un groupe homogène; s'il est en involution, on peut prendre pour forme canonique X_1, \dots, X_m ou P_1, \dots, P_m suivant que toutes les fonctions du groupe sont d'ordre nul ou non. Considérons en second lieu un groupe non en involution (N_1, \dots, N_{r-1}, P) . Toutes les fonctions N_1, \dots, N_{r-1} ne peuvent être distinguées; supposons, par exemple, que N_1 ne soit pas distinguée. On pourra alors trouver une fonction F du groupe, du premier ordre, telle que $(F, N_1) = 1$. Soit, en effet, $F = P \Phi(N_1, \dots, N_{r-1})$; la condition $(F, N_1) = 1$ développée donne

$$(P, N_1) \Phi + \sum_{i=1}^{r-1} P(N_i, N_1) \frac{\partial \Phi}{\partial N_i} = 1;$$

les fonctions (P, N_1) et $P(N_i, N_1)$ sont des fonctions du groupe d'ordre zéro et, par conséquent, s'expriment au moyen de N_1, \dots, N_{r-1} seulement. On aura donc, pour déterminer Φ , une équation linéaire à $r - 1$ variables. Soit P_1 une valeur de F ainsi obtenue; le groupe proposé se trouve décomposé (§ 128) en un groupe d'ordre 2 (N_1, P_1) et un groupe d'ordre $r - 2$, u'_1, \dots, u'_{r-2} , en involution avec le premier. Ce groupe (u'_1, \dots, u'_{r-2}) est encore homogène; car, si (v_1, \dots, v_{r-2-r}) est le groupe polaire du groupe proposé, le groupe

$(N_1, P_1, v_1, \dots, v_{n-1})$ est homogène et son groupe polaire est précisément (u'_1, \dots, u'_{n-1}) . Si ce nouveau groupe n'est pas en involution, on recommencera les mêmes opérations, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un groupe en involution. Tout groupe homogène peut donc être ramené à la forme

$$P_1, X_1, \dots, P_r, X_r, U_1, \dots, U_m,$$

où le groupe (U_1, \dots, U_m) est un groupe homogène en involution. Si toutes les fonctions de ce groupe sont d'ordre nul, on peut l'écrire X_{q+1}, \dots, X_{q+m} ; sinon on peut le mettre sous la forme P_{q+1}, \dots, P_{q+m} . En résumé, tout groupe homogène d'ordre $2q + m$, renfermant m fonctions distinguées peut être ramené à la forme canonique

$$(A) \quad X_1, \dots, X_r, X_{q+1}, \dots, X_{q+m}, P_1, \dots, P_r,$$

ou à la forme canonique

$$(B) \quad X_1, \dots, X_r, P_1, \dots, P_r, P_{q+1}, \dots, P_{q+m}$$

où X_i, P_i sont des fonctions homogènes, d'ordre 0 et 1 respectivement, satisfaisant aux relations

$$(X_i, X_j) = 0, \quad (X_i, P_j) = 0, \quad (P_i, P_j) = 0, \quad (P_i, X_j) = \delta_{ij}.$$

La forme (A) convient aux groupes dont toutes les fonctions distinguées sont d'ordre nul, la forme (B) aux groupes pour lesquels il n'en est pas ainsi.

On démontrera comme plus haut (§ 129) que tout groupe canonique homogène est renfermé dans un groupe canonique à $2n$ termes, et on en conclut que les seules propriétés d'un groupe homogène, invariantes relativement à toute transformation homogène de contact, sont l'ordre du groupe, le nombre des fonctions distinguées et le nombre des fonctions distinguées d'ordre nul.

146. Reprenons le système en involution (32) et soient $\Phi_{q+1}, \dots, \Phi_r$ des intégrales connues, différentes de N_1, \dots, N_r , du système complet (34). Les fonctions $N_1, \dots, N_r, \Phi_{q+1}, \dots, \Phi_r$ engendrent un groupe homogène dont toutes les fonctions sont des intégrales du système (34) (§ 142). Si toutes les fonctions de ce groupe sont d'ordre nul, il est en involution, et le problème proposé est ramené à un

problème de même nature, mais plus simple. Nous pouvons donc nous borner au cas où les r intégrales connues forment un groupe homogène $(N_1, \dots, N_q, N_{q+1}, \dots, N_{r-1}, H)$, où H est du premier ordre.

Supposons que ce groupe admette, outre N_1, \dots, N_q , m fonctions distinguées. Deux cas peuvent se présenter; si toutes ces fonctions distinguées ne sont pas d'ordre nul, on emploiera pour terminer l'intégration la méthode générale du § 140. Si toutes ces fonctions distinguées sont d'ordre nul, on peut encore diminuer l'ordre des intégrations en opérant comme il suit.

Remarquons d'abord que, si le groupe (N_1, \dots, N_{r-1}, H) contient un système en involution d'ordre n , la forme canonique du groupe sera $P_1, \dots, P_r, X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n$, où $r = n - m$. On pourra alors (§ 114) trouver des fonctions du premier ordre donnant lieu à l'identité

$$K_1 dX_1 + \dots + K_n dX_n = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$$

et, comme X_1, \dots, X_n sont des fonctions de N_1, \dots, N_{r-1} , on aura aussi une identité de la forme

$$L_1 dN_1 + \dots + L_{r-1} dN_{r-1} = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n.$$

Les fonctions $N_1, \dots, N_{r-1}, L_{q+1}, \dots, L_{r-1}, H$ donnent toutes les intégrales du système (34) (§ 133). L'intégration du système (33) est terminée sans aucune quadrature. Laissant ce cas de côté, considérons les équations linéaires

$$(40) \quad \begin{cases} (N_1, \Phi) = 0, & (N_{r-1}, \Phi) = 0, & (H, \Phi) = 0, \\ \sum p_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = M(\Phi) = 0. \end{cases}$$

Ces équations forment un système complet. Soit en effet (r_1, \dots, r_{n-r}) le groupe polaire du groupe (N_1, \dots, N_{r-1}, H) . Toutes les fonctions de ce groupe ne pouvant être d'ordre nul; on aurait dans ce cas $2n - r = q + m$, ou en posant $r = q + m + 2v$, $n = q + m + v$. Le groupe (N_1, \dots, N_{r-1}, H) contiendrait un système en involution d'ordre n et on serait ramené au cas précédent.

Les $r + 1$ équations (40), admettant $2n - r - 1$ intégrales

communes, forment un système complet. Il y aura $q + m + 1$ équations distinctes de la forme

$$\lambda_1 (N_1, \Phi) + \dots + \lambda_r (H, \Phi) + \lambda_{r+1} M(\Phi) = 0,$$

admettant les r intégrales N_1, \dots, N_{r-1}, H , car les équations de condition qui doivent vérifier $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}$ pour qu'il en soit ainsi se réduisent à $r - q - m$ relations distinctes (¹). Soient

$$(H) (N_1, \Phi) = 0, \dots, (N_r, \Phi) = 0, R_{q+1}(\Phi) = 0, \dots, R_{q+m+1}(\Phi) = 0,$$

les équations linéaires ainsi obtenues. Le système (41) est complet, car il admet $r - q - m$ intégrales de plus que le système (40), c'est-à-dire $2n - q - m - 1$ intégrales. On pourra donc obtenir une intégrale de ce système différente de N_1, \dots, N_{r-1}, H par une opération d'ordre $2n - r - q - m - 1 = 2n - 2q - 2m - 2r - 1$; cette opération sera toujours d'ordre impair.

Soit ϕ , une intégrale de ce système. Deux cas sont à examiner.

1° Supposons que les fonctions $N_1, \dots, N_{r-1}, H, \phi$, forment un groupe homogène d'ordre $r + 1$; ce groupe contiendra $q + m + 1$ fonctions distinguées. Je dis que toutes ces fonctions seront d'ordre nul. Soit, en effet, $X_1, \dots, X_q, X_{q+1}, \dots, X_{q+m}, \dots, X_r, P_{q+m+1}, \dots, P_r$, la forme canonique du groupe (N_1, \dots, N_{r-1}, H) . On peut trouver d'autres fonctions X_i, P_i , formant avec les précédentes un groupe canonique d'ordre $2n$. Imaginons qu'on ait pris ces $2n$ fonctions

(¹) Soient $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ les m fonctions distinguées, autres que N_1, \dots, N_q du groupe (N_1, \dots, N_{r-1}, H) , et W_1, \dots, W_{2r} les $2r$ fonctions qui complètent le groupe. On pourra trouver une équation de la forme

$$\lambda_1 (W_1, \Phi) + \dots + \lambda_{2r} (W_{2r}, \Phi) + \mu M(\Phi) = 0,$$

admettant les intégrales W_1, \dots, W_{2r} . Soit $C(\Phi) = 0$ l'équation ainsi obtenue. Les $m + q + 1$ équations

$$(N_1, \Phi) = 0, \dots, (N_r, \Phi) = 0, (\Omega_1, \Phi) = 0, \dots, (\Omega_m, \Phi) = 0, C(\Phi) = 0$$

admettent les $2n - r - 1$ fonctions du groupe poaire qui sont d'ordre nul, plus les $2r$ fonctions W , pour intégrales, ce qui fait en tout

$$2n - r - 1 + 2r = 2n - q - m - 1$$

intégrales distinctes. Ce système est équivalent au système (41). Mais les développements du texte montrent qu'on peut obtenir ce système (41) sans connaître les fonctions distinguées $\Omega_1, \dots, \Omega_m$.

pour nouvelles variables. Le système (40) prend la forme

$$(42) \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial P_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial P_r} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial X_{q+m+1}} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial X_r} = 0, \\ \sum P_i \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} = 0, \end{cases}$$

et le système (41) devient de même

$$(43) \frac{\partial \Phi}{\partial P_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial P_{q+m}} = 0, P_{q+1} \frac{\partial \Phi}{\partial P_{q+1}} + \dots + P_n \frac{\partial \Phi}{\partial P_n} = 0.$$

Toute intégrale de ce système sera de la forme

$$\Phi \left(X_1, \dots, X_m, P_{q+m+1}, \dots, P_r, \frac{P_{q+1}}{P_n}, \dots, \frac{P_{n-1}}{P_n} \right);$$

si elle forme avec $X_1, \dots, X_r, P_{q+m+1}, \dots, P_r$ un groupe d'ordre $r+1$, toute fonction distinguée de ce groupe aura la même forme et devra satisfaire aux équations

$$(X_k, \Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, q'),$$

$$(P_i, \Phi) = -\frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = 0, \quad (i = q+m+1, \dots, q').$$

Toute fonction distinguée de ce groupe sera donc de la forme

$$\Phi \left(X_1, \dots, X_{q+m}, X_{q'+1}, \dots, X_n, \frac{P_{q'+1}}{P_n}, \dots, \frac{P_{n-1}}{P_n} \right),$$

c'est-à-dire sera d'ordre nul. On sera donc ramené à une question de même nature que la première, sauf que r sera remplacé par $r+1$ et q par $q+1$. La seconde opération sera d'ordre inférieur de deux unités à celui de la première.

2° Si $N_1, \dots, N_{r-1}, H, \phi_1$ ne forment pas un groupe homogène, elles donnent naissance à un groupe homogène qui sera au moins d'ordre $r+2$ et qui renfermera dans tous les cas m fonctions distinguées d'ordre nul. La seconde opération à laquelle on sera conduit sera encore d'ordre inférieur d'au moins deux unités à celui de la première.

En réunissant tous ces résultats, on est conduit à la proposition suivante :

Étant donné un système en involution

$$N_1 = C_1, \dots, N_r = C_r,$$

où N_1, \dots, N_r sont des fonctions homogènes d'ordre zéro des variables p_i , si $N_1, \dots, N_r, \dots, N_{r-1}, H$ sont des intégrales communes du système complet

$$(N_1, \Phi) = 0, \dots, (N_r, \Phi) = 0,$$

formant un groupe homogène qui admet $q + m$ fonctions distinguées, toutes d'ordre zéro, l'intégration du système en involution proposé n'exige, dans les cas les plus défavorables, que les opérations

$$2n - r - q - m - 1, \quad 2n - r - q - m - 3, \quad \dots, \quad 5, 3, 1.$$

NOTE I

Sur les systèmes jacobiens (§ 34, p. 66).

Soit

$$(1) \quad X_1(f) = 0, \quad \dots, \quad X_r(f) = 0$$

un système complet de q équations à n variables indépendantes, telles que l'on ait identiquement

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, q).$$

Quelques auteurs donnent à ces systèmes le nom de système jacobien. Supposons qu'on ait obtenu une intégrale φ_1 des r premières équations

$$(2) \quad X_1(f) = 0, \quad \dots, \quad X_r(f) = 0;$$

en la substituant dans $X_{r+1}(f)$, on formera une suite de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, telles que $\varphi_{i+1} = X_{r+1}(\varphi_i)$, qui seront toutes des intégrales du système (2). Supposons qu'après i opérations on obtienne une intégrale qui s'exprime au moyen des précédentes

$$\varphi_{i+1} = \Pi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i);$$

en cherchant une intégrale de l'équation $X_{r+1}(f) = 0$ qui s'exprime au moyen de $\varphi_1, \dots, \varphi_i$, on est conduit à l'équation linéaire

$$(3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} \varphi_1 + \dots + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{i-1}} \varphi_{i-1} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_i} \Pi(\varphi_1, \dots, \varphi_i) = 0,$$

et toute intégrale de cette équation fera connaître une intégrale commune des équations

$$(4) \quad X_1(f) = 0, \quad \dots, \quad X_{r+1}(f) = 0.$$

La méthode ne s'applique plus lorsque $X_{r+1}(\varphi_i) = \Pi(\varphi_i)$. Il faut dans ce cas chercher une autre intégrale commune φ_i du système (2).

et se servir de ϕ_1 , au lieu de φ_1 . Si on a aussi $X_{r+1}(\phi_1) = \Pi_1(\phi_1)$, on cherchera une intégrale de la forme $\theta(\varphi_1, \phi_1)$, ce qui conduit à l'équation linéaire

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} \Pi_1(\varphi_1) + \frac{\partial \theta}{\partial \phi_1} \Pi_1(\phi_1) = 0,$$

dont on obtient une intégrale par des quadratures.

Ce cas exceptionnel ne se présente pas, lorsque les équations (1) ont été résolues par rapport à q dérivées. Il est aisé de se rendre compte pourquoi il en est ainsi. Si, par exemple, les équations (1) ont été résolues par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$, les r premières équations admettent déjà un certain nombre d'intégrales connues, x_{r+1}, \dots, x_r . Il n'en est pas de même si on considère un système jacobien de forme quelconque.

NOTE II

Sur le théorème de Poisson ⁽¹⁾.

Le théorème de Poisson nous apprend que, si φ_1 et φ_2 sont deux intégrales de l'équation

$$(1) \quad (f, \varphi) = 0,$$

il en est de même de (φ_1, φ_2) . Ce théorème permet donc de déduire de deux intégrales connues de l'équation (1) une nouvelle intégrale par des opérations indépendantes de la forme de la fonction f . On doit à M. Laurent un théorème plus général ⁽²⁾ : si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r, \psi_1, \dots, \psi_k$ sont $2k$ solutions de l'équation (1), il en est de même de l'expression

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_k} \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \dots, \psi_k)}{D(x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_k}, p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_k})},$$

mais ce théorème ne donne pas de solutions distinctes de celles que l'on peut obtenir par l'application répétée du théorème de Poisson. Cela résulte de la proposition suivante, que M. Lie a déduite de la théorie des groupes.

Si on connaît q solutions $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ de l'équation $(f, \varphi) = 0$, et qu'on puisse déduire de ces q solutions, par des opérations indépendantes de la forme de la fonction f , une nouvelle solution Π de la même équation, Π appartient au groupe engendré par les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_r$.

En effet, toute fonction f satisfaisant aux équations

$$(2) \quad (\varphi_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (\varphi_r, f) = 0,$$

⁽¹⁾ Lie, *Mathematische Annalen*, t. VIII, p. 333.

⁽²⁾ *Journal de Liouville*, 3^e série, t. XVII, p. 422.

devra aussi vérifier l'équation $(\Pi, f) = 0$. Or, si les fonctions q_1, \dots, q_r engendrent un groupe (q_1, \dots, q_r) , les intégrales des équations (2) sont les intégrales du système complet

$$(3) \quad (q_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (q_r, f) = 0, \quad \dots, \quad (q_n, f) = 0.$$

L'équation $(\Pi, f) = 0$ devra être une combinaison linéaire des équations (3), ce qui ne pourra arriver que si la fonction Π appartient au groupe (q_1, \dots, q_r) . Si F_1, \dots, F_{2n-r} sont $2n - r$ intégrales distinctes du système (3), Π doit, en effet, appartenir au groupe polaire de (F_1, \dots, F_{2n-r}) , c'est-à-dire au groupe (q_1, \dots, q_r) .

Le théorème n'est plus exact si la fonction f est soumise à certaines restrictions. Par exemple, si f est homogène, on a vu que de toute intégrale q_1 de l'équation (1) on peut déduire une nouvelle intégrale

$$p_1 \frac{\partial q_1}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial q_1}{\partial p_n} = M(q_1).$$

Dans ce cas particulier, l'énoncé du théorème doit être modifié comme il suit :

Si on connaît q solutions q_1, \dots, q_r de l'équation

$$(f, q) = 0,$$

où f est une fonction homogène des variables p_i , et si on peut trouver, par des opérations indépendantes de la forme de la fonction homogène f , une autre intégrale Π de la même équation, Π appartient au groupe homogène engendré par les fonctions q_1, \dots, q_r .

En effet, toute solution commune homogène des équations

$$(q_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (q_r, f) = 0,$$

vérifie aussi les équations (§ 141)

$$((q_1, q_r), f) = 0, \quad \left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial q_1}{\partial p_n}, f \right) = 0,$$

et, par conséquent, les r équations

$$(4) \quad (q_1, f) = 0, \quad \dots, \quad (q_r, f) = 0,$$

où (q_1, \dots, q_r) est le groupe homogène engendré par q_1, \dots, q_r . Le groupe polaire (H_1, \dots, H_{2n-r}) de (q_1, \dots, q_r) est un groupe homogène et on en conclut, comme tout à l'heure, que Π doit appartenir au groupe polaire de (H_1, \dots, H_{2n-r}) , c'est-à-dire au groupe (q_1, \dots, q_r) .

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR L'EXISTENCE DES INTÉGRALES.

§§		Page
1 — 6.	Démonstration de l'existence des intégrales.....	1
7 — 10.	Applications diverses. — Fonctions implicites.....	17
11 — 13.	Conditions géométriques auxquelles on peut assujettir une intégrale	20
14 — 15.	Intégrales singulières.....	24
16.	Moyen de faire disparaître la fonction inconnue.....	27

CHAPITRE II

ÉQUATIONS LINÉAIRES. SYSTÈMES COMPLETS.

17.	Équations linéaires et homogènes.....	29
18 — 19.	Équations linéaires quelconques.....	32
20 — 22.	Interprétation géométrique.....	37
23 — 25.	Systèmes complets	46
26.	Systèmes jacobiens.....	51
27.	Méthode générale d'intégration des systèmes complets.....	52
28 — 31.	Méthode de Mayer.....	54
32.	Méthode de Jacobi.....	65

CHAPITRE III

ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

33.	Systèmes complètement intégrables.....	70
34.	Méthode d'intégration de Mayer.....	74
35.	Application à l'équation $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$	77
36.	Considérations géométriques.....	82

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS DE FORME QUELCONQUE. GÉNÉRALITÉ. MÉTHODE
DE LAGRANGE ET CHARPIT.

55

39.	Équations à trois variables. — Définition des intégrales complètes, générales et singulières	28
40 — 41.	Méthode d'intégration de Lagrange et Charpit	30
42 — 45.	Équations à un nombre quelconque de variables. — Généralité.	34

CHAPITRE V

MÉTHODE DE CAUCHY. CARACTÉRISTIQUES.

46 — 47.	Problème de Cauchy pour les équations à trois variables	102
48.	Généralisation du problème de Cauchy	109
49.	Interprétation géométrique. — Caractéristiques	113
50 — 51.	Extension de la méthode de Cauchy aux équations à plus de trois variables. — Les caractéristiques déduites de l'équation elle-même	113
52.	Les caractéristiques déduites de l'intégrale complète	120
53.	Moyen de déduire d'une intégrale complète une intégrale satisfaisant à des conditions initiales données	123

CHAPITRE VI

DÉFINITION DES EXPRESSIONS (φ, ψ) ET $[\varphi, \psi]$. PREMIÈRE MÉTHODE
DE JACOBI.

54.	Définition des expressions (φ, ψ) . — Théorème de Poisson	131
55.	Les expressions $[\varphi, \psi]$. — Formule générale de Mayer	131
56.	Première méthode de Jacobi, modifiée par Mayer	133

CHAPITRE VII

MÉTHODE DE JACOBI ET MAYER.

57 — 58.	Intégrale complète d'un système d'équations	142
59.	Systèmes en involution	144

TABLE DES MATIÈRES.

353

	Page.
60 — 61. Méthode générale d'intégration. — Remarques d'Insehnshy..	147
62. Méthode de Jacobi proprement dite.....	158
63. Solution d'un cas singulier, d'après Mayer.....	157
64. Théorème de Liouville.....	161
65 — 67. Extension de la méthode aux équations qui contiennent la fonction inconnue.....	163

CHAPITRE VIII

MÉTHODE DE LIE.

68. Théorème fondamental de Lie.....	170
69. Complément à la méthode de Jacobi et Mayer.....	176
70. Marche à suivre dans la méthode de Lie.....	176
71. Nouvelle démonstration du théorème fondamental.....	178

CHAPITRE IX

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS A TROIS VARIABLES. COURBES INTÉGRALES. SOLUTIONS SINGULIÈRES.

72. Définition des cônes (N) et (T) et des courbes (C).....	181
73 — 74. Étude des caractéristiques.....	185
75. Recherche de l'intégrale passant par une courbe.....	190
76 — 78. Courbes intégrales.....	191
79 — 84. Solutions singulières.....	199
85. Application aux équations linéaires.....	217

CHAPITRE X

THÉORIE GÉNÉRALE DE LIE.

86 — 89. Les multiplicités M_n	224
90. Le problème de l'intégration, d'après Lie.....	233
91. Retour sur la méthode de la variation des constantes. — Équations semi-linéaires.....	234
92 — 93. Multiplicités caractéristiques.....	237
97. Remarques diverses. — Intégrales singulières.....	246
98 — 99. Notation homographique de Lie.....	251

CHAPITRE XI

TRANSFORMATIONS DE CONTACT.

100 — 101.	Définition. Identité fondamentale.....	255
102.	Détermination des transformations de contact	257
103 — 104.	Cas de l'espace à trois dimensions	261
105 — 106.	Relations entre les fonctions Z , X , P	267
107.	Propriétés d'invariance des crochets	273
108 — 109.	Conséquences diverses	276
110 — 111.	Transformations en α, p	279
114 — 115.	Transformations homogènes.....	285
116 — 118.	Application de la théorie précédente aux équations du premier ordre	289
119.	Méthode de la variation des constantes rattachée à la théorie des transformations de contact	295
120.	Passage d'une intégrale complète à une autre.	301
121.	Méthode de Korkine.....	302

CHAPITRE XII

THÉORIE DES GROUPES. MÉTHODE GÉNÉRALE D'INTÉGRATION.

122 — 123.	Résumé des différentes méthodes.....	304
124.	Définition des groupes.....	308
125.	Groupes réciproques.....	308
126 — 127.	Fonctions distinguées d'un groupe.....	310
128 — 129.	Formes canoniques.....	313
131.	Systèmes en involution contenus dans un groupe.....	319
132 — 141.	Application de la théorie des groupes à l'intégration d'un système en involution	320
142 — 143.	Équations et groupes homogènes	326
NOTE I.	Sur les systèmes jacobiens.....	347
NOTE II.	Sur le théorème de Poisson.....	349

12-29

LEÇONS SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE

—
TOUS. — IMPRIMERIE DE LA PAIX.
—

LEÇONS
SUR L'INTÉGRATION
DES ÉQUATIONS
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DU SECOND ORDRE

A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES

PAR

E.-GOURSAT,

PROFESSEUR DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL A L'UNIVERSITÉ DE PARIS

TOME II

LA MÉTHODE DE LAPLACE. — LES SYSTÈMES EN INVOLUTION
LA MÉTHODE DE H. DARBOUX. — LES ÉQUATIONS DE LA PREMIÈRE CLASSE
TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE
GÉNÉRALISATIONS DIVERSES

C
PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE
8, Rue de la Sorbonne, 8

—
1898

Reproduced by
DUOPAGE PROCESS
in the
U.S. of America

Micro Photo Division
Bell & Howell Company
Cleveland 12, Ohio

D.P. # 1260

a.c.d.

PRÉFACE

Le présent volume renferme la fin de mon ouvrage sur les *Équations aux dérivées partielles du second ordre*. Il est consacré presque en entier à l'exposition de la méthode de Laplace et de la méthode plus générale de M. Darboux. J'avais d'abord eu l'intention de terminer ce volume par un chapitre sur l'intégration par *quadratures partielles*. Mais j'ai préféré rester dans le même ordre d'idées, et j'ai consacré le dernier chapitre à diverses généralisations des méthodes précédemment exposées.

M. Bourlet et mon éditeur, M. Hermann, m'ont continué pour ce second volume le concours qu'ils m'avaient prêté pour le premier. M. E. Cosserat, qui a pris une part active à la correction des épreuves, m'a soumis sur plusieurs points des remarques dont j'ai profité pour ma rédaction. M. Léonçe Laugel, bien connu du public mathématique par les nombreuses traductions qu'il a déjà publiées, a bien voulu traduire pour moi plusieurs mémoires importants. Je leur adresse à tous mes affectueux remerciements.

19 décembre 1897.

E. GOURSAT.

LEÇONS

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

CHAPITRE V

LA MÉTHODE DE LAPLACE ⁽¹⁾

Les deux cas d'intégrabilité par la méthode de Monge. — Transformations de Laplace. — Définition des invariants. — Étude de la suite de Laplace. — Recherche des cas où la suite de Laplace est terminée dans un sens ou dans les deux sens. — Retour sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima. — Proposition permettant de reconnaître, dans certains cas, que la suite de Laplace est limitée. — Application aux surfaces à lignes de courbure planes. — Extension de la méthode de Laplace aux équations linéaires de forme quelconque, d'après Legendre. — Classification des équations linéaires en trois types.

101. Soit

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = M$$

une équation linéaire où les coefficients a , b , c et le second membre M sont des fonctions données des variables indépendantes x et y . Pour que cette équation admette une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, on a vu plus haut (t. I, p. 94) que les coefficients a , b , c doivent vérifier l'une au moins des deux relations ⁽²⁾

$$\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c = 0.$$

⁽¹⁾ Auteurs à consulter : EULER, *Institutiones Calculi Integralis* (t. III). — LAPLACE, *Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles* (Mémoires de l'Académie : 1773). — DARSOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (t. II; chapitre II et suivants).

⁽²⁾ Ces conditions ont d'abord été trouvées par Euler, en cherchant à ramener l'équation (1) à l'une des formes :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + P \frac{\partial v}{\partial x} + Q = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + P \frac{\partial v}{\partial y} + Q = 0,$$

par un changement de fonction inconnue tel que $z = uv$ (*Institutiones Calculi Integralis*, t. III. Pars prima. Sectio secunda.)

Supposons, par exemple, que l'on ait

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + ax - c = 0;$$

l'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} + ax \right) + b \left(\frac{\partial z}{\partial y} + ax \right) = M.$$

En prenant pour fonction inconnue $\frac{\partial z}{\partial y} + ax = u$, cette fonction u est déterminée par l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + bu = M,$$

qui s'intègre comme une équation différentielle et dont l'intégrale générale est

$$u = e^{-\int b dx} \left\{ Y + \int M e^{\int b dx} dx \right\},$$

Y étant une fonction arbitraire de y . On a donc une intégrale intermédiaire, avec une fonction arbitraire de y .

$$(4) \quad \frac{\partial z}{\partial y} + ax = e^{-\int b dx} \left\{ Y + \int M e^{\int b dx} dx \right\};$$

cette équation du premier ordre peut, à son tour, être intégrée comme une équation différentielle linéaire, et finalement on obtient pour l'intégrale générale de l'équation (1) l'expression suivante

$$(5) \quad z = e^{-\int a dy} \left[X + \int \left\{ Y + \int M e^{\int b dx} dx \right\} e^{\int a dy - \int b dx} dy \right],$$

avec une fonction arbitraire X de la variable x qui ne figure sous aucun signe de quadrature, et une fonction arbitraire Y de la seconde variable y qui est engagée sous un tel signe.

On peut remarquer que cette expression est de la forme

$$z = \alpha \left[X + \int \beta Y dy \right] + \gamma,$$

α , β , γ désignant trois fonctions déterminées de x et de y , X et Y deux

fonctions arbitraires de x et de y respectivement. Inversement, toute expression de cette forme représente, quelles que soient les fonctions α, β, γ , l'intégrale générale d'une équation de la forme (1), où les coefficients a, b, c satisfont à la relation (2). On tire, en effet, de la valeur de z

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z - \gamma}{\alpha} \right) = \beta \gamma$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z - \gamma}{\alpha} \right) \right\} = 0;$$

si l'on développe les calculs, on trouve bien une équation linéaire en z, p, q, x , dont la relation (6) est une intégrale intermédiaire avec une fonction arbitraire γ .

On voit de même que, si l'on a

$$(7) \quad \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c = 0,$$

l'intégrale générale de l'équation (1) est représentée par la formule

$$(8) \quad z = e^{-\int bx} \left[\gamma + \int X + \int M e^{\int bx} dy \int e^{\int bx - \int cy} dx \right].$$

Dans les deux cas qui viennent d'être examinés, l'intégrale générale de l'équation proposée s'obtient donc par des quadratures. La solution du problème de Cauchy se ramène elle-même à des quadratures; car, si l'on a, par exemple

$$\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0,$$

la connaissance d'une courbe située sur la surface intégrale, et du plan tangent en chaque point de cette courbe, détermine la fonction arbitraire γ qui figure dans l'intégrale intermédiaire (4) (I; n° 32). On est donc ramené à chercher une intégrale d'une équation du premier ordre passant par une courbe donnée. Les seuls cas exceptionnels qui puissent se présenter sont ceux où la courbe donnée est située dans un plan parallèle à l'un des deux plans $x = 0, y = 0$.

Remarque. — Lorsqu'on a à la fois

$$\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0,$$

$$\frac{\partial b}{\partial y} + ab - c = 0,$$

l'équation (1) admet deux intégrales intermédiaires distinctes, dépendant chacune d'une fonction arbitraire; on peut donc la ramener à la forme $s = 0$ (I; n° 43). La vérification est facile; des relations précédentes on déduit

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y},$$

ce qui montre que b et a sont les dérivées partielles d'une fonction $V(x, y)$ par rapport à x et à y respectivement,

$$V = \int b dx + a dy.$$

En posant, dans l'équation (1), $z = ve^{-V}$, on est conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = e^V M,$$

dont l'intégrale générale est

$$v = \int_x^x dx \int_y^y M e^V dy + X + Y.$$

102. Lorsqu'aucune des conditions

$$\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c = 0$$

n'est vérifiée, l'équation proposée du second ordre n'admet pas d'intégrale intermédiaire, et la méthode de Monge ne permet pas d'obtenir l'intégrale générale. On doit à Laplace une méthode de transformation célèbre, qui permet, dans certains cas, de ramener l'intégration d'une équation linéaire de la forme (1), n'admettant pas d'intégrale intermédiaire, à l'intégration d'une autre équation de la même forme, pour laquelle il existe une intégrale intermédiaire⁽¹⁾. Une étude complète de cette méthode a été faite par M. Darboux dans le tome II de ses *Leçons sur la théorie des surfaces*; je me bornerai à en exposer les points essentiels.

(1) Il convient de faire remarquer qu'avant Laplace Euler avait donné un grand nombre d'exemples d'équations linéaires, dont on peut trouver sous forme explicite l'intégrale générale, sans qu'il existe d'intégrale intermédiaire.

Poseons, pour abréger,

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c,$$

$$k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c,$$

et supposons que h et k ne soient pas nuls.

L'équation (1) peut toujours s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} + ax \right) + b \left(\frac{\partial z}{\partial y} + ax \right) - hx = M,$$

ou

$$(9) \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} + bx_1 - hx = M,$$

en posant

$$(10) \quad z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + ax.$$

L'élimination de z_1 entre les deux équations (9) et (10) conduit naturellement à l'équation (1) elle-même; si, au contraire, on élimine x , on est conduit à la nouvelle équation, de même forme que la première,

$$(11) \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + c_1 z_1 = M_1,$$

où l'on a

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a - \frac{\partial \log h}{\partial y}, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c - \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial \log h}{\partial y}, \\ M_1 = M \left(a - \frac{\partial \log h}{\partial y} \right) + \frac{\partial M}{\partial y}. \end{array} \right.$$

L'intégration des deux équations (1) et (11) constitue deux problèmes équivalents; si z est l'intégrale générale de l'équation (1), la formule (10) permettra d'en déduire l'intégrale générale de l'équation (11). Inversement, si z_1 est l'intégrale générale de l'équation (11), la formule (9) donnera l'intégrale générale de l'équation proposée

$$z = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial x} + bx_1 - M}{h}$$

D'après les valeurs des coefficients a_1 , b_1 , c_1 , on a, pour la nouvelle

équation,

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_1}{\partial x} + a_1 b_1 - c_1 = 2k - k - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial b_1}{\partial y} + a_1 b_1 - c_1 = k; \end{array} \right.$$

on ne peut avoir, par hypothèse, $k=0$, mais il peut se faire que l'on ait

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} + a_1 b_1 - c_1 = 0,$$

de sorte que la nouvelle équation (11) admette une intégrale intermédiaire. S'il en est ainsi, on pourra intégrer l'équation (11) et, par suite, l'équation proposée elle-même.

A cause de la symétrie de l'équation linéaire en x et y , on peut encore appliquer à l'équation proposée une transformation analogue à la première, en posant

$$x_{-1} = \frac{\partial x}{\partial x} + b x,$$

ce qui conduit pour x_{-1} , à l'équation

$$\frac{\partial^2 x_{-1}}{\partial x \partial y} + a_{-1} \frac{\partial x_{-1}}{\partial x} + b_{-1} \frac{\partial x_{-1}}{\partial y} + c_{-1} x_{-1} = M_{-1},$$

avec les valeurs suivantes de a_{-1} , b_{-1} , c_{-1} , M_{-1} :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{-1} = a, \quad b_{-1} = b - \frac{\partial \log k}{\partial x}, \quad c_{-1} = c - \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial \log k}{\partial x}, \\ M_{-1} = M \left(b - \frac{\partial \log k}{\partial x} \right) + \frac{\partial M}{\partial x}. \end{array} \right.$$

On a, pour cette nouvelle équation,

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_{-1}}{\partial x} + a_{-1} b_{-1} - c_{-1} = k, \\ \frac{\partial b_{-1}}{\partial y} + a_{-1} b_{-1} - c_{-1} = 2k - k - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y}; \end{array} \right.$$

et on en déduit, pour l'équation (1), un nouveau cas d'intégrabilité, celui où l'on aurait

$$2k - k - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y} = 0.$$

Remarque. — Les deux transformations de Laplace, que nous venons de définir, présentent avec les transformations de contact une différence essentielle. Tandis que toute transformation de contact, appliquée à une équation aux dérivées partielles du second ordre, conduit à une nouvelle équation du second ordre, les deux transformations

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial y} + ax, \quad x_{-1} = \frac{\partial x}{\partial x} + bx,$$

appliquées à l'équation (1), ne réussissent qu'à cause de la forme particulière de cette équation. Si l'on appliquait une de ces transformations à une équation de forme quelconque, on serait conduit, pour la nouvelle inconnue, non à une équation du second ordre unique, mais à un système de plusieurs équations d'ordre supérieur au second.

On peut remarquer encore que chacune de ces transformations peut se décomposer en plusieurs transformations simples; on peut écrire, par exemple,

$$x_1 = e^{-\int ay} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ x e^{\int ay} \right\},$$

ce qui montre que la transformation est équivalente à la suite des trois suivantes

$$u = x e^{\int ay}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x_1 = v e^{-\int ay}.$$

dont la première et la troisième s'appliquent à toute équation du second ordre, tandis que la seconde ne réussit que pour des équations d'une forme particulière.

103. Pour continuer l'étude de la méthode de Laplace, nous remarquerons d'abord qu'on peut, sans diminuer la généralité, supposer $M=0$; car, si x' est une intégrale particulière de l'équation proposée, il suffit de prendre pour nouvelle inconnue $x - x'$ pour être ramené à ce cas. Du reste, les propriétés que nous allons établir s'étendent, sans modification essentielle, au cas où M n'est pas nul.

Les fonctions λ et k , introduites plus haut, jouent dans cette étude un rôle fondamental. M. Darboux a donné à ces fonctions λ et k le nom d'*invariants*, qui est justifié par les propriétés suivantes :

Faisons d'abord dans l'équation linéaire sans second membre

$$(15) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial x}{\partial x} + b \frac{\partial x}{\partial y} + cx = 0,$$

le changement de variables

$$x = \varphi(x'), \quad y = \psi(y');$$

on est conduit à une nouvelle équation de même forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial y'} + a\psi'(y') \frac{\partial x}{\partial x'} + b\varphi'(x') \frac{\partial x}{\partial y'} + c\varphi'(x') \psi'(y') x = 0,$$

dont les nouveaux invariants sont respectivement

$$\begin{aligned} h' &= h\varphi'(x') \psi'(y'), \\ k' &= k\varphi'(x') \psi'(y'). \end{aligned}$$

Si l'on change x en y , et y en x , on échange les valeurs de h et de k . De même, si, dans l'équation (15), on pose $x = \lambda x'$, λ étant une fonction quelconque de x et de y , on trouve une nouvelle équation de même forme

$$(16) \quad \frac{\partial^2 x'}{\partial x' \partial y'} + a' \frac{\partial x'}{\partial x} + b' \frac{\partial x'}{\partial y} + c' x' = 0,$$

les coefficients a' , b' , c' ayant les valeurs suivantes

$$(17) \quad \begin{cases} a' = a + \frac{\partial \log \lambda}{\partial y}, \\ b' = b + \frac{\partial \log \lambda}{\partial x}, \\ c' = c + a \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} + b \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y}; \end{cases}$$

on vérifie sans difficulté que l'on a

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial a'}{\partial x} + a'b' - c' = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \\ \frac{\partial b'}{\partial y} + a'b' - c' = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c. \end{cases}$$

On voit ainsi que les invariants de l'équation (16) sont respectivement égaux aux invariants de l'équation primitive (15).

Étant données deux équations linéaires, telles que (15) et (16), pour que l'on puisse passer de l'une à l'autre en posant $x = \lambda x'$, il est donc nécessaire que les deux équations aient les mêmes invariants. Ces conditions sont aussi suffisantes; en effet, si la transformation est possible,

les deux premières équations (17) donnent

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial y} = a' - a, \quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} = b' - b,$$

et la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial a'}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b'}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y}$$

est une conséquence des équations (18). La valeur de λ ainsi obtenue

$$\lambda = e^{\int (b' - b) dx + (a' - a) dy}$$

satisfait aussi à la dernière des équations (17), comme le montre un calcul facile. On voit par suite que, si l'on ne considère pas comme distinctes deux équations linéaires qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation telle que $x = \lambda x'$, une équation linéaire est complètement déterminée, quand on connaît ses invariants. Il est en effet possible de trouver des formes réduites dont les coefficients peuvent se calculer au moyen des invariants exclusivement (¹).

Considérons en particulier une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} - m x = 0;$$

ses deux invariants sont égaux et, par conséquent, elle ne peut être prise pour forme canonique d'une équation linéaire quelconque. Pour qu'une équation linéaire puisse être ramenée à cette forme, il faut que ses invariants soient égaux. La condition est d'ailleurs suffisante, car, si les deux invariants d'une équation sont égaux à λ , elle a les mêmes invariants que l'équation

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial x \partial y} - \lambda x' = 0,$$

et, par suite, les deux équations se ramènent l'une à l'autre.

104. Revenons maintenant à la transformation de Laplace. Soit (E) l'équation linéaire sans second membre, à laquelle on applique cette transformation, (E₁) l'équation linéaire de même forme que l'on en

(¹) Darboux, *loc. cit.*, p. 26.

déduit par la première transformation de Laplace

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial y} + ax,$$

(E₋₁) l'équation que l'on déduit de (E) par la seconde transformation

$$x_{-1} = \frac{\partial x}{\partial x} + bx;$$

appelons de même $h, k; h_1, k_1; h_{-1}, k_{-1}$ les invariants de ces trois équations respectivement. On a, d'après les formules obtenues plus haut (13) et (14),

$$(19) \quad \begin{cases} h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y}, \\ k_1 = h; \end{cases}$$

$$(20) \quad \begin{cases} h_{-1} = k, \\ k_{-1} = 2k - h - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Les invariants des deux équations (E₁), (E₋₁) ne dépendent donc que des invariants de l'équation (E); propriété importante, qui montre que, si deux équations (E), (E') peuvent se déduire l'une de l'autre en posant $x = \lambda x'$, il en est de même des transformées correspondantes (E₁), (E'₁) et (E₋₁), (E'₋₁).

A chacune des équations (E₁), (E₋₁) on peut évidemment appliquer de nouveau la méthode de Laplace, mais il est essentiel de remarquer que chacune d'elles ne donnera pas naissance à deux équations nouvelles. Prenons, par exemple, l'équation (E₁)

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x \partial y} + \left(a - \frac{\partial \log h}{\partial y}\right) \frac{\partial x_1}{\partial x} + b \frac{\partial x_1}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial \log h}{\partial y}\right) x_1 = 0,$$

et appliquons-lui la seconde transformation de Laplace en posant

$$x' = \frac{\partial x_1}{\partial x} + bx_1;$$

en se reportant à la formule (9), et faisant $M = 0$, il reste simplement

$$x' = hx,$$

de sorte que la seconde transformation, appliquée à l'équation (E₁), nous ramènerait à une équation qui se déduirait de (E) en changeant x en hx .

La première transformation, appliquée à l'équation (E_{-1}) , conduirait de même à une équation qui se déduirait de (E) par le changement de x en λx . Si donc on regarde comme équivalentes deux équations qui se ramènent l'une à l'autre par le changement de x en λx , l'application répétée de la méthode de Laplace conduira seulement à une suite linéaire d'équations

$$\dots (E_{-2}), \quad (E_{-1}), \quad (E), \quad (E_1), \quad (E_2) \dots$$

à indices positifs et négatifs, dans laquelle chaque équation (E_i) se déduira de l'équation (E_{i-1}) par la première substitution et de l'équation (E_{i+1}) par la deuxième.

Il résulte de ce qui précède que deux équations de cette suite s'intègrent en même temps et, par suite, on saura intégrer toutes les équations de la suite dès qu'on saura intégrer l'une d'elles. D'une manière plus précise, si l'on sait résoudre le problème de Cauchy pour une équation de la suite, on peut résoudre le même problème pour toutes les autres équations de la suite. Il suffit évidemment de prouver que ce problème se résout en même temps pour deux équations consécutives. Afin de simplifier les notations, considérons les deux équations (E) et (E_1) . Supposons qu'on veuille obtenir une intégrale de l'équation (E) passant par une courbe C , le plan tangent étant donné en chaque point de cette courbe. Le long de C , $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ sont des fonctions données d'un paramètre variable θ ; quand on fait la transformation de Laplace

$$x_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + ax,$$

à la courbe C correspond une autre courbe C_1 . Comme l'équation proposée peut s'écrire

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 = \lambda x,$$

on connaîtra aussi la valeur de $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ le long de la courbe C_1 , et on aura ensuite la valeur de $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ au moyen de la relation

$$dz_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x} dx + \frac{\partial z_1}{\partial y} dy.$$

On est donc ramené à chercher une intégrale de l'équation (E_1) pas-

sant par la courbe C , et ayant un plan tangent connu le long de cette courbe.

Si, en poursuivant l'application de la méthode de Laplace, on arrive à une équation (E_i) ayant un invariant nul, on ne peut plus continuer l'application de la méthode, car cet invariant sera nécessairement h_i , si i est positif, et la suite de Laplace relative à l'équation (E) est limitée de ce côté à l'équation (E_i) . Dans ce cas, l'équation (E_i) et, par conséquent, toutes les équations de la suite, s'intègrent par des quadratures; la solution du problème de Cauchy se ramène aussi, pour l'une quelconque des équations de la suite, à des quadratures. Il en serait de même si la suite se terminait à une équation d'indice négatif.

Les invariants des équations (E_i) se déduisent des invariants h et k par l'emploi répété des formules (19) et (20); en appelant h_i et k_i les invariants de l'équation (E_i) on a

$$(21) \quad \begin{cases} h_{i+1} = 2h_i - k_i - \frac{\partial^2 \log h_i}{\partial x \partial y} \\ k_{i+1} = h_i \end{cases}$$

et en faisant successivement $i = 0, 1, 2, \dots$, on calculera de proche en proche les invariants des équations (E_i) à indice positif. Pour calculer les invariants des équations à indice négatif, on emploiera les formules

$$(22) \quad \begin{cases} h_i = k_{i+1} \\ k_i = 2k_{i+1} - h_{i+1} - \frac{\partial^2 \log k_{i+1}}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

où l'on fera successivement $i = -1, -2, -3 \dots$

105. Lorsque la suite de Laplace relative à l'équation (E) se termine d'un côté, on obtient pour l'intégrale générale de cette équation une expression renfermant explicitement une fonction arbitraire et ses dérivées en nombre fini, tandis que la seconde fonction arbitraire figure sous des signes de quadrature. Remarquons d'abord que, si x_1 est l'intégrale générale de l'équation (E_i) d'indice positif, d'après la façon dont on passe de l'équation (E) à l'équation (E_i) , l'intégrale générale de l'équation (E) est une fonction linéaire et homogène de $x_1, \frac{\partial x_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^i x_1}{\partial x^i}$, dont les coefficients sont des fonctions déterminées de x et de y . Si l'invariant h_i de l'équation (E_i)

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x \partial y} + a_i \frac{\partial x_1}{\partial x} + b_i \frac{\partial x_1}{\partial y} + c_i x_1 = 0$$

est nul, l'intégrale générale de cette équation est de la forme (n° 101)

$$z_1 = z \left(X + \int \beta Y dy \right),$$

α et β étant des fonctions déterminées de x et de y , X une fonction arbitraire de x , et Y une fonction arbitraire de y . L'intégrale générale de l'équation (E) sera donc

$$(23) \quad z = A \left(X + \int Y \beta dy \right) + A_1 \left(X' + \int Y \frac{\partial \beta}{\partial x} dy \right) + \dots \\ + A_n \left(X^{(n)} + \int Y \frac{\partial^n \beta}{\partial x^n} dy \right),$$

A, A_1, \dots, A_n désignant aussi des fonctions déterminées de x et de y . On voit que la fonction arbitraire Y est engagée sous plusieurs signes d'intégration, qu'il est en général impossible de faire disparaître. Si l'on suppose $Y = 0$, on obtient une intégrale où figure une seule fonction arbitraire X

$$(24) \quad z = AX + A_1 X' + \dots + A_n X^{(n)},$$

sans aucun signe d'intégration.

Réciproquement, toutes les fois qu'une équation linéaire admet une solution de la forme précédente, où X est une fonction arbitraire, la suite de Laplace relative à cette équation se termine d'un côté après i opérations au plus ⁽¹⁾.

En effet, remarquons d'abord que, si l'on substitue dans le premier membre de l'équation (13) une expression de la forme (24), le résultat de la substitution est de la forme

$$HX + H_1 X' + H_2 X'' + \dots + H_{i+1} X^{(i+1)};$$

si l'équation doit être vérifiée, quelle que soit la fonction X , on doit avoir séparément $H = H_1 = \dots = H_{i+1} = 0$. Autrement, en attribuant à y une valeur particulière n'annulant pas tous ces coefficients, on obtiendrait une équation linéaire pour déterminer X . En calculant les coeffi-

(1) LAPLACE, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1773, art. VII, p. 362.

cients H_i, H_{i+1} , qui sont seuls utiles, on trouve les conditions

$$H_{i+1} = \frac{\partial A_i}{\partial y} + aA_i = 0,$$

$$H_i = \frac{\partial A_{i-1}}{\partial y} + aA_{i-1} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial A_i}{\partial x} + b \frac{\partial A_i}{\partial y} + cA_i = 0.$$

Si dans la seconde relation on remplace $\frac{\partial A_i}{\partial y}$ par sa valeur déduite de la première, on trouve

$$\frac{\partial A_{i-1}}{\partial y} + aA_{i-1} = hA_i.$$

Cela posé, appliquons à l'équation (13) la première substitution de Laplace définie par la formule

$$z_i = \frac{\partial z}{\partial y} + az;$$

d'après les relations établies entre A_i, A_{i-1} , la solution de l'équation (E_i) qui correspond à la solution (24) de l'équation (E) ne contiendra plus les dérivées de la fonction arbitraire X que jusqu'à l'ordre $i - 1$ au plus, et le coefficient de $X^{(i-1)}$ dans z_i sera hA_i .

Par suite, en répétant l'application de la méthode de Laplace un nombre suffisant de fois, on arrivera à une équation (E_j) d'indice inférieur à i dont l'invariant h_j sera nul, ou bien, après i opérations, on sera conduit à une équation (E_i) admettant une solution de la forme

$$z = \Lambda X,$$

et un calcul direct prouve que l'invariant h_i doit être nul. La proposition énoncée est donc établie.

Remarque. — Étant donnée une expression de la forme

$$\Lambda X + \Lambda_1 X' + \dots + \Lambda_i X^{(i)},$$

on peut toujours la mettre sous une forme analogue, où figurent une fonction arbitraire et ses dérivées jusqu'à un ordre aussi élevé qu'on le veut; par exemple, en remplaçant X par $X_1 + X'$, on a une expression qui renferme la dérivée $X_1^{(i+1)}$. On dit qu'une expression de la forme (24) est de rang $i + 1$ par rapport à x , lorsque l'ordre de la plus haute dérivée qu'elle contient est i , et lorsqu'il est impossible de la

mettre sous une forme analogue où ne figureraient que des dérivées d'ordre inférieur à i de la fonction arbitraire.

D'après ce qui précède, lorsque la suite de Laplace relative à l'équation (E) se termine à une équation (E_i) d'indice positif, l'équation (E) admet une solution de la forme (24). Cette solution est bien de rang $i + 1$; en effet, si elle pouvait se ramener à une expression de rang inférieur $j + 1$ ($j < i$), l'application répétée de la première substitution de Laplace conduirait à une équation ayant un invariant nul après j opérations au plus, d'après la réciproque qui vient d'être établie.

106. En échangeant le rôle des variables x et y , on voit de la même façon que, si l'application répétée de la seconde substitution de Laplace conduit, après j opérations, à une équation (E_{-j}) ayant un invariant nul, l'intégrale générale est représentée par une formule analogue à la formule (23), où la fonction arbitraire X figure sous plusieurs signes d'intégration. L'équation proposée admet une intégrale particulière

$$z = BY + B_1 Y' + \dots + B_j Y^{(j)},$$

de rang $j + 1$ par rapport à y , et inversement.

Enfin, si la suite de Laplace relative à l'équation (E) est terminée dans les deux sens, d'une part à l'équation (E_i) d'indice positif, d'autre part à l'équation (E_{-j}) d'indice négatif, les deux fonctions arbitraires peuvent être débarrassées de tout signe de quadrature dans l'intégrale générale, qui est représentée par une expression de la forme

$$z = AX + A_1 X' + \dots + A_i X^{(i)} + BY + B_1 Y' + \dots + B_j Y^{(j)}$$

de rang $(i + 1)$ par rapport à x et de rang $j + 1$ par rapport à y .

Remarquons que toutes les équations de la suite

$$(E_{-j}), (E_{-j+1}), \dots (E_{-1}), (E), (E_1), \dots (E_i),$$

ont pour intégrale générale une expression de même forme. Quand on passe d'une équation (E_k) à l'équation voisine (E_{k+1}) , le rang de la solution par rapport à x diminue d'une unité, tandis que le rang par rapport à y augmente d'une unité.

107. Proposons-nous maintenant de former toutes les équations linéaires dont la méthode de Laplace peut fournir l'intégrale générale. Le problème revient évidemment à former toutes les suites d'équations

linéaires, se déduisant les unes des autres par la méthode de Laplace, et qui sont terminées dans un sens ou dans les deux sens.

Pour obtenir une suite terminée dans un sens, il suffit évidemment de partir d'une équation ayant un invariant nul, et de former la suite d'équations que l'on obtient par l'application répétée de l'une des transformations de Laplace. Par exemple, en partant d'une équation (E), pour laquelle l'invariant λ est nul et en appliquant la seconde transformation, on formera une suite en général illimitée.

Il est plus difficile d'obtenir toutes les suites de Laplace limitées dans les deux sens; car, si on part d'une équation quelconque ayant un invariant nul, la suite de Laplace sera en général illimitée dans l'autre sens. Je rappellerai succinctement la méthode employée par M. Darboux. Soit (E) une équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

pour laquelle l'invariant $\lambda = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$ est nul; si l'on fait la transformation

$$z = \theta e^{-\int a dx},$$

on est conduit à une équation en θ

$$(23) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + \Lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0,$$

qui admet une intégrale intermédiaire de la forme

$$(26) \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha Y,$$

α étant une fonction déterminée de x et de y , et Y , une fonction arbitraire de y . Si la suite obtenue en appliquant à l'équation (23) la seconde transformation de Laplace se termine après n opérations, cette équation admet une intégrale de la forme

$$(27) \quad \theta = BY + B_1 Y' + \dots + B_n Y^{(n)}$$

où B, B_1, \dots, B_n sont des fonctions déterminées de x et de y , Y une fonction arbitraire de y , et réciproquement, s'il en est ainsi, la suite relative à la seconde transformation de Laplace se termine après n transformations au plus.

Tout revient donc à exprimer que l'équation (23) admet une intégrale

de la forme (27). En substituant cette expression de θ dans l'intégrale intermédiaire (26) et attribuant à x une valeur numérique quelconque, on reconnaît que les deux fonctions arbitraires Y et Y_1 doivent être liées par une relation de la forme

$$(28) \quad Y_1 = \lambda Y + \lambda_1 Y' + \dots + \lambda_{n+1} Y^{(n+1)},$$

$\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ désignant des fonctions de y déterminées.

Si l'on remplace θ et Y_1 par leurs valeurs dans l'équation (26), on devra donc avoir

$$\frac{\partial}{\partial y} (BY + B_1 Y' + \dots + B_n Y^{(n)}) = \alpha (\lambda Y + \lambda_1 Y' + \dots + \lambda_{n+1} Y^{(n+1)}),$$

et cela pour toutes les formes possibles de la fonction Y . Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que les coefficients de $Y, Y', \dots, Y^{(n+1)}$ soient égaux dans les deux membres, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial y} &= \alpha \lambda, \\ \frac{\partial B_1}{\partial y} + B &= \alpha \lambda_1, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial B_n}{\partial y} + B_{n-1} &= \alpha \lambda_n, \\ B_n &= \alpha \lambda_{n+1}. \end{aligned}$$

En éliminant les quantités B , on trouve que α doit satisfaire à l'équation

$$\alpha \lambda - \frac{\partial}{\partial y} (\alpha \lambda_1) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\alpha \lambda_2) \dots + (-1)^{n+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} (\alpha \lambda_{n+1}) = 0,$$

qui est linéaire et d'ordre $(n+1)$ par rapport à α ; tous les coefficients étant des fonctions de y , on en conclut que α doit être de la forme

$$(29) \quad \alpha = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{n+1} y_{n+1},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ désignant des fonctions de la variable x , et y_1, y_2, \dots, y_{n+1} des fonctions de la variable y .

Il est facile d'établir directement que, si α est de cette forme, on peut trouver sous forme explicite l'intégrale générale de l'équation (25) qui

peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0.$$

En effet, l'intégrale générale de cette équation a pour expression

$$\phi = X + \int_a Y_1 dy,$$

ou, en remplaçant a par sa valeur (29),

$$\phi = X + x_1 \int y_1 Y_1 dy + x_2 \int y_2 Y_1 dy + \dots + x_{n+1} \int y_{n+1} Y_1 dy;$$

nous allons montrer que l'on peut mettre la fonction arbitraire Y_1 sous une forme telle que les $(n+1)$ intégrales

$$(30) \quad \int y_1 Y_1 dy, \quad \int y_2 Y_1 dy, \quad \dots \quad \int y_{n+1} Y_1 dy$$

s'expriment explicitement au moyen d'une fonction arbitraire Y et de ses dérivées jusqu'à l'ordre n .

En remplaçant Y_1 par $\frac{Y_2'}{y_1}$, Y_2 désignant une nouvelle fonction arbitraire, on fait disparaître la première quadrature, car on aura

$$\int y_1 Y_1 dy = Y_2,$$

et il restera seulement n intégrales

$$(31) \quad \int \frac{y_2}{y_1} Y_2' dy, \quad \int \frac{y_3}{y_1} Y_2' dy, \quad \dots \quad \int \frac{y_{n+1}}{y_1} Y_2' dy;$$

d'ailleurs, on peut écrire, en intégrant par parties,

$$\int \frac{y_2}{y_1} Y_2' dy = \frac{y_2}{y_1} Y_2 - \int \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dy} Y_2 dy$$

et, en appliquant le même procédé aux autres intégrales (31), on ramène ainsi les $(n+1)$ intégrales (30) à n intégrales de même forme renfermant une fonction arbitraire Y_2 . En répétant n fois de suite la même

transformation, il est clair qu'on fera disparaître tous les signes d'intégration, et les $(n + 1)$ intégrales considérées s'exprimeront de la façon annoncée ⁽¹⁾.

Il est essentiel de remarquer que, si les fonctions $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$ ne sont pas linéairement distinctes, la suite de Laplace relative à l'équation (23) se terminera avant n opérations. Si on a, par exemple, une relation de la forme

$$x_{n+1} = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n,$$

où C_1, C_2, \dots, C_n sont des constantes, en remplaçant x_{n+1} par cette valeur dans l'expression de x , il vient

$$x = x_1 (y_1 + C_1 y_{n+1}) + \dots + x_n (y_n + C_n y_{n+1});$$

on voit qu'on a une expression du même genre que la première, où entrent seulement n fonctions de x et n fonctions de y . On pourrait obtenir une réduction analogue si les $(n + 1)$ fonctions y_1, y_2, \dots, y_{n+1} n'étaient pas linéairement distinctes.

108. Pour donner au moins un exemple de la théorie générale, reprenons l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima. On a déjà remarqué qu'on peut ramener cette équation à une équation linéaire de la forme considérée ici par une transformation de contact convenable (I; n° 50). Cette transformation de contact revient, au fond, à prendre les variables introduites par M. Ronnet dans la théorie des surfaces ⁽²⁾. Écrivons l'équation d'un plan tangent à une surface

$$(32) \quad (1 - \alpha\beta) x + i(1 + \alpha\beta) y + (\alpha + \beta) z + \xi = 0,$$

ξ étant une fonction des variables α, β ; d'après la formule qui donne les rayons de courbure principaux, la somme de ces rayons de courbure sera nulle, pourvu que la fonction ξ vérifie l'équation

$$(33) \quad (\alpha - \beta) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \xi}{\partial \beta} = 0.$$

Pour appliquer à cette équation la méthode de Laplace, écrivons-la,

⁽¹⁾ Pour plus de détails sur les équations linéaires dont la suite de Laplace est terminée dans les deux sens, ainsi que pour l'historique, je renverrai le lecteur à l'ouvrage de M. Darboux. Je dois cependant rappeler que le problème a d'abord été résolu par M. Moutard, dans un Mémoire inédit présenté, en 1870, à l'Académie des Sciences.

⁽²⁾ Darboux, *Théorie générale des surfaces*, t. I, p. 244.

en divisant par $(\alpha - \beta)$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\mathfrak{X}}{\partial \beta} + \frac{\xi}{\alpha - \beta} \right\} - \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ \frac{\mathfrak{X}}{\partial \beta} + \frac{\xi}{\alpha - \beta} \right\} + \frac{\mathfrak{X}}{(\alpha - \beta)^2} = 0,$$

et posons

$$\xi_1 = \frac{\mathfrak{X}}{\partial \beta} + \frac{\xi}{(\alpha - \beta)};$$

l'équation devient

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \frac{\xi_1}{\alpha - \beta} + \frac{\mathfrak{X}}{(\alpha - \beta)^2} = 0.$$

L'élimination de ξ conduit à une équation en ξ_1 ,

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x \partial \beta} - \frac{\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta}}{\alpha - \beta} + \frac{\mathfrak{X}}{(\alpha - \beta)^2} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta} - \frac{\xi_1}{\alpha - \beta} \right\} - \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta} - \frac{\xi_1}{\alpha - \beta} \right\} = 0,$$

dont l'intégration se ramène à celle des deux équations du premier ordre

$$(\alpha - \beta) \frac{\partial u}{\partial x} - u = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \beta} - \frac{\xi_1}{\alpha - \beta} = u.$$

De la première on tire

$$u = (\alpha - \beta) \psi(\beta),$$

$\psi(\beta)$ étant une fonction arbitraire de β , et l'on a ensuite

$$\xi_1 = \frac{2\varphi(x) + \int \psi(\beta) (\alpha - \beta)^2 d\beta}{\alpha - \beta},$$

$\varphi(x)$ étant une fonction arbitraire de x .

En remplaçant $\psi(\beta)$ par $\psi''(\beta)$, on peut effectuer la quadrature, et il vient

$$\xi_1 = 2 \frac{\varphi(x) + \psi(\beta)}{\alpha - \beta} + 2\psi'(\beta) + (\alpha - \beta) \psi''(\beta);$$

on a ensuite

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\alpha - \beta}{2} \xi_1 - \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \alpha^2} \\ &= (\alpha - \beta) \{ \psi'(\beta) - \varphi'(\alpha) \} + 2\varphi(\alpha) + 2\psi(\beta);\end{aligned}$$

on en déduira aisément les expressions de x , y , z en fonction de α et de β , (x, y, z) étant les coordonnées du point où le plan variable (32) touche son enveloppe.

Il était évident *a priori*, d'après la symétrie de l'équation (33) en (α, β) que, si la suite de Laplace se terminait d'un côté, elle devait se terminer aussi dans l'autre sens, après le même nombre d'opérations.

109. Étant donnée une équation linéaire de la forme considérée, on peut, en partant des invariants h et k de cette équation et en appliquant les formules de récurrence établies plus haut, calculer de proche en proche les invariants des équations successives que l'on obtient par l'application répétée de la méthode de Laplace. Mais les expressions de ces invariants en fonction de h et de k deviennent très rapidement compliquées, de sorte qu'il paraît très difficile de reconnaître *a priori*, sur une équation déterminée, si l'application de la méthode de Laplace conduira à une équation intégrable. Dans un grand nombre de problèmes de la théorie des surfaces, l'application de la proposition suivante permet d'affirmer d'avance que certaines équations linéaires sont intégrables par l'application de cette méthode.

Si, entre $n + 1$ intégrales linéairement distinctes de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

il existe une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions d'une seule des variables x , y , la suite de Laplace relative à cette équation se termine dans un sens après $n - 1$ transformations au plus⁽¹⁾.

Nous disons que $n + 1$ intégrales sont *linéairement distinctes*, s'il n'existe entre ces intégrales aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, où quelques-uns des coefficients sont différents de

⁽¹⁾ Voir mon *Mémoire Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace* (*American Journal of Mathematics*, vol. XVIII). M. Darboux avait déjà traité quelques cas particuliers et posé la question générale dans le tome IV de la *Théorie générale des Surfaces*.

zéro. Lorsqu'il existe entre $n + 1$ intégrales linéairement distinctes une relation linéaire et homogène dont les coefficients ne dépendent que d'une seule des variables, de y , par exemple, on peut supposer cette relation résolue par rapport à l'une des intégrales et l'écrire

$$(34) \quad x_{n+1} = \varphi_1(y) x_1 + \varphi_2(y) x_2 + \dots + \varphi_n(y) x_n$$

x_1, x_2, \dots, x_{n+1} étant les $n + 1$ intégrales dont il s'agit, et $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_n(y)$ des fonctions de y , que l'on peut aussi, sans diminuer la généralité, supposer linéairement indépendantes.

S'il existait, en effet, une relation telle que

$$\varphi_n(y) = C_1 \varphi_1(y) + \dots + C_{n-1} \varphi_{n-1}(y) + C_n$$

où C_1, C_2, \dots, C_n sont des constantes, l'équation (34) pourrait s'écrire :

$$x_{n+1} - C_n x_n = \varphi_1(y) (x_1 + C_1 x_n) + \dots + \varphi_{n-1}(y) (x_{n-1} + C_{n-1} x_n)$$

et l'on aurait une relation de même forme entre n intégrales seulement

$$x_1 + C_1 x_n, \quad \dots, \quad x_{n-1} + C_{n-1} x_n, \quad x_{n+1} - C_n x_n.$$

On peut aussi supposer qu'il n'existe, entre les intégrales x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , qu'une seule relation de la forme (34); car, s'il en existait deux, l'élimination de x_{n+1} conduirait à une relation de même forme entre n intégrales seulement.

Cela posé, vérifions d'abord que la loi est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Si $n = 1$, la relation (34) s'écrit

$$x_2 = \varphi_1(y) x_1;$$

en posant, dans l'équation proposée, $x = x_1 u$, on est conduit à une équation en u qui doit admettre les deux intégrales $u_1 = 1$, $u_2 = \varphi_1(y)$.

ce qui exige que le coefficient de u et le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial y}$ soient nuls. Un des invariants est donc nul pour cette équation en u et, par suite, pour l'équation en x .

Si $n = 2$, la relation (34) est de la forme

$$x_3 = \varphi_1(y) x_1 + \varphi_2(y) x_2;$$

Cette relation exprime que x_1, x_2, x_3 sont trois intégrales particu-

lières d'une équation du second ordre de la forme

$$(35) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial x}{\partial x} + \mu x = 0,$$

où λ et μ sont des fonctions de x et de y , et nous avons à rechercher les conditions pour que l'équation (35) et l'équation proposée

$$(36) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial x}{\partial x} + b \frac{\partial x}{\partial y} + cx = 0$$

admettent trois intégrales communes linéairement distinctes. En différentiant l'équation (35) par rapport à y , on trouve :

$$\frac{\partial^3 x}{\partial x^2 \partial y} + \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} x = 0;$$

en différentiant de même l'équation (36) par rapport à x , il vient

$$\frac{\partial^3 x}{\partial x^2 \partial y} + a \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial x}{\partial x} \left(c + \frac{\partial a}{\partial x} \right) + \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial x} x = 0.$$

En égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^3 x}{\partial x^2 \partial y}$ et en remplaçant ensuite $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$ par $-\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial x} + \mu x \right)$ et $\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}$ par $-\left(a \frac{\partial x}{\partial x} + b \frac{\partial x}{\partial y} + cx \right)$, on aboutit à une nouvelle équation

$$(37) \quad \left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + ab - c - \frac{\partial a}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial x} + \left(\mu - \lambda b + b^2 - \frac{\partial b}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial y} + a\mu - \lambda c + bc - \frac{\partial c}{\partial x} \right\} x \right) = 0,$$

qui doit être vérifiée par toute intégrale commune aux deux équations (35) et (36). Si le coefficient de $\frac{\partial x}{\partial y}$ n'est pas nul, on en déduira, A et B étant des fonctions de x et de y ,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = Ax + B \frac{\partial x}{\partial x};$$

cette équation et celles qu'on en tire par des différentiations successives permettent d'exprimer toutes les dérivées $\frac{\partial^{r+s} x}{\partial x^r \partial y^s}$ au moyen de x .

$\frac{\partial x}{\partial w}, \dots, \frac{\partial^2 x}{\partial w^2}, \dots$ D'autre part, l'équation (35) et celles qu'on en déduit en différentiant par rapport à x donnent toutes les dérivées $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$ au moyen de $x, y, x, \frac{\partial x}{\partial w}$. Il suit de là que, pour une intégrale commune aux équations (35) et (36), on connaît les valeurs de toutes les dérivées en un point (x_0, y_0) , dès qu'on connaît les valeurs de x et de $\frac{\partial x}{\partial w}$ en ce point. L'intégrale générale de ce système ne dépend donc que de deux constantes arbitraires au plus; et, comme les équations sont linéaires, elles ne peuvent admettre plus de deux intégrales communes linéairement distinctes.

Si le coefficient de $\frac{\partial x}{\partial y}$ est nul, sans que celui de $\frac{\partial x}{\partial x}$ soit nul, l'équation (37) est de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \Lambda x;$$

l'intégrale générale de cette équation est de la forme $x = x'Y$, Y étant une fonction arbitraire de y , et x' une fonction déterminée de x et de y . Il y aurait donc entre les trois intégrales x_1, x_2, x_3 , deux relations telles que

$$x_2 = x_1 \psi_1(y), \quad x_3 = x_1 \psi_2(y),$$

et nous retombons sur le cas qui vient d'être examiné.

Il faut donc que l'équation (37) se réduise à une identité, ou que l'on ait

$$(38) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + a b - c = \frac{\partial a}{\partial x}, \\ \mu - \lambda b + b^2 = \frac{\partial b}{\partial x}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} + a \mu - \lambda c + b c = \frac{\partial c}{\partial x}; \end{cases}$$

l'élimination de λ et μ entre ces trois équations conduit à une équation de condition entre a, b, c .

Pour faire cette élimination, considérons l'invariant k de l'équation linéaire

$$k = \frac{\partial b}{\partial y} + a b - c;$$

on a

$$\frac{\partial k}{\partial w} = \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial b}{\partial x} + b \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Des équations (38) on tire

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} = \frac{\partial a}{\partial y} - \lambda \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial \lambda}{\partial y} + 2b \frac{\partial b}{\partial y},$$

et, en remplaçant $\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial x}$, $\frac{\partial c}{\partial x}$ par leurs valeurs, il reste, toutes réductions faites

$$\frac{\partial \log k}{\partial x} = 2b - \lambda.$$

D'autre part, on a aussi

$$2k - h = 2 \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 2 \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y} - 2k + h = 0.$$

Or, cette relation exprime précisément que l'invariant k_{-} , de l'équation (E_{-}) , obtenue par la transformation

$$x_{-1} = \frac{\partial x}{\partial x} + bx,$$

est nul. La suite de Laplace se termine donc d'un côté après une seule opération.

110. Passons maintenant au cas général et supposons, comme on peut le faire, qu'entre les $(n+1)$ intégrales x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , il existe une relation et une seule de la forme (34). Dans ces conditions, les $n+1$ intégrales x_1, x_2, \dots, x_{n+1} vérifient une même équation linéaire d'ordre n

$$(39) \quad \frac{\partial^n x}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{\partial x}{\partial x} + A_n x = 0,$$

où les coefficients A_1, \dots, A_{n-1}, A_n sont des fonctions de x et de y , et ne vérifient aucune équation de même forme et d'ordre inférieur à n .

En différentiant l'équation proposée (36) par rapport à x , plusieurs fois de suite, on peut exprimer $\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 x}{\partial x^2 \partial y}$, ..., $\frac{\partial^{n+1} x}{\partial x^n \partial y}$ en fonction de $x, y, x, \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n x}{\partial x^n}$. De même, en différentiant l'équation (39) par

rapport à y , il vient

$$\frac{\partial^{n+1}x}{\partial x^n \partial y} + A_1 \frac{\partial^n x}{\partial x^{n-1} \partial y} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial y} x = 0;$$

si l'on remplace ensuite dans cette relation $\frac{\partial^{n+1}x}{\partial x^n \partial y}, \dots, \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}$ et enfin $\frac{\partial x}{\partial y}$ par leurs valeurs, il reste une équation de la forme

$$(40) \quad C_0 \frac{\partial^{n-1}x}{\partial x^{n-1}} + C_1 \frac{\partial^{n-2}x}{\partial x^{n-2}} + \dots + C_{n-1}x + D \frac{\partial x}{\partial y} = 0,$$

qui est vérifiée par toute intégrale commune aux équations (36) et (39). Si D n'est pas nul, cette équation (40) et celles qu'on en déduit par des différentiations successives permettront d'exprimer toutes les dérivées partielles de x au moyen de x et de ses dérivées prises par rapport à la variable x seulement. L'équation (39) et celles qu'on en déduit au moyen de différentiations successives par rapport à x donnent d'ailleurs toutes les dérivées par rapport à x en fonction des $(n-1)$ premières. Il suit de là que, si x est une intégrale commune aux équations (36) et (39), toutes les dérivées partielles de cette fonction en un point (x_0, y_0) sont connues, dès qu'on connaît en ce point les valeurs de $x, \frac{\partial x}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1}x}{\partial x^{n-1}}$. L'intégrale générale du système formé par les équations (36) et (39) dépend donc de n constantes arbitraires au plus, et, comme ces équations sont linéaires, elles ne peuvent admettre $n+1$ intégrales linéairement distinctes.

Il faut donc que l'on ait $D = 0$, et alors l'équation (40) doit se réduire à une identité; s'il en était autrement, les intégrales z_1, z_2, \dots, z_{n+1} vérifieraient une équation linéaire de même forme que l'équation (39) et d'ordre inférieur à n ; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si la relation (40) est vérifiée identiquement, comme cette relation a été obtenue en combinant linéairement l'équation (36) et ses $n-1$ premières dérivées par rapport à x , l'équation (39) et sa dérivée par rapport à y , on a une identité de la forme

$$(41) \quad \frac{d^{n-1}\Phi(x)}{dx^{n-1}} + \alpha_1 \frac{d^{n-2}\Phi(x)}{dx^{n-2}} + \dots + \alpha_{n-1}\Phi(x) + \beta_1 \frac{dF(x)}{dy} + \beta_2 F(x) = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$F(x) = \frac{\partial x}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^{n-1}x}{\partial x^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{\partial x}{\partial x} + A_n x,$$

$$\Phi(x) = \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial x}{\partial x} + b \frac{\partial x}{\partial y} + cx,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \beta_2$ désignant des fonctions de x et de y , dont nous n'écrirons pas l'expression, qui nous sera inutile. On dit alors que les équations (36) et (39) forment un *système en involution*.

Cela posé, nous allons montrer que, si une équation linéaire (36) forme un système en involution avec une équation linéaire d'ordre n telle que l'équation (39), une des équations obtenues par l'application de la transformation de Laplace forme un système en involution avec une équation linéaire d'ordre $n - 1$.

Si on remplace x par $x'e^{-\int \omega x}$, l'équation proposée (36) se change en une équation de même forme, ne renfermant pas de terme en $\frac{\partial x'}{\partial y}$. Pour ne pas multiplier les notations, nous supposons qu'on a effectué d'abord cette transformation de telle façon qu'on ait

$$\Phi(x) = \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial x}{\partial x} + cx.$$

Dans l'identité (41), le coefficient de $\frac{\partial^{n+1} x}{\partial x^n \partial y}$ est $\beta_1 + 1$; on doit donc avoir $\beta_1 = -1$; il n'y a qu'un terme en $\frac{\partial x}{\partial y}$ provenant de $\frac{dF(x)}{dy}$, dont le coefficient est $-A_n$. Il faut, par conséquent, qu'on ait $A_n = 0$, et $F(x)$ ne renferme pas de terme en x

$$F(x) = \frac{\partial^n x}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{\partial x}{\partial x}.$$

Appliquons maintenant à l'équation $\Phi(x) = 0$ la transformation de Laplace

$$\frac{\partial x}{\partial x} = u;$$

la nouvelle inconnue u doit satisfaire à l'équation

$$\Phi_1(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \log c}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(c + \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial \log c}{\partial x} \right) u = 0$$

et l'on a identiquement

$$(42) \quad \frac{d\Phi(x)}{dx} - \frac{\partial \log c}{\partial x} \Phi(x) = \Phi_1(u).$$

L'équation $F(x) = 0$ devient de même

$$F_1(u) = \frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}} + A_1 \frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-2}} + \dots + A_{n-1}u = 0.$$

En différentiant l'équation (42) plusieurs fois de suite par rapport à x , on en déduira $\frac{d\Phi(x)}{dx}$, $\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2}$, ..., $\frac{d^{n-1}\Phi(x)}{dx^{n-1}}$ exprimées au moyen de $\Phi(x)$, $\Phi_1(u)$, $\frac{d\Phi_1(u)}{du}$, ..., $\frac{d^{n-2}\Phi_1(u)}{du^{n-2}}$; l'identité (41) devient, après la substitution,

$$(43) \quad \frac{d^{n-2}\Phi_1(u)}{du^{n-2}} + \alpha'_1 \frac{d^{n-3}\Phi_1(u)}{du^{n-3}} + \dots + \alpha'_{n-2}\Phi_1(u) + \gamma\Phi(x) + \beta_1 \frac{dF_1(u)}{du} + \beta_2 F_1(u) = 0.$$

Si l'on y remplace u par $\frac{\partial x}{\partial y}$, le seul terme en x est γc ; il faudra donc que l'on ait $\gamma = 0$, c'est-à-dire que les deux équations

$$\Phi_1(u) = 0, \quad F_1(u) = 0$$

forment aussi un système en involution. Le raisonnement suppose toutefois que c n'est pas nul, c'est-à-dire que l'invariant k de l'équation proposée n'est pas nul. Mais, dans ce cas, la suite de Laplace s'arrêterait à l'équation elle-même.

En répétant la même transformation sur la nouvelle équation $\Phi_1(u) = 0$ ou (E_{-1}) , et ainsi de suite, ou bien on arrivera à une équation (E_{-j}) , l'indice j étant inférieur à $n-1$, pour laquelle l'invariant k_{-j} sera nul, ou bien on arrivera à une équation (E_{-n}) formant un système en involution avec une équation du premier ordre. L'invariant k_{-n} sera évidemment nul, car cette équation pourra s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial y} U + \beta U = 0,$$

U étant le premier membre d'une équation linéaire du premier ordre. Dans les deux cas, la suite de Laplace est limitée du côté des indices négatifs, après $n-1$ transformations au plus.

111. La réciproque de la proposition générale, qui vient d'être établie, est à peu près évidente. Si la suite de Laplace, relative à l'équation (E) , se termine à l'équation (E_{-n}) , elle admet pour intégrale une expression

de la forme

$$z = BY + B_1 Y' + \dots + B_{n-1} Y^{(n-1)},$$

B, B_1, \dots, B_{n-1} étant des fonctions déterminées de x et de y , et Y une fonction arbitraire de y . Remplaçons Y successivement par $(n+1)$ fonctions Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+1} , choisies de telle façon que les intégrales correspondantes z_1, z_2, \dots, z_{n+1} soient linéairement distinctes. Entre les $(n+1)$ équations qui donnent z_1, z_2, \dots, z_{n+1} , on peut éliminer B, B_1, \dots, B_{n-1} , de sorte que ces $n+1$ intégrales particulières vérifient la relation

$$\begin{vmatrix} z_1 & Y_1 & Y_1' & \dots & Y_1^{(n-1)} \\ z_2 & Y_2 & Y_2' & \dots & Y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n+1} & Y_{n+1} & Y_{n+1}' & \dots & Y_{n+1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

dont tous les coefficients ne dépendent que de la variable y .

Si la suite de Laplace relative à l'équation (E) se termine à une équation $(E - \mu)$, où $\mu < n-1$, elle admet une intégrale de la forme

$$z = BY + B_1 Y' + \dots + B_\mu Y^{(\mu)},$$

B, B_1, \dots, B_μ étant des fonctions déterminées de x et de y , et Y une fonction arbitraire de y . Soient, en outre, $v_1, v_2, \dots, v_{n-\mu-1}$ des intégrales de l'équation (E) qui ne rentrent pas dans la forme précédente. L'expression

$$z = C_1 v_1 + \dots + C_{n-\mu-1} v_{n-\mu-1} + BY + B_1 Y' + \dots + B_\mu Y^{(\mu)}$$

est aussi une intégrale, quelles que soient les valeurs des constantes $C_1, \dots, C_{n-\mu-1}$. Si l'on attribue à la fonction Y successivement $(n+1)$ formes différentes et que l'on prenne en même temps pour les constantes $C_1, \dots, C_{n-\mu-1}$, $(n+1)$ systèmes de valeurs différentes, on obtient $(n+1)$ intégrales z_1, z_2, \dots, z_{n+1} , entre lesquelles existe une relation linéaire de la forme

$$\begin{vmatrix} z_1 & C_1^1 & \dots & C_{n-\mu-1}^1 & Y_1 & Y_1' & \dots & Y_1^{(\mu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n+1} & C_1^{n+1} & \dots & C_{n-\mu-1}^{n+1} & Y_{n+1} & Y_{n+1}' & \dots & Y_{n+1}^{(\mu)} \end{vmatrix} = 0,$$

dont les coefficients ne dépendent que de y . Il est clair qu'on peut toujours choisir les constantes C_i et les fonctions Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+1} , de telle façon que les $(n+1)$ intégrales s_1, s_2, \dots, s_{n+1} , soient linéairement distinctes et que les coefficients de la relation précédente soient différents de zéro.

112. Pour donner une application du théorème qui précède, reprenons le problème de la détermination des surfaces à lignes de courbure planes dans un système et supposons qu'on se donne sur la sphère de rayon 1 une famille de cercles, qui sont les images sphériques des lignes de courbure planes de la surface cherchée (I, p. 136-143). Si l'on écrit l'équation du plan tangent à une surface sous la forme ⁽¹⁾

$$(a + \beta)x + i(\beta - a)y + (a\beta - 1)z + \xi = 0,$$

l'équation différentielle des lignes de courbure est

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} da^2 - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2} d\beta^2 = 0,$$

et les cosinus directeurs de la normale à la surface ont pour valeurs

$$(44) \quad c = \frac{\beta + a}{1 + a\beta}, \quad c' = i \frac{\beta - a}{1 + a\beta}, \quad c'' = \frac{a\beta - 1}{1 + a\beta}.$$

La détermination des surfaces admettant une représentation sphérique donnée pour leurs lignes de courbure se ramène donc à l'intégration d'une équation de la forme

$$(45) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} - \lambda(a, \beta) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2} = 0;$$

on a déjà remarqué que, si l'on prend deux nouvelles variables ρ, ρ_1 , telles que les courbes $\rho = C^u, \rho_1 = C^v$ représentent respectivement les deux familles de courbes sphériques orthogonales qui sont les images sphériques des lignes de courbure (I, p. 144), l'équation (45) prend la forme

$$(46) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial \rho \partial \rho_1} + a \frac{\partial^2 \xi}{\partial \rho^2} + b \frac{\partial^2 \xi}{\partial \rho_1^2} = 0,$$

(1) DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, t. I, p. 246.

α et β étant des fonctions de ρ et de ρ_1 . Cela posé, si les courbes $\rho = C^m$ sont des cercles, il existe deux combinaisons intégrables pour les équations différentielles de ce système de caractéristiques (I, p. 144-145); l'une d'elles est $d\rho = 0$, et par suite l'équation (46) admet une intégrale intermédiaire de la forme

$$\alpha \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \beta \xi = \varphi(\rho).$$

Il en résulte que l'invariant $k = \frac{\partial \beta}{\partial \rho_1} + \alpha \beta$ relatif à l'équation (46) doit être nul, et la suite de Laplace relative à cette équation est limitée d'une part à l'équation elle-même.

D'autre part, lorsque ρ reste constant, le point de coordonnées (c, c', c'') décrit un petit cercle, et par conséquent on a une relation de la forme

$$c \varphi_1(\rho) + c' \varphi_2(\rho) + c'' \varphi_3(\rho) + \varphi_4(\rho) = 0,$$

$\varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho), \varphi_3(\rho), \varphi_4(\rho)$ ne dépendant que de ρ ; en remplaçant c, c', c'' par leurs valeurs (44), on obtient une relation de même forme

$$(47) \quad \alpha \beta \psi_1(\rho) + \alpha \psi_2(\rho) + \beta \psi_3(\rho) + \psi_4(\rho) = 0.$$

Or, quelle que soit la fonction $\lambda(x, \beta)$, l'équation (45) admet les quatre intégrales $\alpha\beta, \alpha, \beta, 1$; il en est évidemment de même de l'équation (46). Par conséquent, d'après le théorème général qui vient d'être démontré, la suite de Laplace relative à cette équation doit se terminer, après deux transformations au plus, à une équation d'indice positif. En réunissant ces résultats, on voit que l'intégrale générale de l'équation (46), dont dépend le problème, a pour expression

$$\xi = A\psi(\rho_1) + B\varphi(\rho) + B_1\varphi'(\rho) + B_2\varphi''(\rho),$$

A, B, B_1, B_2 étant des fonctions déterminées de ρ et de ρ_1 , $\varphi(\rho)$ une fonction arbitraire de ρ , $\psi(\rho_1)$ une fonction arbitraire de ρ_1 .

118. Toute équation linéaire de la forme

$$(48) \quad Ax + 2By + Cz + Dp + Eq + Fx + G = 0,$$

où A, B, C, D, E, F, G sont des fonctions quelconques de x et de y ,

peut être ramenée à la forme

$$(49) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial z}{\partial u} + b \frac{\partial z}{\partial v} + cz + M = 0,$$

pourvu que $B^2 - AC$ ne soit pas nul (I, n° 51). Il suffit de prendre pour nouvelles variables u et v , deux fonctions de x, y , satisfaisant respectivement aux deux relations

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

λ_1 et λ_2 désignant les deux racines de l'équation

$$A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0.$$

Legendre a montré ⁽¹⁾ qu'on peut appliquer directement à l'équation (48) une méthode analogue à celle de Laplace, sans être obligé de faire la transformation qui précède. M. Imaschenetsky a présenté le procédé de Legendre sous une forme très simple.

L'un au moins des coefficients A, C étant différent de zéro, supposons, par exemple, que A ne soit pas nul. On peut alors diviser par A et écrire l'équation

$$(50) \quad r + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2 t + Dp + Eq + Fz + G = 0,$$

D, E, F, G n'ayant plus la même signification.

Posons alors

$$X(r) = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad Y(r) = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

d'où on tire inversement

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\lambda_2 X(r) - \lambda_1 Y(r)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{Y(r) - X(r)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

On aura aussi

$$(51) \quad \begin{cases} X[Y(r)] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y} X(\lambda_2), \\ Y[X(r)] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y} Y(\lambda_1). \end{cases}$$

⁽¹⁾ *Histoire de l'Académie des Sciences*; 1787. — *Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles*, § IV, p. 319 à 323.

de sorte que p, q et $r + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$ peuvent s'exprimer linéairement au moyen de

$$X(s), \quad Y(s), \quad X[Y(s)],$$

et l'équation proposée peut être mise sous la forme

$$(32) \quad X[Y(s)] + aX(s) + bY(s) + cs + M = 0,$$

a, b, c, M étant des fonctions de x et de y . On peut encore écrire cette équation

$$X\{Y(s) + as\} + b\{Y(s) + as\} + s\{c - ab - X(a)\} + M = 0;$$

si le coefficient de s est nul,

$$h = X(a) + ab - c = 0,$$

l'intégration de cette équation revient à l'intégration de deux équations du premier ordre successivement,

$$\begin{aligned} X(u) + bu + M &= 0, \\ Y(s) + as &= u, \end{aligned}$$

et l'équation (32) possède une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire.

On obtient un nouveau cas d'intégrabilité en intervertissant l'ordre des opérations X et Y ; des relations (31) on déduit

$$\begin{aligned} X[Y(\lambda)] - Y[X(\lambda)] &= \{X(\lambda_2) - Y(\lambda_1)\} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \mu [Y(\lambda) - X(\lambda)], \end{aligned}$$

en posant

$$\mu = \frac{X(\lambda_2) - Y(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

et l'équation (32) peut encore s'écrire

$$(33) \quad Y[X(s)] + (a - \mu)X(s) + (b + \mu)Y(s) + cs + M = 0,$$

ou :

$$\begin{aligned} Y[X(s) + (b + \mu)s] + (a - \mu)[X(s) + (b + \mu)s] \\ + [c - (a - \mu)(b + \mu) - Y(b + \mu)]s + M = 0. \end{aligned}$$

Si la quantité

$$k = Y(b + \mu) + (a - \mu)(b + \mu) - c$$

est nulle, l'intégration de l'équation proposée se ramène à l'intégration de deux équations du premier ordre successivement,

$$\begin{aligned} Y(u) + (a - \mu)u + M &= 0, \\ X(z) + (b + \mu)z &= u. \end{aligned}$$

Les quantités que nous avons désignées par h et k

$$\begin{aligned} h &= X(a) + ab - c \\ k &= Y(b + \mu) + (a - \mu)(b + \mu) - c \end{aligned}$$

jouent donc le même rôle que les invariants qui sont désignés par les mêmes lettres dans la théorie de l'équation réduite

$$s + ap + bq + cx = 0.$$

114. Si h n'est pas nul, on est conduit à une équation de même forme que la première en prenant pour nouvelle inconnue

$$x_1 = Y(z) + az;$$

l'équation proposée peut, en effet, s'écrire

$$X(x_1) + bx_1 + M - hx = 0,$$

et l'élimination de x conduit à une équation du second ordre en x_1 ,

$$(54) \quad X[Y(x_1)] + a_1X(x_1) + b_1Y(x_1) + c_1x_1 + M_1 = 0;$$

où l'on a :

$$(55) \quad \begin{cases} a_1 = a + \mu - Y(\log h), & b_1 = b - \mu, \\ c_1 = c - X(a) + Y(b) - bY(\log h), \\ M_1 = Y(M) + M[a - Y(\log h)]. \end{cases}$$

Les valeurs des quantités analogues à h et k pour la nouvelle équation sont respectivement

$$(56) \quad \begin{cases} h_1 = 2h - k - X[Y(\log h)] + X(\mu) + Y(u) + \mu Y(\log h) - 2\mu^2 \\ k_1 = h, \end{cases}$$

et ne dépendent, par conséquent, que de h , k , μ .

De même, si k n'est pas nul, en appliquant à l'équation proposée la transformation

$$x_{-1} = X(s) + (b + \mu)x,$$

on est conduit à une équation du second ordre pour déterminer x_{-1} ,

$$(37) \quad X[Y(x_{-1})] + a_{-1}X(x_{-1}) + b_{-1}Y(x_{-1}) + c_{-1}x_{-1} + M_{-1} = 0,$$

avec les valeurs suivantes de a_{-1} , b_{-1} , c_{-1} , M_{-1} ,

$$(38) \quad \begin{cases} a_{-1} = a - \mu, & b_{-1} = b + \mu - X(\log k), \\ c_{-1} = c + X(a - \mu) - Y(b + \mu) - (a - \mu)X(\log k), \\ M_{-1} = X(M) + (b + \mu - X(\log k))M. \end{cases}$$

On a pour la nouvelle équation :

$$(39) \quad \begin{cases} k_{-1} = k, \\ k_{-1} = 2k - k - Y[X(\log k)] + \mu X(\log k) + X(\mu) + Y(\mu) - 2\mu^2. \end{cases}$$

Si à chacune des équations (34), (37), on applique la même méthode, on forme une suite linéaire d'équations

$$\dots (E_{-2}), (E_{-1}), (E), (E_1), (E_2), \dots$$

les quantités k_i et k_{-i} relatives à l'équation (E_i) , se calculeront de proche en proche par l'emploi répété des formules (36) ou (39), suivant que l'indice i est positif ou négatif.

On peut donc reconnaître directement, sans avoir à effectuer aucune intégration ni aucun changement de variables, si, au bout de n transformations de ce genre, on sera conduit à une équation intégrable. Supposons, par exemple, qu'au bout de i transformations, on arrive à une équation (E_i) d'indice positif, pour laquelle k_i est nul. Cette équation peut s'écrire :

$$X[Y(x_i) + a_i x_i] + b_i [Y(x_i) + a_i x_i] + M_i = 0,$$

et, pour obtenir l'intégrale générale, il faudrait intégrer successivement les deux équations du premier ordre

$$X(u) + b_i u + M_i = \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} + b_i u + M_i = 0,$$

$$Y(x_i) + a_i x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial x_i}{\partial y} + a_i x_i = u.$$

L'intégration de ces équations aux dérivées partielles du premier ordre se ramène, à son tour, à l'intégration des deux systèmes d'équations différentielles

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda_1} = \frac{-du}{b_1u + M_1},$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda_2} = \frac{-dx_1}{a_1x_1 - u};$$

on est donc toujours obligé d'intégrer les deux équations différentielles du premier ordre

$$dy - \lambda_1 dx = 0, \quad dy - \lambda_2 dx = 0,$$

c'est-à-dire de déterminer les caractéristiques de l'équation linéaire (48) qu'il s'agit d'intégrer. Le seul avantage du procédé de Legendre, c'est qu'il permet d'appliquer la transformation de Laplace avant d'avoir effectué la détermination des caractéristiques.

115. Les formules de récurrence établies plus haut pour calculer h_i , k_i , de proche en proche, sont d'une forme plus compliquée que dans le cas d'une équation ramenée à la forme réduite, où ne figure que $\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}$ parmi les dérivées du second ordre. Ceci tient à la présence dans ces formules du facteur μ , ou encore à cette circonstance que les deux opérations $X(f)$ et $Y(f)$ ne sont pas, en général, permutable. Mais il est facile de voir que cette différence est plus apparente que réelle et qu'on peut remplacer, sans rien changer à l'exposition précédente, $X(f)$ et $Y(f)$ par deux opérations permutable. Posons, en effet :

$$X_1(f) = \alpha X(f), \quad Y_1(f) = \beta Y(f),$$

α et β étant deux fonctions quelconques de x et de y ; on aura

$$X_1[Y_1(f)] = \alpha X(\beta) Y(f) + \alpha \beta X[Y(f)],$$

$$Y_1[X_1(f)] = \beta Y(\alpha) X(f) + \alpha \beta Y[X(f)],$$

et, par suite,

$$X_1[Y_1(f)] - Y_1[X_1(f)] = \alpha X(\beta) Y(f) - \beta Y(\alpha) X(f) - \alpha \beta \mu \{X(f) - Y(f)\},$$

puisque l'on a, par hypothèse,

$$X[Y(f)] - Y[X(f)] = \mu \{Y(f) - X(f)\}.$$

Pour que les deux opérations $X, (f)$ et $Y, (f)$ soient permutable, c'est-à-dire pour que l'on ait identiquement

$$X, [Y, (f)] = Y, [X, (f)],$$

il suffira de prendre pour α et β deux fonctions satisfaisant respectivement aux deux relations

$$X(\log \beta) = -\mu, \quad Y(\log \alpha) = -\mu;$$

les fonctions α et β étant ainsi déterminées, l'équation du second ordre proposée peut s'écrire aussi

$$X, [Y, (z)] + \alpha X, (z) + \beta Y, (z) + cz + M = 0,$$

α, β, c, M n'ayant plus la même signification que plus haut, et l'on peut répéter sur cette équation tous les raisonnements qui ont été faits sur l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + M = 0,$$

en remplaçant partout $\frac{\partial f}{\partial x}$ par $X, (f)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ par $Y, (f)$ ⁽¹⁾.

116. Tous les raisonnements qui ont été faits jusqu'ici s'appliquent aussi bien aux valeurs imaginaires des variables qu'aux valeurs réelles. Lorsque les coefficients de l'équation (48) sont des fonctions réelles de x et de y , et qu'on ne veut employer que des transformations réelles, il y a lieu de distinguer trois cas.

1°. — Si $B^2 - AC$ est positif, les caractéristiques de l'équation proposée sont réelles, et on dit qu'elle appartient au type *hyperbolique*. On peut, par une substitution réelle, ramener cette équation à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + M = 0;$$

on peut ensuite, en remplaçant z par $\lambda z + \mu$, λ et μ étant des fonctions convenablement choisies de x et de y , faire disparaître le terme indé-

(1) Au sujet des invariants de l'équation linéaire de forme générale, on pourra consulter deux notes récentes, de M. Cotton (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*; 30 novembre 1896) et de M. Bérghatti (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*; 20 décembre 1896), ainsi que le travail inséré par ce dernier, en 1895, au tome 23 des *Annali di Matematica*, 3^e série.

pendant M et un des coefficients, et prendre pour forme réduite une des trois formes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + cz = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0.$$

Mais on ne peut pas, en général, faire disparaître plus d'un des coefficients a, b, c .

2°. — Si $B^2 - AC$ est négatif, les caractéristiques sont imaginaires, et l'équation appartient au type *elliptique*. On ne peut plus la ramener à la forme précédente par une substitution réelle, mais on peut prendre pour forme canonique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + a \frac{\partial z}{\partial u} + b \frac{\partial z}{\partial v} + cz + M = 0,$$

les nouvelles variables u et v étant des fonctions réelles de x et de y . En effet, si ces fonctions u et v satisfont aux relations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial y} - \beta \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha \frac{\partial v}{\partial y} + \beta \frac{\partial u}{\partial y},$$

on vérifie aisément (I, n° 51 ; p. 103) que la nouvelle équation aura la forme voulue, pourvu qu'on ait

$$A\alpha + B = 0, \quad A^2\beta^2 = AC - B^2;$$

comme $AC - B^2$ est positif, α et β sont réels, et on peut, par conséquent, prendre pour u et v des fonctions réelles de x et de y . Une transformation telle que $z = \lambda z' + \mu$ permettra ensuite de faire disparaître M et un des coefficients a, b, c .

3°. — Enfin, lorsque $B^2 - AC = 0$, il n'y a plus qu'un système de caractéristiques, qui est nécessairement réel, et l'équation appartient au type *parabolique*. Si l'on choisit un nouveau système de variables u et v , telles que les caractéristiques soient les courbes $v = C^u$, l'équation prendra la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + a \frac{\partial z}{\partial u} + b \frac{\partial z}{\partial v} + cz + M = 0;$$

en changeant x en $\lambda x + \mu$, on peut ensuite faire disparaître le terme indépendant M et le coefficient de x , et il reste une équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Mais on peut ici pousser plus loin la simplification, comme on l'a déjà remarqué (I, note de la page 132). En effet, prenons pour variables indépendantes v et une intégrale u , de l'équation elle-même; l'équation ne change pas de forme, et, comme elle doit admettre la solution $x = u$, le coefficient de $\frac{\partial x}{\partial u}$ doit être nul. On peut donc adopter comme forme réduite d'une équation linéaire du type parabolique l'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + b \frac{\partial x}{\partial y} = 0;$$

on voit de plus que cette forme réduite n'est pas unique, mais peut être obtenue d'une infinité de façons.

REMARQUE. — Soit

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + a \frac{\partial x}{\partial x} + b \frac{\partial x}{\partial y} + cx = 0$$

une équation du type elliptique; les deux expressions

$$H = \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}, \quad K = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{a^2 + b^2}{2} - 2c$$

sont deux invariants relativement à la transformation $x = \lambda x'$. Si H et K sont nuls, on peut ramener l'équation proposée à l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$. Si H est nul et K différent de zéro, on peut ramener l'équation à la forme $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + cx = 0$; si K est nul, l'équation peut s'écrire

$$\beta \frac{\partial^2 \alpha x}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \beta x}{\partial y^2} = 0,$$

α et β étant des fonctions de x et de y (¹).

(¹) BERNARDI, loc. cit. *Annali di Matematica*, t. 23, 2^e série.

CHAPITRE VI

LES SYSTÈMES EN INVOLUTION

Généralités sur les équations simultanées dont l'intégrale générale dépend d'un nombre fini de constantes arbitraires. — Intégrales communes à une équation du premier ordre et à une équation du second ordre. — Intégrales communes aux deux équations $r + f = 0$, $t + \varphi = 0$. — Systèmes en involution. — Multiplicités caractéristiques. — Systèmes linéaires. — Exemples divers. — Étude du système formé par deux équations du second ordre de forme quelconque. — Recherche des intégrales communes à une équation du second ordre et à une équation d'ordre n . — Extension des résultats précédents. — La méthode de M. Sophus Lie. — Remarque de M. de Tannenberg. — Théorèmes de M. J. König sur les systèmes complètement intégrables.

117. Depuis les travaux classiques de Cauchy, de M. Darboux et de M^{me} de Kowalewski sur les équations aux dérivées partielles, les systèmes d'équations simultanées, entre plusieurs fonctions inconnues et plusieurs variables indépendantes, ont été l'objet d'un certain nombre de recherches. Nous signalerons, parmi les Mémoires les plus importants, ceux de M. Julius König ⁽¹⁾, de M. Hamburger ⁽²⁾, de M. Sophus Lie ⁽³⁾, de MM. Méray et Riquier ⁽⁴⁾, de M. Riquier seul ⁽⁵⁾, de M. Bourlet ⁽⁶⁾, de M. Beudon ⁽⁷⁾, de M. E. von Weber ⁽⁸⁾, de M. Tresse ⁽⁹⁾, de M. Delassus ⁽¹⁰⁾, etc. En particulier, le Mémoire de M. Riquier,

⁽¹⁾ Ueber die Integration, etc. (*Mathematische Annalen*, t. XXIII).

⁽²⁾ *Crelle*, t. LXXXI, XCIII, CX.

⁽³⁾ Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung (*Berichte der Königl. Sachs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*; 1895)

⁽⁴⁾ *Annales de l'École normale*; 1890.

⁽⁵⁾ *Annales de l'École normale*; 1893. *Mémoires des Savants étrangers*; t. XXXIII.

⁽⁶⁾ Thèse de Doctorat (Paris, 1891).

⁽⁷⁾ Thèse de Doctorat (Paris, 1896).

⁽⁸⁾ Ueber gewisse Systeme Pfaffscher Gleichungen (*Sitzungsberichte der k. bayer. Akad. der Wissenschaften. München*; 1895).

⁽⁹⁾ Thèse de Doctorat (Paris, 1893).

⁽¹⁰⁾ *Annales de l'École normale* (1896, 1897).

publié dans le tome XXXIII des *Mémoires des Savants étrangers*, et les travaux de M. Delassus contiennent des résultats tout à fait généraux. Comme notre but n'est pas d'écrire une théorie générale des équations aux dérivées partielles simultanées, nous n'emprunterons que peu de chose aux travaux précédents, et les résultats dont il sera fait usage seront établis directement.

Un système d'équations aux dérivées partielles, entre m fonctions x_1, x_2, \dots, x_m et n variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n , est dit *intégrable*, s'il existe au moins un système de fonctions

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

telles qu'en remplaçant x_1, x_2, \dots, x_m par ces fonctions dans les premiers membres des équations proposées les résultats soient identiquement nuls. Soit p l'ordre des dérivées de l'ordre le moins élevé qui figurent dans ces équations ; si toute équation, d'ordre égal ou inférieur à p , qui admet toutes les intégrales du système, est une conséquence *algébrique* de ces équations, on dit que le système est *complètement intégrable* (*unbeschränkt integrabel*).

Il peut arriver qu'un système de m équations, renfermant moins de m inconnues, admette des intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires. M. Sophus Lie a proposé d'appeler *systèmes de Darboux* les systèmes qui possèdent cette propriété. Il y aurait encore lieu de les distinguer en plusieurs classes, la classe la plus importante étant formée par les systèmes de Darboux, dont l'intégrale générale possède le plus haut degré de généralité possible, ou *systèmes en involution*. Nous donnerons un peu plus loin une définition plus précise des systèmes en involution, pour le cas qui nous occupe. Par intégrale générale d'un pareil système, nous entendons toujours l'ensemble des intégrales dont l'existence est démontrée par les théorèmes généraux qui vont suivre.

118. Parmi les systèmes d'équations aux dérivées partielles

$$(1) \quad F_1 = 0, \quad \dots, \quad F_\mu = 0,$$

à n variables indépendantes et à m fonctions inconnues x_1, x_2, \dots, x_m , il y a lieu de distinguer tout d'abord ceux qui sont tels qu'en poussant assez loin la différentiation des équations (1) on puisse exprimer toutes les dérivées d'un certain ordre des fonctions inconnues au moyen des

variables, des fonctions inconnues elles-mêmes et des dérivées d'ordre inférieur. De pareils systèmes ont été considérés par M. Sophus Lie ⁽¹⁾ et par M. Bourlet ⁽²⁾. Il est clair que l'intégrale générale d'un pareil système ne peut dépendre que d'un nombre fini de constantes arbitraires; en effet, si toutes les dérivées d'ordre p , par exemple, des fonctions inconnues s'expriment au moyen des dérivées d'ordre inférieur à p , il en sera de même de toutes les dérivées d'ordre supérieur à p . On connaîtra donc les valeurs de toutes les dérivées partielles des fonctions inconnues en un point (x_1^0, \dots, x_n^0) , où ces fonctions sont supposées régulières, dès qu'on connaîtra les valeurs en ce même point des fonctions inconnues et d'un nombre fini de leurs dérivées; les coefficients des développements de ces m fonctions ne peuvent donc dépendre que d'un nombre fini de constantes.

Il ne s'ensuit pas qu'un système de cette espèce soit toujours intégrable, ni que l'intégrale générale dépende d'un nombre de constantes égal au nombre des fonctions inconnues, augmenté du nombre des dérivées d'ordre inférieur à p au moyen desquelles s'expriment toutes les dérivées d'ordre p et d'ordre inférieur; il faut, en outre, que certaines conditions d'intégrabilité soient vérifiées. Nous renverrons pour ce point au travail de M. Bourlet, en rappelant seulement le résultat essentiel, qui est le suivant : *Étant donné un système de l'espèce précédente, on peut toujours, par des différentiations et des opérations algébriques, reconnaître si ce système est incompatible, ou trouver le nombre de constantes arbitraires dont dépend l'intégrale générale; la détermination de cette intégrale est ramené à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires.*

Nous ferons seulement, relativement aux conditions d'intégrabilité, une remarque à peu près évidente, et qui sera utile par la suite. Soit z une fonction inconnue de n variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n , devant satisfaire à un système de μ équations d'ordre r ,

$$(2) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_\mu = 0,$$

μ étant égal au nombre des dérivées partielles d'ordre r ; nous supposons que le déterminant fonctionnel des μ fonctions F_1, F_2, \dots, F_μ , par rapport aux dérivées d'ordre r , n'est pas identiquement nul, de telle sorte qu'on puisse tirer des équations (2) les valeurs des dérivées de cet ordre au moyen des dérivées d'ordre inférieur. En introduisant comme inconnues auxiliaires toutes les dérivées partielles $p_{x_1, x_2}, \dots, p_{x_n}$

(1) *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, chap. I.

(2) Thèse de Doctorat (1^{re} partie).

d'ordre inférieur à r , on peut former un système d'équations aux différentielles totales

$$(3) \quad \begin{cases} dz = p_{100\dots} dx_1 + p_{010\dots} dx_2 + \dots + p_{00\dots 1} dx_n, \\ dp_{a_1, a_2, \dots, a_n} = p_{a_1+1, a_2, \dots, a_n} dx_1 + \dots + p_{a_1, a_2, \dots, a_n+1} dx_n, \end{cases}$$

la somme $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ étant égale ou inférieure à $r - 1$, qui est équivalent au système proposé (2). Il y a un certain nombre de conditions d'intégrabilité de ce système qui sont vérifiées identiquement ; ce sont celles qui sont du type

$$\frac{\partial p_{a_1+1, a_2, \dots, a_n}}{\partial x_2} = \frac{\partial p_{a_1, a_2+1, \dots, a_n}}{\partial x_1},$$

où la somme $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ est inférieure à r ; les seules conditions d'intégrabilité qui ne sont pas toujours vérifiées sont donc celles de la forme précédente où la somme $a_1 + \dots + a_n$ est égale à r . Ces équations de condition peuvent s'écrire

$$(4) \quad \frac{\partial p_{a_1, \dots, a_1, \dots, a_k, \dots, a_n}}{\partial x_k} = \frac{\partial p_{a_1, a_1, \dots, 1, \dots, a_k+1, \dots, a_n}}{\partial x_1},$$

($a_1 + a_2 + \dots + a_n = r$).

En différentiant les μ équations (2) par rapport à x_h , on peut calculer les valeurs des μ dérivées

$$\frac{\partial p_{a_1, a_2, \dots, a_n}}{\partial x_h},$$

puisque, par hypothèse, le déterminant fonctionnel des fonctions F_1, \dots, F_μ n'est pas nul. En faisant successivement $h = 1, 2, \dots, n$, et en imaginant qu'on substitue les valeurs obtenues dans les équations de condition, on voit que ces conditions expriment que les relations obtenues en différentiant les μ équations (2) par rapport à l'une quelconque des variables x_1, \dots, x_n , qui sont en nombre na , permettent de déterminer un système de valeurs unique pour les dérivées d'ordre $r + 1$ de la fonction inconnue.

Donc, pour que le système formé par les équations (2) soit complètement intégrable, il faut et il suffit que les na équations obtenues en différentiant ces équations par rapport à chacune des variables se réduisent à μ' équations distinctes (μ' étant le nombre des dérivées d'ordre $r + 1$).

Ceci peut avoir lieu en tenant compte des équations (2) elles-mêmes, ou identiquement; dans ce dernier cas, les équations

$$F_1 = C_1, \quad F_2 = C_2, \quad \dots, \quad F_p = C_p,$$

forment elles-mêmes un système complètement intégrable, quelles que soient les valeurs des constantes C_i .

119. Considérons maintenant en particulier une fonction z de deux variables indépendantes x et y , et soit

$$p_{i,k} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k};$$

un élément d'ordre n (I, p. 181) est un système particulier de valeurs $(x, y, z, p_{10}, p_{01}, p_{20}, \dots, p_{0n})$ attribuées à x, y, z , et à toutes les quantités $p_{i,k}$ pour lesquelles la somme $i + k$ ne dépasse pas n . Deux éléments infiniment voisins d'ordre n

$$\begin{aligned} (x, y, z, \dots, p_{i,k}, \dots) \\ (x + dx, y + dy, z + dz, \dots, p_{i,k} + dp_{i,k}, \dots) \end{aligned}$$

sont dits *unis* lorsque l'on a

$$\begin{aligned} dz &= p_{10} dx + p_{01} dy, \\ dp_{i,k} &= p_{i+1,k} dx + p_{i,k+1} dy, \quad (i + k \leq n - 1). \end{aligned}$$

Il est clair qu'une surface quelconque détermine une double infinité d'éléments unis d'ordre n ; une courbe située sur cette surface détermine une infinité simple d'éléments unis d'ordre n ; nous appellerons une telle multiplicité une *orientation* d'éléments d'ordre n , et nous dirons que la courbe considérée sert de *support* à cette orientation d'éléments.

Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_p = 0,$$

où les dérivées d'ordre le plus élevé qui figurent sont celles d'ordre n , il est naturel, en adoptant les idées introduites par M. Lie pour les équations du premier ordre, d'appeler *intégrale* tout système doublement infini d'éléments unis d'ordre n , vérifiant ces équations. Cette définition s'applique à des intégrales qui ne représentent pas de surfaces, ni même des multiplicités doublement infinies d'éléments du premier

ordre. Ainsi soit

$$(5) \quad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

une équation du second ordre, et soit M , une multiplicité caractéristique du premier ordre (I, n° 27) représentée par les équations

$$(6) \quad y = f_1(x), \quad z = f_2(x), \quad p = \varphi_1(x), \quad q = \varphi_2(x).$$

Si on ajoute aux équations précédentes les relations

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$

on

$$\varphi'_1(x) = r + sf'_1(x), \quad \varphi'_2(x) = s + tf'_1(x),$$

on peut en tirer y, z, p, q, r, s, t , exprimées au moyen de deux variables indépendantes, x et t par exemple. On a donc ainsi une multiplicité doublement infinie d'éléments unis du second ordre; cette multiplicité est une *intégrale* de l'équation (5), au sens plus étendu du mot. En effet, la multiplicité M , étant une multiplicité caractéristique du premier ordre, si on tire des relations

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy$$

r et s en fonction de t , et qu'on substitue dans l'équation proposée (5), on est conduit nécessairement à une identité (I, n° 22).

Soit

$$(7) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

une équation du second ordre de forme quelconque. Quand on se propose de déterminer une intégrale de cette équation admettant une multiplicité simplement infinie M , d'éléments du premier ordre donnée, c'est-à-dire passant par une courbe C et ayant un plan tangent donné en chaque point de cette courbe, on a vu déjà que l'on pouvait, par des différentiations et des calculs algébriques, calculer de proche en proche les valeurs des dérivées secondes, des dérivées troisièmes, etc., de la fonction inconnue en tous les points de la courbe C (I, n° 16), sauf dans des cas exceptionnels, et en particulier dans le cas où la multiplicité M , appartient à une caractéristique. En d'autres termes, la connaissance d'une courbe C située sur une surface intégrale et du plan tangent en chaque point de cette courbe permet de déterminer l'orientation d'éléments d'ordre n de la surface intégrale tout le long de cette courbe, quel que soit le nombre entier n .

Nous dirons, pour abréger, qu'une orientation d'éléments d'ordre n ($n > 2$) appartient à l'équation (7), lorsque les coordonnées de tous les éléments de cette multiplicité satisfont à cette équation et à toutes celles qu'on en déduit par des différentiations successives. Toute orientation d'éléments d'ordre n , appartenant à l'équation (7), détermine une intégrale et une seule de cette équation, sauf lorsque cette orientation est une caractéristique.

120. Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier les systèmes formés par une équation du second ordre et une ou plusieurs équations d'ordre quelconque.

Considérons d'abord un système formé d'une équation du second ordre

$$(8) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

et d'une équation du premier ordre

$$(9) \quad q = f(x, y, z, p).$$

On déduit de l'équation (9), en différentiant successivement par rapport à x et par rapport à y ,

$$\begin{aligned} s &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r, \\ t &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} r + \frac{\partial f}{\partial p} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r \right\}, \end{aligned}$$

et, en portant ces valeurs de q, s, t dans l'équation du second ordre, il reste une relation entre x, y, z, p, r ,

$$(10) \quad \Phi(x, y, z, p, r) = 0.$$

Plusieurs cas peuvent se présenter : si la relation (10) se réduit à une identité, l'équation (8) est une conséquence de l'équation (9) et admet, par conséquent, toutes les intégrales de cette équation du premier ordre. Si la relation (10) contient r , on voit que q, r, s, t et, par suite, toutes les dérivées d'ordre supérieur au second s'expriment au moyen de x, y, z, p . La solution la plus générale du système formé par les équations (8) et (9) dépend donc au plus de deux constantes arbitraires, si toutes les conditions d'intégrabilité sont vérifiées; en supposant, par exemple, que l'intégrale soit holomorphe dans le voisinage d'un point (x_0, y_0) , elle est complètement déterminée, si on connaît les valeurs ini-

tiales $x = x_0$, $p = p_0$, pour $x = x_0$, $y = y_0$. Si la relation (10) ne contient pas r , mais contient p , on aura p et q exprimés au moyen de x , y , s ; l'intégrale commune ne dépend donc que d'une constante arbitraire, si la condition d'intégrabilité est vérifiée.

En résumé, lorsque l'équation du premier ordre (9) n'est pas une intégrale intermédiaire de l'équation du second ordre (8), l'intégrale générale de ce système d'équations dépend de deux constantes arbitraires au plus.

121. Prenons maintenant un système de deux équations du second ordre ⁽¹⁾ que nous supposerons résolues par rapport à deux des trois dérivées du second ordre r , s , t . Pour que cette résolution fût impossible, il faudrait, en effet, que l'on pût déduire des deux équations proposées une nouvelle équation ne renfermant plus de dérivées du second ordre, et on serait ramené au cas qui vient d'être examiné. On peut donc supposer les deux équations résolues par rapport à l'un des couples de dérivées (r, t) , (r, s) , (s, t) , et, comme le troisième cas se ramène au second en permutant x et y , on peut le négliger. Si les équations sont résolues par rapport à r et à s

$$r + f(x, y, z, p, q, t) = 0, \quad s + \varphi(x, y, z, p, q, t) = 0,$$

on peut admettre que φ ne contient pas t , car autrement la dernière équation donnerait t , et on serait ramené au premier cas. Lorsque φ ne contient pas t , en faisant le changement de variables

$$x = x', \quad y = x' + y',$$

les deux équations précédentes deviennent

$$\begin{aligned} r' - 2s' + t' + f(x', x' + y', z, p' - q', q', t') &= 0, \\ s' - t' + \varphi(x', x' + y', z, p' - q', q') &= 0, \end{aligned}$$

où

$$p' = \frac{\partial z}{\partial x'}, \quad q' = \frac{\partial z}{\partial y'}, \quad r' = \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}, \quad s' = \frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'}, \quad t' = \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2},$$

et peuvent être résolues par rapport à t' et r' . On peut donc toujours supposer, sans diminuer la généralité, que les deux équations du second

⁽¹⁾ BIANCHI, *Rendiconti dell' Accademia dei Lincei*, 4^e série, t. II, p. 212, 237, 307 (1906).
E. von WEIZEN, *Mathematische Annalen*, t. 57. BRUNN, *Thèse de Doctorat*.

ordre considérées sont résolues par rapport aux dérivées r et s

$$(11) \quad \begin{cases} r + f(x, y, z, p, q, s) = 0, \\ s + \varphi(x, y, z, p, q, s) = 0. \end{cases}$$

Nous nous proposons de rechercher les intégrales de ce système qui sont holomorphes dans le voisinage d'un point (x_0, y_0) , et qui sont telles que les fonctions f et φ soient elles-mêmes holomorphes dans le voisinage des valeurs correspondantes $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0)$. Les dérivées du troisième ordre de la fonction inconnue sont déterminées par les quatre équations

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha + \frac{\partial f}{\partial z} \beta + \left(\frac{df}{dx}\right) = 0, \\ \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \gamma + \left(\frac{df}{dy}\right) = 0, \\ \gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \beta + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0, \\ \delta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0, \end{cases}$$

où on a posé

$$\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3},$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} p - \frac{\partial}{\partial p} f + \frac{\partial}{\partial q} s,$$

$$\left(\frac{d}{dy}\right) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} q + \frac{\partial}{\partial p} s - \frac{\partial}{\partial q} \varphi.$$

Les deux équations intermédiaires (12) peuvent être résolues par rapport à β et γ , pourvu que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

ne soit pas nul; la première et la dernière des équations (12) donnent ensuite α et δ . Dans ce cas, toutes les dérivées successives de la fonction inconnue peuvent être calculées de proche en proche, dès qu'on connaît les valeurs de x, p, q, s . L'intégrale générale du système (11) dépend donc au plus de quatre constantes arbitraires, et il n'en est ainsi que si toutes les conditions d'intégrabilité sont vérifiées. Si

$1 - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial s} = 0$, on peut éliminer β et γ entre les équations (12), et on est conduit à la nouvelle relation

$$(13) \quad \left(\frac{df}{dy} \right) - \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{dz}{dx} \right) = 0,$$

qui est vérifiée par toute intégrale commune aux équations (11). Nous avons encore à distinguer plusieurs cas : 1° lorsque la relation (13) contient s , les équations (11) et (13) donnent r, s, t en fonction de x, y, z, p, q , et on peut, par conséquent, calculer toutes les dérivées de la fonction inconnue dès qu'on connaît s, p, q : l'intégrale générale du système (11) dépend au plus de 3 constantes arbitraires ; 2° si la relation (13) ne contient pas s , sans se réduire à une identité, elle constitue une équation du premier ordre, et on retombe sur le cas qui vient d'être examiné ; 3° il ne reste donc plus à étudier que le cas où l'on a à la fois identiquement

$$(14) \quad 1 - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \quad \left(\frac{df}{dy} \right) - \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{dz}{dx} \right) = 0.$$

Nous dirons alors, avec M. Sophus Lie, que les équations (11) forment un *système en involution*. Un système de cette espèce admet une infinité d'intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires.

123. Remarquons d'abord que les équations (12) se réduisent à trois équations distinctes seulement

$$(15) \quad A = z + \frac{\partial f}{\partial s} \beta + \left(\frac{df}{dx} \right) = 0, \quad B = \beta + \frac{\partial f}{\partial s} \gamma + \left(\frac{df}{dy} \right) = 0, \quad C = z + \frac{\partial f}{\partial s} \gamma + \left(\frac{dz}{dy} \right) = 0,$$

puisque la relation

$$B_1 = \gamma + \frac{\partial z}{\partial s} \beta + \left(\frac{dz}{dx} \right) = 0$$

est équivalente à l'équation $B = 0$; on peut donc choisir arbitrairement la valeur d'une des dérivées troisièmes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Il en est de même pour chaque ordre de dérivées. Les dérivées d'ordre $n + 3$ vérifient, en effet, les $3n + 3$ équations obtenues en différentiant les trois équations $A = 0, B = 0, C = 0$, n fois de suite par rapport à x et

intégration des équations.

à y ,

$$\begin{array}{lll} \frac{d^n A}{dx^n} = 0, & \frac{d^n A}{dx^{n-1} dy} = 0, & \dots, \quad \frac{d^n A}{dy^n} = 0, \\ \frac{d^n B}{dx^n} = 0, & \dots, & \dots, \quad \frac{d^n B}{dy^n} = 0, \\ \frac{d^n C}{dx^n} = 0, & \dots, & \dots, \quad \frac{d^n C}{dy^n} = 0, \end{array}$$

et celles-là seulement, car la différentiation de l'équation

$$B_1 = \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \beta + \left(\frac{d\gamma}{dx} \right) = 0$$

donne des relations comprises dans les précédentes. Or, d'après la dépendance qui existe entre A et B , les $2n + 2$ équations des deux premières lignes précédentes se réduisent à $n + 2$ équations distinctes. Pour la même raison les $2n + 2$ équations

$$\begin{array}{lll} \frac{d^n B_1}{dx^n} = 0, & \dots, & \frac{d^n B_1}{dy^n} = 0, \\ \frac{d^n C}{dx^n} = 0, & \dots, & \frac{d^n C}{dy^n} = 0, \end{array}$$

se réduisent à $n + 2$ équations seulement, et comme le système

$$\frac{d^n B_1}{dx^n} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^n B_1}{dy^n} = 0,$$

est équivalent au système

$$\frac{d^n B}{dx^n} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^n B}{dy^n} = 0,$$

en tenant compte des relations qui lient les dérivées précédentes, on voit donc qu'on n'a en tout que $n + 3$ équations distinctes entre les $n + 4$ dérivées d'ordre $n + 3$. Ainsi on aura quatre équations seulement entre les cinq dérivées du quatrième ordre, cinq équations entre les six dérivées du cinquième ordre, etc. On peut donc, dans chaque ordre, choisir arbitrairement la valeur d'une dérivée partielle, par exemple se donner les valeurs initiales de toutes les dérivées $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$, ou $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$. Ceci prouve qu'on peut former une infinité de séries entières, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires, qui satisfont *formellement* aux

équations (11). Il reste à démontrer que l'on peut choisir ces constantes arbitraires de façon à obtenir une série convergente.

Pour établir ce point, nous mettrons les équations (11) sous une forme un peu différente. D'après la relation $t - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial p}{\partial s} = 0$, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial s}$ ne peut être nulle, pour des valeurs de x, y, z, p, q, s , pour lesquelles les fonctions f et φ sont régulières. On peut donc supposer les équations (11) résolues par rapport aux dérivées s et t , et écrire ces équations

$$(16) \quad \begin{cases} s = F(x, y, z, p, q, r), \\ t = \Phi(x, y, z, p, q, r); \end{cases}$$

pour que ce système soit en involution, il faut que les quatre relations qui lient les dérivées du troisième ordre se réduisent à trois équations distinctes. On déduit des équations (16)

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} F + \frac{\partial F}{\partial r} z, \\ \gamma &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} F + \frac{\partial F}{\partial q} \Phi + \frac{\partial F}{\partial r} \beta, \\ \gamma &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p + \frac{\partial \Phi}{\partial p} r + \frac{\partial \Phi}{\partial q} F + \frac{\partial \Phi}{\partial r} z, \\ \delta &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q + \frac{\partial \Phi}{\partial p} F + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \beta; \end{aligned}$$

si on tire les valeurs de β et de γ de la première et de la troisième équation et qu'on les porte dans la seconde, on devra être conduit à une identité. Il faut pour cela que l'on ait

$$(17) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2,$$

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p + \frac{\partial \Phi}{\partial p} r + \frac{\partial \Phi}{\partial q} F &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} F + \frac{\partial F}{\partial q} \Phi \\ &+ \frac{\partial F}{\partial r} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} F \right\}. \end{aligned}$$

Si ces conditions sont vérifiées *identiquement*, on a le théorème suivant : soient $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0$, un système de valeurs des variables x, y, z, p, q, r , dans le voisinage desquelles les fonctions F et Φ sont holomorphes ; soit, de plus, $\Pi(x)$ une fonction holomorphe dans le voisinage du point x_0 , telle que l'on ait $\Pi(x_0) = z_0, \Pi'(x_0) = p_0, \Pi''(x_0) = r_0$. Il existe

une intégrale des équations (16), régulière dans le voisinage des valeurs x_0, y_0 , se réduisant à $\Pi(x)$ pour $y = y_0$, et pour laquelle la dérivée $\frac{\partial z}{\partial y}$ prend la valeur q_0 pour $x = x_0, y = y_0$.

Les conditions précédentes reviennent à se donner les valeurs initiales

$$x_0, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0, \dots, \left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)_0, \dots$$

pour $x = x_0, y = y_0$. Les équations (16) et celles qu'on en déduit par les différentiations successives permettent de calculer de proche en proche les valeurs initiales de toutes les autres dérivées. Le système (16) étant en involution, on a, en effet, pour calculer les n dérivées inconnues d'ordre n , un certain nombre d'équations linéaires, qui se réduisent à n équations distinctes. On peut, par exemple, procéder comme il suit : en différentiant l'équation

$$s = F(x, y, z, p, q, r)$$

un nombre quelconque de fois par rapport à x , on calcule de proche en proche les valeurs initiales

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right)_0, \dots, \left(\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}\right)_0, \dots$$

Connaissant les valeurs initiales

$$\begin{array}{ccccccc} x_0, \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0, & \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0, & \dots, & \left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)_0, & \dots, \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0, & \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_0, & \dots, & \left(\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}\right)_0, & \dots, \end{array}$$

l'équation

$$t = \Phi(x, y, z, p, q, r),$$

et celles qu'on en déduit par des différentiations successives permettront ensuite de calculer de proche en proche les valeurs initiales de toutes les autres dérivées, absolument comme dans le théorème classique de Cauchy.

Pour établir la convergence du développement ainsi obtenu, nous décomposerons la démonstration en deux parties. Démontrons d'abord

que la série

$$(19) \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_0 + \frac{x - x_0}{1} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} \right)_0 + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left(\frac{\partial^{n+1} x}{\partial x^n \partial y} \right)_0 + \dots$$

est convergente pour des valeurs de $x - x_0$ de module suffisamment petit. En effet, d'après un théorème établi antérieurement (I, n° 84) l'équation

$$s = F(x, y, z, p, q, r)$$

admet une infinité d'intégrales holomorphes dans le voisinage du point (x_0, y_0) , se réduisant à $\Pi(x)$ pour $y = y_0$, et telles que l'on ait $\frac{\partial x}{\partial y} = q_0$ pour $x = x_0, y = y_0$; car ces conditions reviennent à se donner une courbe C

$$y = y_0, \quad z = \Pi(x),$$

située sur la surface intégrale et le plan tangent en un point (x_0, y_0, z_0) de cette courbe. La tangente à la courbe C en ce point coïncide avec la tangente à l'une des caractéristiques, car l'équation qui détermine les tangentes aux deux caractéristiques est ici

$$\frac{\partial F}{\partial r} dy^2 + dx dy = 0.$$

Soit $z = \psi(x, y)$ une de ces intégrales; pour $y = y_0$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ se réduit à une fonction de x , holomorphe dans le domaine du point $x = x_0$, qui est précisément représentée par la série (19). La première partie de la proposition est donc démontrée. Nous remarquerons en passant que toutes les intégrales de l'équation $s - F = 0$, satisfaisant aux conditions initiales, sont tangentes le long de la courbe C, qui est une caractéristique pour chacune d'elles.

Cela posé, soit $\chi(x)$ la somme de la série (19); les calculs qu'il faut effectuer pour obtenir les autres coefficients du développement de la fonction inconnue sont identiques à ceux qui donneraient les coefficients du développement en série entière d'une fonction régulière pour $x = x_0, y = y_0$, satisfaisant à l'équation

$$t = \Phi(x, y, z, p, q, r),$$

se réduisant à $\Pi(x)$ pour $y = y_0$, tandis que $\frac{\partial z}{\partial y}$ se réduit à $\chi(x)$. On sait,

d'après le théorème général de Cauchy rappelé plus haut, que le développement ainsi obtenu est convergent. La proposition énoncée est donc complètement établie.

REMARQUE. — Les conditions imposées à l'intégrale reviennent à se donner une courbe plane, dont le plan est parallèle au plan des yx , située sur cette surface, et le plan tangent en un point de cette courbe. Plus généralement, une intégrale du système (16) est complètement déterminée, en général, si on se donne une courbe, plane ou gauche, située sur cette surface et le plan tangent en un point de cette courbe. Nous verrons un peu plus loin comment on peut obtenir cette intégrale.

128. L'intégration d'un système en involution se ramène à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires par une méthode qui n'est que la généralisation de la méthode de Cauchy, pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Pour plus de symétrie dans les calculs, nous supposons d'abord qu'on a mis le système en involution sous la forme (11), les relations (14) étant vérifiées identiquement.

L'équation de condition

$$1 - \frac{\mathcal{J}}{\partial s} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial s} = 0$$

exprime que les deux équations du second degré

$$dy^2 - \frac{\mathcal{J}}{\partial s} dx dy = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial s} dx dy - dx^2 = 0,$$

ont une racine commune

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathcal{J}}{\partial s} = \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial s}}.$$

Par conséquent, si l'on considère une intégrale de l'équation $r + f = 0$, et une intégrale de l'équation $t + \varphi = 0$, ayant un élément commun du second ordre, les deux surfaces ont en cet élément une direction de caractéristique commune. Toute intégrale du système (11) est donc un lieu de caractéristiques communes aux deux équations $r + f = 0$, $t + \varphi = 0$. Ce sont ces caractéristiques que nous allons d'abord déterminer.

Soit $x = F(x, y)$ une intégrale du système en involution; sur cette surface (S) considérons une famille de courbes définies par l'équation

du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial s},$$

où on suppose x, p, q, s , remplacés par leurs valeurs en fonction des variables x, y , déduites de l'équation de la surface. Le long d'une de ces courbes x, y, x, p, q, s , sont des fonctions d'une seule variable indépendante, satisfaisant à un système d'équations différentielles ordinaires, que l'on peut former sans connaître l'intégrale $F(x, y)$. On a, en effet, le long d'une de ces courbes,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{dz}{dx} &= p + q \frac{dy}{dx}, & \frac{dp}{dx} &= r + s \frac{dy}{dx}, \\ \frac{dq}{dx} &= s + t \frac{dy}{dx}, & \frac{ds}{dx} &= \beta + \gamma \frac{\partial f}{\partial s}, \end{aligned}$$

ou, en tenant compte des équations (11) et (12),

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{dz}{dx} = p + q \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{dp}{dx} = -r + s \frac{\partial f}{\partial s}, \\ \frac{dq}{dx} = s - q \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{ds}{dx} = -\left(\frac{df}{dy}\right). \end{cases}$$

Les équations différentielles (20), jointes aux équations (11) elles-mêmes, définissent une famille de multiplicités à une dimension d'éléments du second ordre, dépendant de cinq constantes arbitraires; nous appellerons ces multiplicités les *caractéristiques* du système en involution. Toute caractéristique renferme, sauf des cas exceptionnels, une multiplicité ponctuelle à une dimension qui sera appelée *courbe caractéristique* du système. Une caractéristique est définie, en général, quand on se donne un élément initial du second ordre $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0)$ satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned} r_0 + f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0) &= 0, \\ t_0 + \varphi(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0) &= 0, \end{aligned}$$

pourvu que les fonctions f et φ restent holomorphes dans le voisinage.

On en conclut que, si deux intégrales du système en involution ont un élément commun du second ordre, elles ont en commun une infinité d'éléments du second ordre, qui constituent la caractéristique issue de cet élément. De tout élément du premier ordre $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, il part une infinité de caractéristiques, car on peut choisir arbitrairement la valeur

il suffira que l'on ait aussi

$$(24) \quad \begin{cases} U_1 = \frac{\partial z}{\partial x} - p \frac{\partial x}{\partial x} - q \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \\ U_2 = \frac{\partial p}{\partial x} + r \frac{\partial x}{\partial x} - s \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \\ U_3 = \frac{\partial q}{\partial x} - s \frac{\partial x}{\partial x} + r \frac{\partial y}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Calculons $\frac{\partial U_1}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial U_2}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial U_3}{\partial \lambda}$: il vient, en tenant compte des relations (14) et (21),

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \lambda} - p \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial \lambda} - q \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \lambda} - \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \lambda} + r \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial \lambda} - s \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \lambda} - \frac{\partial s}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial x} + K \left(\frac{df}{dx} \right) \frac{\partial x}{\partial x}, \\ \frac{\partial U_3}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial \lambda} - s \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial \lambda} + r \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \lambda} - \frac{\partial r}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial x} + K \left(\frac{dq}{dy} \right) \frac{\partial y}{\partial x}; \end{cases}$$

d'autre part, en différentiant les équations (23) par rapport à α , il vient :

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \lambda} = p \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial \lambda} + q \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \lambda} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \lambda} = s \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \lambda} - r \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial \lambda} + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \quad - K \left(\frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{df}{dy} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{df}{dq} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{df}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial \lambda} = s \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial \lambda} - r \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \lambda} + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \quad - K \left(\frac{dq}{dx} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{dq}{dy} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{dq}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{dq}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{dq}{dq} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{dq}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Retranchons membre à membre les équations correspondantes (25) et (26), et remplaçons les dérivées relatives à λ de x , y , z , p , q , s , par leurs valeurs; il reste, toutes réductions faites,

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial \lambda} = KU_2 + K \frac{\partial}{\partial s} U_3, \\ \frac{\partial U_2}{\partial \lambda} = -K \frac{\partial}{\partial z} U_1 - K \frac{\partial}{\partial p} U_2 - K \frac{\partial}{\partial q} U_3, \\ \frac{\partial U_3}{\partial \lambda} = -K \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial z} U_1 + \frac{\partial}{\partial p} U_2 + \frac{\partial}{\partial q} U_3 \right). \end{cases}$$

Supposons f et φ holomorphes dans le voisinage des valeurs initiales $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0$; alors, d'après la forme linéaire des équations (27), pour que U_1, U_2, U_3 soient nuls, il suffira qu'ils soient nuls pour la valeur $\lambda = 0$; or, x, y, z, p, q, s se réduisent alors à $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0$.

Donc, pour obtenir une intégrale du système en involution, il suffit de remplacer dans les formules (22) $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0$ par des fonctions d'un paramètre variable α , satisfaisant aux relations

$$(28) \quad \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} = p_0 \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} + q_0 \frac{\partial y_0}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial p_0}{\partial \alpha} = -f_0 \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} + s_0 \frac{\partial y_0}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial q_0}{\partial \alpha} = s_0 \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} - \varphi_0 \frac{\partial y_0}{\partial \alpha}.$$

En particulier, on satisfait à ces relations en prenant pour x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 des constantes quelconques, et en posant $s_0 = \alpha$. Par suite, la surface engendrée par les caractéristiques issues d'un élément quelconque du premier ordre est une surface intégrale.

REMARQUE. — Les raisonnements qui précèdent ne s'appliquent qu'aux intégrales qui admettent des éléments du second ordre (x, y, z, p, q, r, s, t) dans le voisinage desquels les fonctions f et φ sont holomorphes; la méthode suivie donnera certainement toutes ces intégrales. Mais il peut se faire qu'il existe aussi des intégrales, telles que, dans le voisinage d'un quelconque de leurs éléments, les fonctions f et φ , ou du moins l'une d'elles, cessent d'être régulières. Par exemple, si on a un système de deux équations du second ordre, non résolues,

$$\begin{aligned} F(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0, \\ \Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0, \end{aligned}$$

il peut se faire que ces équations admettent des intégrales qui vérifient en même temps les trois relations :

$$\frac{D(F, \Phi)}{D(r, s)} = 0, \quad \frac{D(F, \Phi)}{D(r, t)} = 0, \quad \frac{D(F, \Phi)}{D(s, t)} = 0.$$

Il est clair que ces intégrales échappent à la méthode générale et qu'une étude spéciale est nécessaire, dans chaque cas particulier, pour reconnaître s'il en existe; nous les appellerons des *intégrales singulières* du système.

125. Quand on connaît les caractéristiques d'un système en involution, la détermination des intégrales est donc ramenée à trouver la solution générale du système (28), où $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0$ sont des fonctions de la variable α . On peut se donner arbitrairement trois de ces fonctions, et les trois autres sont déterminées par les équations (28).

Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir une surface intégrale passant par une courbe donnée (Γ) ; on peut considérer x_0, y_0, z_0 , comme des fonctions connues d'un paramètre α , et on a, pour déterminer p_0, q_0, s_0 , les trois équations (28). On tirera, si on veut, p_0 de la première, s_0 de la dernière, et, en portant dans la seconde, on est conduit à une équation différentielle du premier ordre pour déterminer q_0 ; la fonction inconnue q_0 de α dépend encore d'une constante arbitraire, la valeur de q_0 en un point de (Γ) . Ainsi, *par une courbe arbitraire (Γ) il passe, en général, une infinité de surfaces intégrales, dépendant d'une constante arbitraire; on peut se donner arbitrairement le plan tangent en un point de la courbe (Γ) .*

Soit encore à déterminer une surface intégrale du système en involution circonscrite tout le long d'une courbe à une surface (Σ) . Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point de cette surface, p_0, q_0 les coefficients angulaires du plan tangent; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 sont des fonctions de deux paramètres variables α et β . En substituant dans les équations de condition (28) les expressions de x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 en fonction de α, β , la première condition est identiquement vérifiée, et, en éliminant s_0 entre les deux dernières, on est conduit à une relation de la forme

$$\Phi\left(\alpha, \beta, \frac{d\beta}{d\alpha}\right) = 0.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, et les conclusions sont analogues à celles de tout à l'heure. *Il existe une infinité de surfaces intégrales, dépendant d'une constante arbitraire, circonscrites à une surface donnée (Σ) ; on peut choisir arbitrairement un des points de la courbe de contact.*

126. Nous allons appliquer la méthode générale à quelques exemples.

EXEMPLE I. — Soit à intégrer le système en involution

$$r + s = 0, \quad t + s = 0.$$

Les équations différentielles des caractéristiques sont ici

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{dz}{dx} = p + q, \quad \frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{dq}{dx} = 0, \quad \frac{ds}{dx} = 0,$$

et l'intégrale générale est représentée par les formules

$$p = p_0, \quad q = q_0, \quad s = s_0, \quad y = y_0 + x - x_0, \quad z = z_0 + (p_0 + q_0)(x - x_0).$$

Pour avoir une intégrale du système en involution, les valeurs initiales $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0$ doivent satisfaire aux équations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_0 \frac{\partial x_0}{\partial x} + q_0 \frac{\partial y_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = s_0 \left(\frac{\partial y_0}{\partial x} - \frac{\partial x_0}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial q}{\partial x} = s_0 \left(\frac{\partial x_0}{\partial x} - \frac{\partial y_0}{\partial x} \right);$$

supposons, par exemple, que, pour $x = C$, l'intégrale cherchée doive se réduire à $\varphi(y)$. On prendra $x_0 = C, y_0 = a, z_0 = \varphi(a)$; les formules précédentes donnent

$$q_0 = \varphi'(a), \quad s_0 = -\varphi''(a) \quad p_0 = -\varphi'(a) + C',$$

C' étant une nouvelle constante. L'intégrale correspondante est représentée par le système des deux équations

$$y = a + x - C, \quad z = \varphi(a) + C'(x - C);$$

l'élimination de a nous donne, pour l'intégrale générale du système en involution proposé, en changeant un peu les notations,

$$z = \psi(y - x) + C'x,$$

C' étant une constante arbitraire et ψ une fonction arbitraire. On peut remarquer que le système en involution proposé est équivalent à l'équation du premier ordre

$$p + q = a,$$

avec une constante arbitraire a .

EXEMPLE II. — Soit à intégrer le système en involution

$$r + \frac{s^2}{3} = 0, \quad t - \frac{1}{s} = 0;$$

les équations différentielles des caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = s^2, \quad \frac{dz}{dx} = p + qs^2, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{2s^2}{3}, \quad \frac{dq}{dx} = 2s, \quad \frac{ds}{dx} = 0,$$

et l'intégrale générale est

$$s = s_0, \quad y = y_0 + s_0^2(x - x_0), \quad q = q_0 + 2s_0(x - x_0), \quad p = p_0 + \frac{2s_0^2}{3}(x - x_0),$$

$$z = z_0 + (p_0 + q_0s_0^2)(x - x_0) + \frac{4}{3}s_0^2(x - x_0)^2.$$

Les valeurs initiales $x_0, y_0, x_0, p_0, q_0, s_0$, doivent satisfaire aux relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial x} &= p_0 \frac{\partial x_0}{\partial x} + q_0 \frac{\partial y_0}{\partial x}, & \frac{\partial p_0}{\partial x} &= -\frac{s_0^2}{3} \frac{\partial x_0}{\partial x} + s_0 \frac{\partial y_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial q_0}{\partial x} &= s_0 \frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{1}{s_0} \frac{\partial y_0}{\partial x}. \end{aligned}$$

Prenons, comme tout à l'heure, $x_0 = C, y_0 = a, x_0 = \psi(a)$, on en déduit

$$q_0 = \psi'(a), \quad s_0 = \frac{1}{\psi''(a)}, \quad p_0 = \int \frac{dx}{\psi''(x)}$$

et l'intégrale générale du système en involution est représentée par le système des deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} y &= a + \frac{x - C}{\{\psi''(a)\}^2}, \\ s &= \psi(x) + \left\{ \frac{\psi'(x)}{[\psi''(a)]^2} + \int \frac{dx}{\psi''(x)} \right\} (x - C) + \frac{1}{3} \left\{ \frac{(x - C)^2}{\{\psi''(a)\}^2} \right\}, \end{aligned} \right.$$

$\psi(a)$ étant une fonction arbitraire et C une constante arbitraire.

Comme vérification, on déduit des formules précédentes

$$\begin{aligned} p &= \int \frac{dx}{\psi''(x)} + \frac{2(x - C)}{3 \{\psi''(a)\}^2}, & q &= \psi'(a) + \frac{2(x - C)}{\psi''(a)}, \\ r &= -\frac{1}{3 \{\psi''(a)\}^2}, & s &= \frac{1}{\psi''(x)}, & t &= \psi''(a). \end{aligned}$$

Exemple III. — Les équations

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} r + \lambda (s + 1 + p^2 + q^2) &= 0, \\ t + \frac{1}{\lambda} [s - (1 + p^2 + q^2)] &= 0, \end{aligned} \right.$$

où λ est défini par l'équation du second degré

$$1 + \lambda^2 + (p + q\lambda)^2 = 0,$$

forment un système en involution. Ce système peut encore s'écrire

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} + 1 = 0, \quad r + 2\lambda s + \lambda^2 t = 0;$$

la première équation est celle des surfaces à courbure totale constante égale à -1 , la seconde définit (il est aisé de le vérifier) les surfaces réglées imaginaires dont les génératrices rencontrent le cercle à l'infini. L'intégrale générale du système (28) se compose donc des surfaces réglées imaginaires à courbure totale constante, qui ont été découvertes par Serret ⁽¹⁾ et qui résultent de la déformation de la sphère considérée comme une surface réglée.

Les équations différentielles des caractéristiques du système (29) sont, en négligeant la dernière qu'il est inutile d'écrire,

$$\frac{dy}{dx} = \lambda, \quad \frac{dz}{dx} = p + q\lambda, \quad \frac{dp}{dx} = -\lambda(1 + p^2 + q^2), \quad \frac{dq}{dx} = 1 + p^2 + q^2;$$

En tenant compte de l'équation qui définit λ , on voit facilement que l'intégrale générale est donnée par les équations

$$y = y_0 + \lambda_0(x - x_0), \quad z = z_0 + i\sqrt{1 + \lambda_0^2}(x - x_0), \\ p + qi_0 = i\sqrt{1 + \lambda_0^2}, \quad \frac{1}{q\sqrt{1 + \lambda_0^2} - i\lambda_0} + x\sqrt{1 + \lambda_0^2} = C,$$

$x_0, y_0, z_0, \lambda_0, C$ étant des constantes. On vérifie bien, sur ces formules, que les caractéristiques sont des droites rencontrant le cercle de l'infini. Il serait facile d'achever l'intégration; nous y reviendrons plus loin (n° 128).

EXEMPLE IV. — Le système

$$(30) \quad r + \lambda s = 0, \quad t + \frac{s}{\lambda} = 0,$$

où λ est une fonction de x, y, z, p, q , est en involution, pourvu que l'on ait

$$\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} + (p + \lambda q) \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0,$$

ce qui exige que λ vérifie une relation de la forme

$$(31) \quad F(\lambda, p, q, y - \lambda x, z - px - qy) = 0,$$

la fonction F étant d'ailleurs tout à fait arbitraire. On peut donner des systèmes en involution de la forme précédente une interprétation géo-

(1) *Journal de Liouville*, tome XIII, 1^{re} série, p. 361 (1848).

métrique. Remarquons d'abord que du système (30) on déduit

$$rt - s^2 = 0, \quad r + 2\lambda s + \lambda^2 t = 0.$$

Les surfaces intégrales sont donc des surfaces développables ; de plus, la génératrice issue de l'élément (x, y, z, p, q) se projette sur le plan des xy , suivant une droite de coefficient angulaire λ . Le problème de l'intégration du système (30) peut donc s'énoncer ainsi : *A chaque élément du premier ordre (x, y, z, p, q) de l'espace, on fait correspondre une droite D issue du point (x, y, z) et située dans le plan de coefficients angulaires p, q ; trouver les surfaces développables telles qu'en chacun de leurs éléments la génératrice soit la droite D correspondante.*

Mais la relation entre la droite D et l'élément (x, y, z, p, q) ne peut pas être quelconque, puisque λ doit satisfaire à une relation de la forme (31). Pour interpréter cette condition, considérons tous les éléments d'un même plan P ayant pour équation

$$Z = aX + bY + c,$$

et cherchons les droites D correspondantes, qui sont évidemment situées dans ce plan P.

Dans la relation (31), on doit faire $p = a, q = b, z - px - qy = c$, et cette relation devient

$$(31bis) \quad F(\lambda, a, b, y - \lambda x, c) = 0.$$

Or, la droite D issue de l'élément (x, y, z, p, q) se projette sur le plan des xy suivant une droite d qui a pour équation

$$Y = \lambda X + y - \lambda x,$$

et la relation (31 bis) exprime précisément que ces droites d et, par suite, les droites D, ne dépendent que d'un paramètre quand le point (x, y, z) décrit le plan P. Par suite, les droites D du plan P ont une enveloppe ; si une droite située dans ce plan est la droite D correspondante à un élément de ce plan, elle correspond à tous les éléments de ce plan que l'on obtient en prenant un point quelconque de cette droite. La détermination des surfaces intégrales du système en involution (30) conduit, par conséquent, à ce problème de géométrie : *A chaque plan P de l'espace on fait correspondre, d'une façon tout à fait arbitraire, une courbe C située dans ce plan ; trouver les surfaces développables telles que la génératrice de contact d'un plan tangent quelconque P à cette surface soit tangente à la courbe C correspondante du plan P.*

Voici encore un énoncé équivalent à celui qui précède.

Soit (Λ) un système géométrique formé de l'ensemble d'une droite et d'un plan passant par cette droite ; un pareil système dépend de cinq paramètres que l'on peut appeler ses coordonnées. Toute surface développable se compose d'une suite simplement infinie de (Λ) , chaque génératrice et le plan tangent correspondant formant un de ces systèmes. Cela posé, le problème peut encore s'énoncer ainsi : *Trouver les surfaces développables, composées de systèmes (Λ) dont les cinq coordonnées vérifient une relation donnée, de forme arbitraire.*

Par une courbe donnée de l'espace, il passe, en général, une infinité de pareilles surfaces, dont la détermination dépend d'une équation différentielle du premier ordre. Mais il est possible d'obtenir pour l'intégrale générale du système en involution des formules contenant explicitement une fonction arbitraire et ses dérivées. Imaginons, en effet, qu'on effectue une transformation par polaires réciproques ; à un plan P correspond un point M et à une courbe C du plan P un cône (T) ayant son sommet en M . Les surfaces développables qu'il s'agit de déterminer deviennent de même des courbes tangentes en chacun de leurs points à une génératrice du cône (T) ayant son sommet en ce point. Ces courbes sont les courbes intégrales d'une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre qu'il suffira d'intégrer pour avoir leurs équations sans aucun signe de quadrature.

L'application de la méthode générale conduit au même résultat. Les équations différentielles des caractéristiques du système (30) sont

$$\frac{dy}{dx} = \lambda, \quad \frac{dz}{dx} = p + q\lambda, \quad \frac{dp}{dx} = r + s \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dq}{dx} = s + t \frac{dy}{dx} = 0;$$

il est inutile d'écrire l'équation qui donne s , car elle n'intervient pas dans les calculs. On tire tout de suite des équations précédentes $p = p_0$, $q = q_0$; on a ensuite

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y} dy + \frac{\partial \lambda}{\partial z} dz = dx \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y} + (p + q\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right),$$

c'est-à-dire, d'après la relation à laquelle satisfait λ , $d\lambda = 0$. On a donc ainsi

$$\lambda = \lambda_0, \quad y = y_0 + (x - x_0) \lambda_0, \quad z = z_0 + (p_0 + q_0 \lambda_0) (x - x_0),$$

les valeurs initiales $p_0, q_0, x_0, y_0, z_0, \lambda_0$ vérifiant la relation

$$(32) \quad F(\lambda_0, p_0, q_0, y_0 - \lambda_0 x_0, z_0 - p_0 x_0 - q_0 y_0) = 0.$$

D'après la méthode générale, il faut prendre pour ces valeurs initiales des fonctions d'un paramètre variable α , satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} dx_0 - p_0 dx_0 - q_0 dy_0 &= 0, \\ dp_0 + \lambda_0 s_0 dx_0 - s_0 dy_0 &= 0, \\ dq_0 - s_0 dx_0 + \frac{s_0}{\lambda_0} dy_0 &= 0, \end{aligned}$$

ou, en éliminant s_0 entre les deux dernières,

$$\begin{aligned} dx_0 - p_0 dx_0 - q_0 dy_0 &= 0, \\ dp_0 + \lambda_0 dq_0 &= 0. \end{aligned}$$

Soit $u_0 = x_0 - p_0 x_0 - q_0 y_0$; les relations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} du_0 + x_0 dp_0 + y_0 dq_0 &= 0, \\ dp_0 + \lambda_0 dq_0 &= 0; \end{aligned}$$

on en tire

$$\lambda_0 = -\frac{dp_0}{dq_0}, \quad y_0 - \lambda_0 x_0 = \frac{x_0 dp_0 + y_0 dq_0}{dq_0} = -\frac{du_0}{dq_0};$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation (32), on a, pour déterminer les fonctions p_0, q_0, u_0 , la relation

$$(32 \text{ bis}) \quad F\left(-\frac{dp_0}{dq_0}, p_0, q_0, -\frac{du_0}{dq_0}, u_0\right) = 0;$$

connaissant u_0, p_0, q_0 , on a ensuite, pour déterminer x_0 et y_0 , l'équation unique

$$du_0 + x_0 dp_0 + y_0 dq_0 = 0,$$

où l'on peut choisir arbitrairement l'une des fonctions x_0, y_0 . Tout se ramène donc à l'intégration de l'équation (32 bis), c'est-à-dire, dans le cas général, à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Il serait facile de multiplier les cas particuliers; par exemple, si les droites D appartiennent à un complexe, le problème revient à déterminer les surfaces développables dont les génératrices font partie d'un complexe. On obtient un cas encore plus particulier, en supposant que les droites D sont tangentes à une surface (Σ) . Les surfaces développables dont les génératrices sont tangentes à (Σ) sont, d'une part, les surfaces développables dont l'arête de rebroussement est située sur la

surface (Σ) .

surface (Σ) , d'autre part les surfaces développables circonscrites à (Σ) . On doit considérer les premières surfaces comme formant la solution générale, tandis que les secondes surfaces ne sont que des intégrales singulières. Par une courbe donnée, il passe, en effet, une infinité de surfaces développables ayant leur arête de rebroussement sur la surface (Σ) , tandis qu'il n'y en a qu'une qui soit circonscrite à (Σ) .

187. La théorie des systèmes en involution présente, comme on voit, la plus grande analogie avec la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. De même qu'à toute équation du premier ordre est attachée une famille de multiplicités caractéristiques du premier ordre, dépendant de trois paramètres, de même chaque système en involution possède une famille de caractéristiques du second ordre, dépendant de cinq paramètres. Chaque caractéristique du second ordre renferme une *courbe caractéristique* qui lui sert de support, et, en général, les courbes caractéristiques dépendent elles-mêmes de cinq paramètres. Il arrive cependant, pour des systèmes en involution d'une forme particulière, que ces courbes caractéristiques dépendent de moins de cinq paramètres. Prenons, en effet, les équations linéaires

$$(33) \quad \begin{cases} r + \lambda s + \mu = 0, \\ t + \frac{s}{\lambda} + v = 0, \end{cases}$$

où λ, μ, v sont des fonctions de x, y, z, p, q ; ce système est en involution, pourvu que λ, μ, v vérifient les relations

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda}{\partial z} - v \frac{\partial \lambda}{\partial q} + \frac{\partial \mu}{\partial p} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial q} \\ \quad + \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial x} + p \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial p} \right\} - \lambda \left\{ \frac{\partial v}{\partial q} - \lambda \frac{\partial v}{\partial p} \right\} = 0. \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} + q \frac{\partial \mu}{\partial z} - v \frac{\partial \mu}{\partial q} - \lambda \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial z} - \mu \frac{\partial v}{\partial p} \right\} = 0. \end{cases}$$

Ces conditions étant supposées vérifiées, les équations différentielles des caractéristiques du système (33) sont de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \lambda, \quad \frac{dz}{dx} = p + q\lambda, \quad \frac{dp}{dx} = -\mu, \quad \frac{dq}{dx} = -v\lambda, \\ \frac{ds}{dx} = -\left(\frac{d(\lambda s + \mu)}{dy}\right).$$

Les quatre premières de ces équations ne contiennent que x, y, z .

p, q ; soient

$$(35) \quad \begin{cases} y = f_1(x; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ z = f_2(x; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ p = f_3(x; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \\ q = f_4(x; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0), \end{cases}$$

les formules définissant l'intégrale générale du système formé par ces quatre équations. On a ensuite s par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre, qui introduit une nouvelle constante arbitraire s_0 . Les formules (35) représentent une famille de multiplicités caractéristiques du premier ordre, dépendant de quatre constantes y_0, z_0, p_0, q_0 (x_0 étant une constante numérique); chacune de ces caractéristiques est contenue dans une infinité de caractéristiques du second ordre, dépendant d'une constante arbitraire. L'ensemble des caractéristiques du second ordre, qui ont ainsi en commun une multiplicité du premier ordre, forme une intégrale au sens étendu du mot (n° 119). Pour avoir l'intégrale générale du système en involution, il est inutile de tenir compte de l'équation qui donne s . En effet, les valeurs initiales $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0$ doivent satisfaire aux trois relations

$$\begin{aligned} ds_0 &= p_0 dx_0 + q_0 dy_0, \\ dp_0 &= -(\lambda_0 s_0 + \mu_0) dx_0 + s_0 dy_0, \\ dq_0 &= s_0 dx_0 - \left(\frac{s_0}{\lambda_0} + v_0\right) dy_0, \end{aligned}$$

entre lesquelles on peut éliminer s_0 , et il reste les deux relations

$$\begin{aligned} dx_0 &= p_0 dx_0 + q_0 dy_0, \\ dp_0 + \lambda_0 dq_0 + \mu_0 dx_0 + \lambda_0 v_0 dy_0 &= 0, \end{aligned}$$

qui ne renferment plus que x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 .

On obtient des systèmes en involution de la forme (33), en différentiant par rapport à x et à y une équation du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = C,$$

où C désigne une constante arbitraire. On obtient ainsi le système

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} s = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} s + \frac{\partial F}{\partial q} t = 0, \end{cases}$$

qui est toujours en involution. Mais on n'a pas ainsi tous les systèmes en involution de la forme (33); pour qu'un pareil système puisse être ramené à la forme (36), il faut que les trois équations linéaires

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} - \mu \frac{\partial F}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} - \lambda v \frac{\partial F}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial q} - \lambda \frac{\partial F}{\partial p} &= 0,\end{aligned}$$

admettent une solution commune $F(x, y, z, p, q)$.

128. On voit, d'après cela, qu'on peut faire la théorie complète des systèmes linéaires en involution de la forme

$$\begin{aligned}r + \lambda s + \mu &= 0, \\ s + \lambda t + \lambda v &= 0,\end{aligned}$$

où λ, μ, v sont des fonctions de x, y, z, p, q sans introduire la valeur de s dans les équations des caractéristiques. Appelons *caractéristique* tout système simplement infini d'éléments du premier ordre vérifiant les équations différentielles

$$dy = \lambda dx, \quad dz = \mu dx + q dy, \quad dp = -\lambda ds, \quad dq = -\lambda v dx;$$

il résulte de ce qui précède que toute surface intégrale est un lieu de caractéristiques; et inversement, pour que les caractéristiques issues des éléments $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ forment une surface intégrale, il faut et il suffit que x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 soient des fonctions d'un paramètre variable α satisfaisant aux deux relations

$$\begin{aligned}dz_0 &= p_0 dx_0 + q_0 dy_0, \\ dp_0 + \lambda_0 dq_0 + \mu_0 dx_0 + \lambda_0 v_0 dy_0 &= 0.\end{aligned}$$

Ce résultat peut aussi s'établir directement par un calcul facile.

De tout élément du premier ordre, il part, en général, une caractéristique bien déterminée, à laquelle appartient cet élément. Par suite, si deux surfaces intégrales d'un système linéaire en involution ont un contact du premier ordre en un point, elles sont tangentes tout le long de la caractéristique issue de cet élément. On déduit de là une conséquence importante.

Supposons que l'on connaisse une intégrale du système en involution dépendant de trois paramètres a, b, c et ne vérifiant aucune équation du premier ordre indépendante de a, b, c ; soit (S) cette intégrale. On peut disposer des trois paramètres a, b, c de façon que la surface (S) soit tangente à une autre surface intégrale (Σ) en un point donné; les deux surfaces (S) et (Σ) sont donc tangentes tout le long de la caractéristique issue de l'élément commun. Toute surface intégrale (Σ) est, par conséquent, l'enveloppe d'une suite simplement infinie de surfaces (S).

D'après cela, l'intégrale (S), qui dépend de trois paramètres, joue le même rôle que l'intégrale complète d'une équation du premier ordre. Il y a cependant une différence essentielle entre les deux cas, qu'il est aisé de mettre en lumière. Soit

$$(37) \quad \Phi(x, y, z, a, b, c) = 0$$

l'équation générale des surfaces (S); quand on établit entre les trois paramètres a, b, c , deux relations de forme arbitraire

$$b = \varphi(a), \quad c = \psi(a),$$

les surfaces enveloppes, dont on obtient l'équation en éliminant a entre les relations

$$(38) \quad \begin{cases} \Phi[x, y, z, a, \varphi(a), \psi(a)] = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi(a)} \varphi'(a) + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi(a)} \psi'(a) = 0, \end{cases}$$

forment, on l'a vu, l'intégrale générale d'une équation du second ordre (I, n° 8). Pour que ces surfaces enveloppes soient des intégrales du système en involution proposé, il faut que les fonctions $\varphi(a)$ et $\psi(a)$ vérifient une relation de la forme

$$(39) \quad F[a, \varphi(a), \psi(a), \varphi'(a), \psi'(a)] = 0;$$

on obtiendra cette relation en exprimant que les caractéristiques définies par les équations (38), qui dépendent de cinq constantes $a, \varphi(a), \psi(a), \varphi'(a), \psi'(a)$, quand on n'établit aucune relation entre φ et ψ , sont identiques aux caractéristiques du système en involution, qui dépendent seulement de quatre constantes. On exprimera, par exemple, que ces multiplicités vérifient les équations différentielles des caractéristiques, ce qui n'exige que des différentiations et des calculs algébriques.

Étant donnée une relation de la forme (39), on sait qu'on peut exprimer $a, \varphi(a), \psi(a)$ au moyen d'un paramètre variable α , d'une fonction

arbitraire de z et de ses dérivées en nombre fini, sans aucun signe d'intégration. Par suite, on peut toujours exprimer l'intégrale générale d'un système linéaire en involution par des formules où figurent explicitement une fonction arbitraire et un nombre fini de ses dérivées. Il n'en est pas de même, en général, pour un système en involution de forme quelconque.

Reprenons, par exemple, le système en involution (29), qui est linéaire ; d'après la signification de ces équations, toute sphère de rayon $\sqrt{-1}$,

$$(40) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + 1 = 0,$$

est une intégrale. Par suite, l'intégrale générale peut être considérée comme l'enveloppe d'une sphère de rayon $\sqrt{-1}$ quand on établit entre les coordonnées du centre (a, b, c) une relation de forme convenable. Or, nous avons vu que les caractéristiques du système (29) étaient des lignes droites rencontrant le cercle imaginaire de l'infini. D'autre part, les caractéristiques de la sphère sont représentées par les deux équations (40) et (41)

$$(41) \quad (x - a) da + (y - b) db + (z - c) dc = 0;$$

pour que ces caractéristiques soient des lignes droites, il faut et il suffit que le plan (41) soit tangent au cône asymptote de la sphère ; c'est-à-dire que l'on ait

$$da^2 + db^2 + dc^2 = 0;$$

d'où l'on conclut que l'intégrale générale du système (29) s'obtient en prenant l'enveloppe d'une sphère de rayon $\sqrt{-1}$, dont le centre décrit une courbe minima.

Il peut aussi arriver que les courbes caractéristiques ne dépendent que de trois paramètres. Par exemple, pour le système $r + s = 0$, $t + s = 0$, les équations des caractéristiques sont

$$y = y_0 + x - x_0, \quad z = z_0 + (p_0 + q_0)(x - x_0), \quad p = p_0, \\ q = q_0, \quad s = s_0;$$

on voit que les courbes caractéristiques ne dépendent que des trois paramètres $y_0 - x_0$, $p_0 + q_0$, $z_0 - x_0(p_0 + q_0)$. Chaque courbe caractéristique est contenue dans une infinité de multiplicités caractéristiques du premier ordre, dépendant d'une constante arbitraire, et chaque

multiplicité caractéristique du premier ordre est renfermée à son tour dans une infinité de caractéristiques du second ordre dépendant d'une nouvelle constante arbitraire.

129. Revenons maintenant à la théorie des systèmes en involution de forme générale.

On sait le rôle important que jouent les *intégrales complètes* dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Étant donné un système en involution

$$(42) \quad r + f(x, y, z, p, q, s) = 0, \quad t + \varphi(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

nous appellerons de même *intégrale complète* de ce système toute intégrale dépendant de quatre paramètres

$$(43) \quad F(x, y, z, a_1, a_2, a_3, a_4) = 0,$$

de telle façon que l'élimination de a_1, a_2, a_3, a_4 entre la relation (43) et les suivantes

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2p \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} p^2 + \frac{\partial F}{\partial z} r = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial s} q + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial s} p + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} pq + \frac{\partial F}{\partial z} s = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial s} q + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} q^2 + \frac{\partial F}{\partial z} t = 0, \end{array} \right.$$

conduise aux équations (42), et à celles-là seulement. Étant donnée une intégrale quelconque du système (42), on peut, d'après cela, disposer des constantes a_1, a_2, a_3, a_4 de façon que l'intégrale complète ait avec l'intégrale donnée, en un point donné, un contact du second ordre. D'après une proposition établie plus haut, les deux surfaces ont alors un contact du second ordre tout le long d'une caractéristique. Toute surface intégrale est donc l'enveloppe d'une famille d'intégrales complètes, chaque intégrale complète ayant un contact du second ordre avec la surface enveloppe, le long d'une caractéristique. Cela s'applique aussi aux systèmes linéaires. Par exemple, l'intégrale générale du système $r + s = 0, t + s = 0$ se compose (n° 126) de surfaces cylindriques ayant

leurs génératrices parallèles au plan $y - z = 0$. On peut prendre pour intégrale complète les cylindres de révolution ayant leur axe parallèle au même plan. Il est clair que, le long d'une génératrice, on peut trouver une intégrale complète ayant un contact du second ordre avec la surface cylindrique.

Il existe cependant une différence essentielle entre une équation du premier ordre et un système en involution, pour la théorie des intégrales complètes. Tandis que toute famille de surfaces à deux paramètres

$$F(x, y, z, a_1, a_2) = 0$$

est une intégrale complète d'une équation du premier ordre, une famille de surfaces à quatre paramètres

$$F(x, y, z, a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$$

donne bien une intégrale complète d'un système de 2 équations du second ordre

$$f_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad f_2(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

mais ce système n'est pas, en général, en involution. Ainsi une sphère dépend de quatre paramètres; l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_4 = 0$$

est une intégrale complète du système

$$(43) \quad \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

Les équations qui déterminent les dérivées du troisième ordre ne forment un système indéterminé que si on a $1 + p^2 + q^2 = 0$; par suite, en dehors des intégrales de cette équation du premier ordre, le système (43) n'admet que des intégrales dépendant de quatre constantes arbitraires au plus, ce sont précisément les sphères. On voit, sur cet exemple, qu'un système de deux équations du second ordre peut admettre une infinité d'intégrales, dépendant d'une fonction arbitraire, sans être en involution. Il faut, en outre, que, par une courbe choisie arbitrairement, il passe une infinité d'intégrales, dépendant d'une constante arbitraire, pour que le système soit en involution.

La connaissance d'une intégrale complète $F(x, y, z, a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$ d'un système en involution non linéaire permet de déterminer les carac-

téristiques sans aucune intégration. En effet, toute surface intégrale étant l'enveloppe d'une suite simplement infinie d'intégrales complètes, les courbes caractéristiques font partie des courbes représentées par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, z, a_1, a_2, a_3, a_4) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_2} \frac{da_2}{da_1} + \frac{\partial F}{\partial a_3} \frac{da_3}{da_1} + \frac{\partial F}{\partial a_4} \frac{da_4}{da_1} = 0, \end{array} \right.$$

qui dépendent de sept paramètres $a_1, a_2, a_3, a_4, \frac{da_2}{da_1}, \frac{da_3}{da_1}, \frac{da_4}{da_1}$. En écrivant, comme plus haut, que les multiplicités d'éléments du second ordre correspondantes vérifient les équations différentielles des caractéristiques, on établit deux relations seulement entre ces sept paramètres

$$\Phi_1 \left(a_1, a_2, a_3, a_4, \frac{da_2}{da_1}, \frac{da_3}{da_1}, \frac{da_4}{da_1} \right) = 0, \quad \Phi_2 \left(a_1, \dots, \frac{da_4}{da_1} \right) = 0,$$

puisque les caractéristiques dépendent de cinq paramètres. Pour obtenir l'intégrale générale du système en involution, il faudrait obtenir les expressions les plus générales de quatre fonctions a_1, a_2, a_3, a_4 , d'une seule variable, vérifiant les deux relations précédentes.

On peut aussi étendre aux systèmes en involution la notion de courbes intégrales (1).

180. Comme conclusion de l'étude qui vient d'être faite, nous remarquerons qu'un système de deux équations du second ordre ne peut admettre d'intégrale dépendant d'une infinité de constantes arbitraires que dans deux cas : lorsque les équations forment un système en involution, ou lorsqu'elles admettent une intégrale intermédiaire commune du premier ordre. En effet, les équations étant mises sous la forme (11), si elles ne forment pas un système en involution, l'une au moins des expressions

$$1 - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \left(\frac{df}{dy} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{dg}{dx} \right)$$

ne sera pas identiquement nulle. Supposons, par exemple, que

(1) Bureau (Thèse de Doctorat). Pour plus de détails sur les systèmes en involution de deux équations du second ordre, on pourra consulter une note que j'ai publiée dans les *Comptes Rendus* (1^{er} juin 1896), et un mémoire plus développé dans le *Journal de l'École polytechnique* (1897).

$1 - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial g}{\partial s}$ ne soit pas nul identiquement. Les intégrales qui ne satisfont pas à l'équation

$$(46) \quad 1 - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial g}{\partial s} = 0$$

dépendent, nous l'avons vu, de quatre constantes arbitraires au plus (n° 121). Si donc il existe des intégrales communes aux deux équations proposées dépendant d'une infinité de constantes, ces intégrales doivent aussi satisfaire à la relation (46). Appelons $H(x, y, z, p, q, s)$ le premier membre de cette équation ; si les intégrales considérées ne vérifiaient pas l'équation $\frac{\partial H}{\partial s} = 0$, on pourrait tirer s de la relation (46), et on en concluerait que ces intégrales dépendent au plus de trois constantes arbitraires. Il faut donc que les intégrales communes, qui dépendent d'une infinité de constantes, satisfassent à la fois aux deux équations

$$H = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial s} = 0,$$

et par suite à l'équation du premier ordre $K = 0$, obtenue par l'élimination de s . Mais on a déjà remarqué (n° 120) qu'une équation du second ordre et une équation du premier ordre ne peuvent admettre d'intégrale commune dépendant d'une infinité de constantes que si l'équation du premier ordre est une intégrale intermédiaire de l'équation du second ordre.

Si $1 - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial g}{\partial s}$ est identiquement nul, toute intégrale commune aux équations (11) doit satisfaire aussi à l'équation

$$\left(\frac{df}{dy}\right) - \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{dg}{dx}\right) = 0,$$

sur laquelle on peut recommencer le raisonnement qui précède.

181. Étant données deux équations du second ordre non résolues

$$(47) \quad \begin{cases} F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \\ F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \end{cases}$$

nous dirons de même que ces deux équations forment un système en involution, si les quatre équations que l'on obtient en les différentiant par rapport à x et par rapport à y se réduisent à trois équations dis-

tinctes. Soit

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s} p + \frac{\partial}{\partial p} r + \frac{\partial}{\partial q} s, \\ \left(\frac{d}{dy}\right) &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s} q + \frac{\partial}{\partial p} s + \frac{\partial}{\partial q} t;\end{aligned}$$

on a, entre les quatre dérivées du troisième ordre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, les relations

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} \alpha + \frac{\partial F}{\partial s} \beta + \frac{\partial F}{\partial t} \gamma + \left(\frac{dF}{dx}\right) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial r} \beta + \frac{\partial F}{\partial s} \gamma + \frac{\partial F}{\partial t} \delta + \left(\frac{dF}{dy}\right) &= 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial r} \alpha + \frac{\partial F_1}{\partial s} \beta + \frac{\partial F_1}{\partial t} \gamma + \left(\frac{dF_1}{dx}\right) &= 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial r} \beta + \frac{\partial F_1}{\partial s} \gamma + \frac{\partial F_1}{\partial t} \delta + \left(\frac{dF_1}{dy}\right) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que ces quatre équations se réduisent à trois, il faut d'abord que le déterminant formé par les coefficients de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soit nul

$$(49) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial s} & \frac{\partial F_1}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial s} & \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{vmatrix} = 0;$$

c'est précisément la condition pour que les deux équations

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} m^2 - \frac{\partial F}{\partial s} m + \frac{\partial F}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial r} m^2 - \frac{\partial F_1}{\partial s} m + \frac{\partial F_1}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right.$$

aient une racine commune. Une première condition pour que les équations (47) forment un système en involution est donc la suivante; en chaque élément du second ordre commun aux deux équations, il doit y avoir une direction de caractéristique commune.

Soit m la racine commune aux équations (50), qui vérifie les deux

relations

$$\frac{m^2}{D(F, F_1)} = \frac{m}{D(F, F_1)} = \frac{1}{D(F, F_1)};$$

si on élimine α entre la première et la troisième des équations (48), puis δ entre la seconde et la quatrième, on est conduit à deux nouvelles égalités

$$(48 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial r} \left(\frac{dF}{dx} \right) - \frac{\partial F}{\partial r} \left(\frac{dF_1}{dx} \right) + \beta \frac{D(F, F_1)}{D(s, r)} + \gamma \frac{D(F, F_1)}{D(t, r)} = 0. \\ \frac{\partial F_1}{\partial t} \left(\frac{dF}{dy} \right) - \frac{\partial F}{\partial t} \left(\frac{dF_1}{dy} \right) + \beta \frac{D(F, F_1)}{D(r, t)} + \gamma \frac{D(F, F_1)}{D(s, t)} = 0. \end{array} \right.$$

En multipliant la première par m et ajoutant, il vient, en tenant compte de la valeur de m , une nouvelle équation de condition

$$(51) \quad m \left[\frac{\partial F_1}{\partial r} \left(\frac{dF}{dx} \right) - \frac{\partial F}{\partial r} \left(\frac{dF_1}{dx} \right) \right] + \frac{\partial F_1}{\partial t} \left(\frac{dF}{dy} \right) - \frac{\partial F}{\partial t} \left(\frac{dF_1}{dy} \right) = 0.$$

Les conditions (49) et (51) sont suffisantes pour que les quatre équations (48) se réduisent à trois, pourvu que le déterminant $\frac{D(F, F_1)}{D(r, t)}$ ne soit pas nul, ce que nous supposons. En effet, les équations (48 bis) peuvent remplacer deux des équations (48), et ces deux équations se réduisent à une seule. Pour que le système (47) soit en involution, il suffit que les conditions (49) et (51) soient vérifiées, en tenant compte des équations (47) elles-mêmes. Si ces conditions sont vérifiées identiquement, les équations $F = C, F_1 = C_1$ forment un système en involution, quelles que soient les valeurs des constantes C, C_1 .

On obtient les équations différentielles des caractéristiques d'un système en involution de forme générale de la même façon que pour un système en involution de la forme (11). Sur une intégrale commune aux deux équations (47), représentée par l'équation $z = \Phi(x, y)$, considérons une famille de courbes définie par l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = m,$$

où m désigne la racine commune aux deux équations (50); on suppose, bien entendu, que, dans m , on a remplacé x, p, q, r, s, t par leurs valeurs en fonction de x et de y , déduites de l'équation de la surface.

Le long de l'une de ces courbes, on a

$$\begin{aligned} dx &= p dx + q dy, & dp &= r dx + s dy, & dq &= s dx + t dy, \\ dr &= r dx + s dy, & ds &= \beta dx + \gamma dy, & dt &= \gamma dx + \delta dy; \end{aligned}$$

mais on tire des équations (48) :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta m &= \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{dF_1}{dx} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial t} \left(\frac{dF}{dx} \right)}{\frac{D(F, F_1)}{D(r, t)}}, \\ \beta + \gamma m &= \frac{\frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{dF_1}{dy} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial t} \left(\frac{dF}{dy} \right)}{\frac{D(F, F_1)}{D(r, t)}}, \\ \gamma + \delta m &= \frac{m \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial r} \left(\frac{dF}{dy} \right) - \frac{\partial F}{\partial r} \left(\frac{dF_1}{dy} \right) \right\}}{\frac{D(F, F_1)}{D(r, t)}}, \end{aligned}$$

de sorte que, le long d'une caractéristique, x, y, z, p, q, r, s, t satisfont aux équations différentielles

$$(52) \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{\frac{D(F, F_1)}{D(r, t)}} &= \frac{dy}{\frac{D(F, F_1)}{D(r, t)}} = \frac{dp}{\frac{D(F, F_1)}{D(r, t)} (r + sm)} = \frac{dq}{\frac{D(F, F_1)}{D(r, t)} (s + tm)} \\ &= \frac{dx}{\frac{D(F, F_1)}{D(r, t)} (p + qm)} = \frac{dr}{\frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{dF_1}{dx} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial x} \left(\frac{dF}{dx} \right)} \\ &= \frac{ds}{\frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{dF_1}{dy} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial y} \left(\frac{dF}{dy} \right)} = \frac{dt}{m \left[\frac{\partial F_1}{\partial r} \left(\frac{dF}{dy} \right) - \frac{\partial F}{\partial r} \left(\frac{dF_1}{dy} \right) \right]}. \end{aligned} \right.$$

Ces équations admettent, comme on devait s'y attendre, les deux combinaisons intégrables $dF = 0$, $dF_1 = 0$, de sorte qu'on peut les ramener à un système de cinq équations à six variables. On démontre, comme plus haut, que, pour avoir une intégrale du système en involution proposé, il suffit de prendre le lieu des caractéristiques issues d'une infinité d'éléments du second ordre $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0)$, dont les coordonnées sont des fonctions d'un paramètre variable α satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned} (F)_0 &= 0, & (F_1)_0 &= 0, & \frac{\partial z_0}{\partial x} - p_0 \frac{\partial x_0}{\partial x} - q_0 \frac{\partial y_0}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p_0}{\partial x} - r_0 \frac{\partial x_0}{\partial x} - s_0 \frac{\partial y_0}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial q_0}{\partial x} - s_0 \frac{\partial x_0}{\partial x} - t_0 \frac{\partial y_0}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

182. Après avoir étudié en détail les deux cas particuliers qui précèdent, nous allons considérer les systèmes formés d'une équation du second ordre et d'une équation d'ordre quelconque. On ne restreint pas la généralité en supposant que l'équation du second ordre proposée est résolue par rapport à la dérivée du second ordre r . Si, en effet, l'équation ne contient pas r , elle contiendra l'une au moins des dérivées s et t ; si elle renferme t , il suffit de permuter x et y pour être ramené au cas précédent. Si l'équation ne renferme ni r ni t , elle est de la forme $s + f(x, y, z, p, q) = 0$, et il suffit de prendre pour variables indépendantes $u = x + y$ et $v = x - y$ pour avoir une équation résolue par rapport à $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$.

Nous pouvons donc toujours prendre l'équation du second ordre sous la forme

$$(53) \quad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0,$$

ou, en posant

$$p_{i,k} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k},$$

$$p_{1,0} + f(x, y, z, p_{1,0}, p_{0,1}, p_{1,1}, p_{2,0}) = 0.$$

L'équation (53) et celles qu'on en déduit par des différentiations successives permettent d'exprimer toutes les dérivées partielles de z au moyen des dérivées partielles $p_{i,k}$, où l'indice i a l'une des valeurs 0, 1. Ainsi, en différentiant l'équation (53) un nombre quelconque de fois par rapport à y , on obtient l'expression des dérivées

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^2 \partial y^{n-2}}$$

au moyen de $x, y, z, p_{0,1}, p_{0,2}, \dots, p_{0,n}; p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,n-1}$; en différentiant ensuite une fois par rapport à x et un nombre quelconque de fois par rapport à y , on exprime les dérivées

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^3 \partial y^{n-3}}$$

au moyen des précédentes, et ainsi de suite. D'une manière générale, on a, si l'indice i est supérieur à l'unité,

$$(54) \quad p_{i,k} = F(x, y, z, p_{0,1}, p_{0,2}, \dots, p_{0,n}; p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,n-1}), \quad i + k = n,$$

la fonction F se déduisant de f par des différentiations, des multiplica-

tions et des additions. Nous supposerons toujours, par la suite, à moins de mention expresse, que l'on a remplacé les dérivées $p_{i,k}$ ($i > 1$) par leurs expressions au moyen des dérivées où le premier indice ne dépasse pas l'unité.

Voici une autre notation que nous emploierons fréquemment. Soit $U(x, y, z, p_1, \dots, p_n)$ une fonction de x, y, z , et des dérivées partielles de z jusqu'à un certain ordre, n par exemple. Imaginons qu'on différencie cette fonction i fois de suite par rapport à x , k fois de suite par rapport à y , en considérant z comme une fonction de x et de y , qu'on retranche du résultat les termes qui renferment les dérivées d'ordre $n + i + k$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial U}{\partial p_n} p_{n+i,k} + \frac{\partial U}{\partial p_{n-1}} p_{n+i-1,k+1} + \dots + \frac{\partial U}{\partial p_{0,n}} p_{i,n+k},$$

qu'on remplace ensuite les dérivées $p_{i,k}$, où $i > 1$, par leurs expressions tirées des formules (54); nous désignerons le résultat de toutes ces opérations par

$$\left(\frac{d^{n+i} U}{dx^i dy^k} \right).$$

133. Les caractéristiques de l'équation (53) sont données par les racines de l'équation du second degré

$$(53) \quad m^2 - \frac{\partial f}{\partial x} m + \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

soient m_1 et m_2 les deux racines de cette équation. Si on prend, sur une surface intégrale, les courbes définies par l'équation différentielle

$$dy - m_1 dx = 0,$$

l'orientation d'éléments d'ordre n , qui appartiennent à la surface intégrale le long de l'une de ces courbes, constitue ce que nous avons appelé une caractéristique d'ordre n (I, n° 81). On a d'abord, pour une de ces caractéristiques, les relations

$$dy = m_1 dx, \quad dz = p_1 dx + p_0 dy, \quad dp_{i,k} = p_{i+1,k} dx + p_{i,k+1} dy,$$

où $i + k \leq n - 1$, et où l'on peut supposer que l'indice i ne dépasse pas l'unité. Pour obtenir une nouvelle équation différentielle, nous n'avons qu'à différentier l'équation proposée (53) $n - 1$ fois de suite par rapport

à y , ce qui donne

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) + p_{1,n-1} + \frac{\partial}{\partial x} p_{1,n} + \frac{\partial}{\partial x} p_{1,n+1} = 0;$$

d'autre part, on a aussi :

$$\begin{aligned} dp_{1,n-1} &= p_{1,n-1} dx + p_{1,n} dy, \\ dp_{1,n} &= p_{1,n} dx + p_{1,n+1} dy. \end{aligned}$$

Remplaçons dy par $m_1 dx$, on en tire

$$\begin{aligned} p_{1,n} &= \frac{dp_{1,n-1}}{dx} - m_1 p_{1,n+1}, \\ p_{1,n-1} &= \frac{dp_{1,n-2}}{dx} - m_1 \frac{dp_{1,n-1}}{dx} + m_1^2 p_{1,n+1} \end{aligned}$$

et, en portant dans l'équation précédente, il reste :

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) + \frac{dp_{1,n-1}}{dx} + m_1 \frac{dp_{1,n}}{dx} = 0.$$

Les équations différentielles des caractéristiques d'ordre n sont donc les suivantes

$$(56) \quad \begin{cases} dy = m_1 dx, & dx = p_{1,0} dx + p_{0,1} dy, \\ dp_{1,n} = p_{1,n} dx + p_{1,n+1} dy, \dots, dp_{1,n-2} = p_{1,n-2} dx + p_{1,n-1} dy, \\ dp_{1,n-1} = p_{1,n-1} dx + p_{1,n} dy, \dots, dp_{1,n-1} = p_{1,n-1} dx + p_{1,n} dy, \\ \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) dx + dp_{1,n-1} + m_1 dp_{1,n} = 0. \end{cases}$$

On suppose, bien entendu, qu'au moyen des relations (53) et (54) on n'a laissé dans ces équations différentielles que les dérivées $p_{i,j}$, où l'indice i ne dépasse pas l'unité. Ces équations, en nombre $2n + 1$, renferment donc $2n + 3$ variables; elles admettent, par conséquent, comme on l'a déjà remarqué, une infinité d'intégrales dépendant d'une fonction arbitraire. Toute intégrale des équations (56), jointe aux équations (53) et (54), définit une orientation d'éléments d'ordre n , qui est une caractéristique d'ordre n ; pour abréger, quand nous parlerons des équations des caractéristiques, il sera question des équations différentielles (56). On obtiendra le second système de caractéristiques en permutant m_1 et m_2 .

Il est aisé de retrouver, au moyen des formules précédentes, un certain nombre de propriétés qui ont été signalées rapidement (t. I, n° 81).

Ainsi, toute caractéristique d'ordre n renferme une caractéristique d'ordre $n - 1$; car on déduit des deux équations

$$\begin{aligned} dp_{1,n-1} &= p_{1,n-1}dx + p_{1,n-1}dy, \\ dp_{2,n-1} &= p_{1,n-1}dx + p_{2,n}dy, \end{aligned}$$

en multipliant la seconde par m_2 et ajoutant membre à membre, et remplaçant ensuite dy par m_1dx ,

$$\begin{aligned} \frac{dp_{1,n-1} + m_2 dp_{2,n-1}}{d\omega} &= p_{1,n-1} + (m_1 + m_2) p_{1,n-1} + m_1 m_2 p_{2,n} \\ &= p_{1,n-1} + \frac{\partial f}{\partial x} p_{1,n-1} + \frac{\partial f}{\partial y} p_{2,n} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(57) \quad \left(\frac{d^n - 1}{dy^{n-1}} \right) dx + dp_{1,n-1} + m_2 dp_{2,n-1} = 0.$$

On peut donc remplacer, dans les équations (56), la relation

$$dp_{1,n-1} = p_{1,n-1}dx + p_{1,n-1}dy$$

par la précédente. En d'autres termes, les équations différentielles des caractéristiques d'ordre n s'obtiennent en ajoutant aux équations différentielles des caractéristiques d'ordre $n - 1$ les deux suivantes

$$(58) \quad \begin{cases} dp_{2,n-1} = p_{1,n-1}dx + p_{2,n}dy, \\ \left(\frac{d^n - 1}{dy^{n-1}} \right) dx + dp_{1,n-1} + m_2 dp_{2,n-1} = 0. \end{cases}$$

Connaissant une caractéristique d'ordre $n - 1$, pour avoir une caractéristique d'ordre n à laquelle elle appartienne, on a les deux équations précédentes qui déterminent $p_{1,n-1}$ et $p_{2,n}$.

Si on élimine $p_{1,n-1}$ entre ces deux équations, on est conduit à une équation différentielle du premier ordre pour déterminer $p_{2,n}$, où le coefficient de $\frac{dp_{2,n}}{dx}$ est $(m_2 - m_1)$. Donc, lorsque l'équation caractéristique (55) a ses racines distinctes, toute caractéristique d'ordre $n - 1$ appartient à une infinité de caractéristiques d'ordre n dépendant d'une constante arbitraire (Voir t. I, p. 183).

184. Dans la recherche des intégrales communes à l'équation du second ordre proposée et à une autre équation d'ordre n , $\varphi = 0$, on utilise les équations.

peut toujours supposer qu'on n'a laissé dans cette dernière que les dérivées $p_{i,1}$ et $p_{i,2}$, en remplaçant les dérivées $p_{i,k}$, où l'indice i dépasse l'unité, par leurs expressions tirées des formules (53) et (54). Si, après cette substitution, l'équation $\varphi = 0$ se réduit à une identité, toutes les intégrales de l'équation du second ordre proposée appartiennent à la seconde équation, qui est ainsi une conséquence analytique de la première. Laissant de côté ce cas exceptionnel, supposons qu'on ait un système formé de l'équation du second ordre (53) et d'une autre équation d'ordre n ,

$$(59) \quad \varphi(x, y, z, p_{10}, p_{11}, \dots, p_{1,n-1}; p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2n}) = 0,$$

dont le premier membre ne renferme que les dérivées $p_{i,1}$, où $i \leq n$. En regardant z comme une intégrale commune à ces deux équations, proposons-nous de calculer les dérivées d'ordre $n+1$ de cette fonction; d'après ce que nous avons dit plus haut, il suffit de calculer les dérivées $p_{1,n}$ et $p_{2,n+1}$. En différentiant l'équation (59) une fois par rapport à z et une fois par rapport à y , et l'équation (53) $(n-1)$ fois de suite par rapport à y , on parvient aux trois équations

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n}} p_{1,n} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n-1} = 0, \\ \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{2,n}} p_{2,n+1} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n} = 0, \\ \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) + p_{2,n-1} + \frac{\partial f}{\partial z} p_{1,n} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{2,n+1} = 0, \end{array} \right.$$

où $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$, $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)$, ont le sens expliqué plus haut (n° 132). En éliminant $p_{2,n-1}$ entre la première et la troisième, on est conduit aux deux équations suivantes, pour déterminer $p_{1,n}$ et $p_{2,n+1}$,

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n}} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\right) p_{1,n} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{2,n+1} + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{2,n}} p_{2,n+1} + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Nous dirons que les équations

$$r + f = 0, \quad \varphi = 0$$

forment un système en involution, si les deux équations (61) se réduisent

à une seule ⁽¹⁾. Pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord que l'on ait

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_{n,n}}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n,n}} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire que le rapport $\frac{\partial \varphi}{\partial p_{n,n}} : \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}}$ soit égal à l'une des racines m_1, m_2 de l'équation

$$m^2 - \frac{\partial f}{\partial x} m + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{n,n}} = m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}};$$

en tirant la valeur de $p_{1,n}$ de la seconde des équations (61) et portant dans la première, il vient une seconde condition

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_1 \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Pour que le système $r + f = 0, \varphi = 0$ soit en involution, il faut donc que la fonction φ vérifie un des deux systèmes d'équations

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n,n}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_1 \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0; \end{cases} \\ \text{(B)} \quad & \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n,n}} - m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si la fonction φ satisfait à l'un de ces deux systèmes, les deux équations (61) se réduisent à une seule, et on peut choisir arbitrairement la valeur d'une dérivée d'ordre $n+1$; en raisonnant comme on l'a fait plus haut (n° 122), on verrait de même qu'on peut choisir arbitrairement la valeur d'une dérivée de chaque ordre à partir du $(n+1)^{\text{e}}$ et, par suite, former une infinité de développements en série entière qui satisfont formellement aux deux équations proposées. Au lieu d'établir directement la convergence de ces développements (ce qu'on pourrait faire par

(1) Il suffit que cela ait lieu en tenant compte de la relation $\varphi = 0$ elle-même. Nous supposons d'abord qu'il n'est pas nécessaire de tenir compte de cette relation; le cas où il est nécessaire d'en tenir compte est examiné plus loin (page 98, n° 129).

un artifice analogue à celui qui a été employé précédemment), nous établirons l'existence des intégrales communes aux deux équations par la méthode même qui servira à les obtenir.

Auparavant, il est essentiel de remarquer que les deux systèmes d'équations (A) et (B) se présentent dans une autre question. Les équations différentielles des caractéristiques (56) sont au nombre de $2n + 1$, et le nombre des variables est $2n + 3$, de sorte qu'on ne peut les intégrer comme un système d'équations différentielles ordinaires à une seule variable indépendante. Les méthodes de Monge et d'Ampère consistent essentiellement, on l'a vu, à rechercher s'il existe des combinaisons intégrables pour les équations différentielles des caractéristiques du premier ordre. En généralisant cette méthode, proposons-nous, avec M. Darboux, de rechercher s'il existe des combinaisons intégrables des équations différentes des caractéristiques d'ordre n , c'est-à-dire des fonctions

$$\varphi(x, y, z, p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,n-1}; p_{2,1}, \dots, p_{2n})$$

telles que l'équation

$$d\varphi = 0$$

soit une conséquence des équations (56). En remplaçant dans $d\varphi$ les différentielles $dy, dz, dp_{1,0}, \dots, dp_{1,n-1}, dp_{2,n-1}$ par leurs valeurs tirées des formules (56), il reste

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{2,n-1}} p_{1,n-1} + m_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p_{0,1} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{2,n-1}} p_{2n} \right) \right] dx \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{2,n}} dp_{2n} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) dx + m_2 dp_{2n} \Big\} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right) + m_1 \left(\frac{d\varphi}{dy} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) \right] dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_{2,n}} - m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \right) dp_{2n} = 0.$$

Pour que $d\varphi = 0$ soit une combinaison intégrable des équations (56), il faut que les coefficients de dx et de $dp_{2,n}$ soient nuls, c'est-à-dire que φ soit une intégrale du système (B).

Appelons, pour abréger, systèmes (I) et (II) de caractéristiques les systèmes dont on obtient les équations différentielles en prenant $dy = m_1 dx$, ou $dy = m_2 dx$ respectivement; appelons de même invariant d'ordre n d'un système de caractéristiques toute fonction $\varphi(x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{2n})$, renfermant l'une au moins des dérivées $p_{1,n-1}, p_{2,n}$, et aucune dérivée d'ordre supérieur, qui conserve une valeur constante, quand on se déplace sur une caractéristique de ce système, c'est-à-dire

telle que $d\varphi = 0$ soit une combinaison intégrable des équations de ce système de caractéristiques. On voit, d'après cela, que toute fonction φ qui satisfait identiquement aux équations (B) est un invariant du système (I) de caractéristiques ; de même, toute intégrale du système (A) est un invariant du système (II) de caractéristiques.

185. Cela posé, comme nous supposons que la fonction φ vérifie *identiquement* les équations (A), c'est-à-dire sans tenir compte de la relation $\varphi = 0$ elle-même, les deux équations

$$r + f = 0, \quad \varphi = C$$

forment un système en involution, quelle que soit la constante C. Nous allons montrer que ces deux équations admettent une infinité d'intégrales communes dépendant d'une fonction arbitraire ; par une courbe quelconque (Γ), il passe, en général, une infinité d'intégrales de ce système, dépendant d'un nombre fixe de constantes arbitraires.

Soient

$$y = \psi(x), \quad z = \pi(x)$$

les équations de la courbe (Γ). Si une surface passe par cette courbe sans l'admettre pour ligne singulière, le long de cette courbe p et q sont des fonctions de x qui vérifient la relation

$$\pi'(x) = p + q\psi'(x).$$

On peut, par exemple, choisir arbitrairement la valeur de q , et la formule précédente donnera p ; si on suppose, en outre, que la surface cherchée satisfait à l'équation $r + f = 0$, cette équation et celles qu'on en déduit par des différentiations successives feront connaître les valeurs de toutes les dérivées partielles de la fonction inconnue le long de la courbe (Γ), ou une orientation d'éléments d'ordre n ayant (Γ) pour support⁽¹⁾. Imaginons que nous ayons substitué dans φ les expressions obtenues pour toutes les dérivées d'ordre égal ou inférieur à n ; le résultat contiendra, en général,

$$q, \frac{dq}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}q}{dx^{n-1}}.$$

En écrivant que ce résultat est égal à C, on a une équation différentielle d'ordre $n - 1$ pour déterminer $q(x)$; à toute solution de cette équation différentielle d'ordre $n - 1$ correspond une orientation d'éléments

(1) Il suffit de reprendre les raisonnements du n° 16 (l. I, p. 24) et d'adjoindre les relations $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, et les relations analogues.

d'ordre n qui appartiennent à une surface intégrale (S) de l'équation $r + f = 0$. Cette surface (S) donne aussi une intégrale de l'équation $\varphi = C$. En effet, l'ensemble doublement infini d'éléments d'ordre n que détermine cette surface peut être considéré comme un lieu de caractéristiques du système (II), chacune d'elles étant issue d'un point de la courbe (I'). Or, puisque φ est une intégrale du système (A), cette fonction φ est un invariant pour les caractéristiques du système (II), et conserve une valeur constante quand on se déplace sur une de ces caractéristiques. Comme, d'autre part, $\varphi = C$ en tous les points de la courbe (I'), il s'ensuit que l'on a aussi $\varphi = C$ en tous les points de la surface (S).

186. Cette surface (S) peut être obtenue par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Pour établir ce point fondamental, nous remarquerons d'abord que l'équation de condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{n,n}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0$$

est susceptible d'une interprétation géométrique. D'une manière générale, soit

$$F(x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{n,n}) = 0$$

une équation aux dérivées partielles de forme quelconque, d'ordre n . Sur une surface intégrale de cette équation, considérons les courbes définies par l'équation différentielle du premier ordre

$$(62) \quad \frac{\partial F}{\partial p_{n,n}} dy^n - \frac{\partial F}{\partial p_{n-1,n}} dx dy^{n-1} + \frac{\partial F}{\partial p_{n-2,n}} dx^2 dy^{n-2} \dots \pm \frac{\partial F}{\partial p_{1,n}} dx^n = 0;$$

l'orientation d'éléments d'ordre n de la surface intégrale le long d'une de ces courbes constitue une caractéristique de l'équation d'ordre n . Il y a donc, en général, n systèmes de caractéristiques distincts, correspondant aux n racines de l'équation (62). Cela posé, dans le cas d'une équation d'ordre n , $\varphi = 0$, ne renfermant que les dérivées $p_{1,n-1}$ et $p_{n,n}$, l'équation (62) se réduit à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} dx^{n-1} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n,n}} dx^n = 0,$$

et la condition trouvée plus haut

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_{n,n}} \right)^2 - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n,n}} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} + \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \right)^2 = 0$$

exprime que les deux équations

$$r + f = 0, \quad \varphi = C$$

ont une direction de caractéristique commune. Toute intégrale de ce système est donc engendrée par une famille de caractéristiques communes, et on est conduit tout naturellement à déterminer d'abord ces caractéristiques.

Nous supposons que la fonction φ satisfait au système (A), et, par suite, que les caractéristiques communes aux deux équations $r + f = 0$, $\varphi = C$ font partie du système (I). Ces caractéristiques satisfont d'abord aux $(2n + 1)$ équations (56) et, en tenant compte de ce qu'elles satisfont aussi à la relation $\varphi = C$, on peut compléter le système d'équations différentielles. De l'égalité $\varphi = C$, on déduit, en effet,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n}} p_{1,n} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n-1} &= 0, \\ \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n}} p_{1,n+1} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n} &= 0; \end{aligned}$$

quand on se déplace sur une caractéristique, on a aussi

$$\begin{aligned} dp_{1,n} &= p_{1,n} dx + p_{1,n+1} dy, \\ dp_{1,n-1} &= p_{1,n-1} dx + p_{1,n} dy, \end{aligned}$$

et on en tire, en remplaçant dy par $m_1 dx$,

$$\begin{aligned} p_{1,n} &= \frac{dp_{1,n}}{dx} - p_{1,n+1} m_1, \\ p_{1,n-1} &= \frac{dp_{1,n-1}}{dx} - m_1 \frac{dp_{1,n}}{dx} + m_1^2 p_{1,n+1}; \end{aligned}$$

en portant ces valeurs de $p_{1,n}$ et de $p_{1,n-1}$ dans les formules précédentes, elles deviennent

$$(63) \quad \begin{cases} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} \frac{dp_{1,n-1}}{dx} = 0, \\ \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} \frac{dp_{1,n}}{dx} = 0. \end{cases}$$

Ces équations font connaître $\frac{dp_{1,n-1}}{dx}$, $\frac{dp_{1,n}}{dx}$, car $\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}$ ne peut être identiquement nul; autrement on aurait aussi, d'après la première formule (A), $\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n}} = 0$, et φ ne contiendrait pas de dérivée d'ordre n , con-

trairement à l'hypothèse. On peut aussi remarquer que les équations (63) entraînent la dernière des équations (56), en tenant compte de la dernière des conditions (A). En définitive, les caractéristiques communes aux deux équations $r + f = 0$, $\varphi = C$ sont déterminées par le système suivant de $(2n + 2)$ équations différentielles ordinaires à $2n + 3$ variables

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = m_1, \quad \frac{dz}{dx} = p_{1,0} + p_{0,1} m_1, \\ \frac{dp_{1,0}}{dx} = p_{1,0} + p_{0,1} m_1, \quad \dots, \quad \frac{dp_{1,n-1}}{dx} = p_{1,n-1} + p_{0,n-1} m_1, \\ \frac{dp_{0,1}}{dx} = p_{1,1} + p_{0,1} m_1, \quad \dots, \quad \frac{dp_{0,n-1}}{dx} = p_{1,n-1} + p_{0,n-1} m_1, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \frac{dp_{1,n-1}}{dx} + \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n-1}} \frac{dp_{0,n-1}}{dx} + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right) = 0, \end{array} \right.$$

où on suppose toujours qu'on n'a laissé que les dérivées $p_{i,1}$ où $i \leq 1$.

Toute intégrale commune aux deux équations $r + f = 0$, $\varphi = C$ s'obtient certainement en associant ces caractéristiques communes suivant une loi convenable. D'ailleurs, on vient de démontrer que, par toute orientation d'éléments d'ordre n satisfaisant aux deux équations $r + f = 0$, $\varphi = C$, et à toutes celles qu'on déduit de $r + f = 0$ par des différentiations successives, il passe une intégrale commune (S); cette intégrale commune est évidemment le lieu des caractéristiques communes qui sont issues des divers éléments de l'orientation précédente. Si donc on a obtenu l'intégrale générale des équations (64), on obtiendra l'équation de la surface (S) par des éliminations seulement.

Tout système en involution admet donc une famille de *multiplicités caractéristiques*, dépendant de $2n + 1$ paramètres. Comme toute surface intégrale est un lieu de caractéristiques, on en conclut que si deux intégrales ont un élément commun d'ordre n , elles ont en commun une infinité simple d'éléments d'ordre n , formant la caractéristique issue de cet élément.

On voit, d'après cela, que la recherche des intégrales d'un système en involution passant par une courbe donnée (Γ) exige l'intégration de deux systèmes d'équations différentielles ordinaires, absolument indépendants l'un de l'autre. L'un des deux, toujours le même, quelle que soit la courbe (Γ), fait connaître les *caractéristiques du système en involution*. L'autre système, qui varie avec la courbe (Γ), détermine une orientation d'éléments d'ordre n , ayant cette courbe pour support et appartenant à une intégrale du système en involution proposé; on peut le remplacer par une seule équation différentielle d'ordre $n - 1$.

187. Supposons qu'on ait obtenu les caractéristiques communes du système en involution, ou, ce qui revient au même, trouvé l'intégrale générale des équations (64). Soient

$$(63) \quad \begin{cases} y = P(x, x_0, y_0, z_0; \Pi_{10}, \dots, \Pi_{n0}), \\ z = Q(x, x_0, y_0, z_0; \Pi_{10}, \dots, \Pi_{n0}), \\ p_{i,k} = R_{i,k}(x, x_0, y_0, z_0; \Pi_{10}, \dots, \Pi_{n0}). \end{cases}$$

les formules qui représentent l'intégrale générale de ce système, $y_0, z_0, \Pi_{i,k}$ désignant les valeurs de $y, z, p_{i,k}$, qui correspondent à la valeur initiale x_0 de x .

Le résultat que nous venons d'établir par des considérations empruntées à la théorie des caractéristiques peut s'énoncer comme il suit : *Pour obtenir une intégrale du système en involution proposé, il suffit de remplacer dans les formules (63) $x_0, y_0, z_0, \Pi_{i,k}$ par des fonctions d'un paramètre α satisfaisant aux relations*

$$(66) \quad \begin{cases} \varphi_0 = C, \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = \Pi_{1,0} \frac{\partial x_0}{\partial x} + \Pi_{n,1} \frac{\partial y_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Pi_{i,k}}{\partial x} = \Pi_{i+1,k} \frac{\partial x_0}{\partial x} + \Pi_{i,k+1} \frac{\partial y_0}{\partial x}; \end{cases} \begin{cases} i=0,1, \\ i+k=1,2,\dots,n-1. \end{cases}$$

on suppose que, dans ces formules, $\Pi_{i,k}$ ait été remplacé par une expression au moyen de $x_0, y_0, z_0, \Pi_{1,0}, \dots, \Pi_{1,k+1}, \Pi_{n,1}, \dots, \Pi_{n,k+2}$ pareille à celle de $p_{i,k}$ au moyen de $x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{1,k+1}, p_{n,1}, \dots, p_{n,k+2}$, déduite des relations (33) et (34). En effet, les équations (66) définissent alors une orientation d'éléments d'ordre n qui appartient à une intégrale du système en involution proposé ; cette intégrale est nécessairement représentée par les formules (63), puisqu'elle est le lieu des caractéristiques du système en involution issues des divers éléments de l'orientation dont il s'agit.

Le théorème précédent peut s'établir par un calcul direct, comme nous l'avons fait pour les systèmes en involution formés de deux équations du second ordre. Je renverrai pour la démonstration au travail déjà cité de M. Beudon.

188. La détermination des caractéristiques du système en involution, qui constitue la partie essentielle du problème, donne lieu à une remarque. Les équations (64) admettent toujours la combinaison intégrable $d\varphi = 0$, comme il est facile de le vérifier ; on peut donc remplacer l'une de ces équations différentielles par la relation $\varphi = C$, et en tirant de celle-ci l'une des variables en fonction des autres, on est

ramené à un système de $2n + 1$ équations différentielles entre $2n + 2$ variables. Mais il y a lieu de faire une distinction, qui peut avoir une certaine importance pratique. Lorsque les deux racines m_1, m_2 de l'équation

$$m^2 - \frac{\partial f}{\partial x} m + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

sont distinctes (ce qui est le cas général), $d\varphi = 0$ ne peut pas être une combinaison intégrable des équations différentielles des caractéristiques (I), car on devrait avoir à la fois

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n}} - m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0,$$

ce qui est impossible, puisque m_1 est différent de m_2 . Par conséquent, en ajoutant aux équations (56) la relation $d\varphi = 0$, ou $\varphi = C$, on obtient un système absolument équivalent au système (64). Ainsi, pour obtenir les équations différentielles des caractéristiques du système en involution, il suffit d'ajouter la relation $\varphi = C$ aux équations différentielles des caractéristiques (I) de $r + f = 0$. Il n'en est plus de même lorsque l'équation

$$m^2 - \frac{\partial f}{\partial x} m + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

a ses racines égales. Alors $d\varphi = 0$ est une conséquence des équations (56), et il faut partir des équations (64) pour trouver les caractéristiques du système en involution.

189. Examinons maintenant le cas où les équations (A) sont vérifiées, non plus identiquement, mais en tenant compte de la relation $\varphi = 0$ elle-même. Pour plus de clarté, supposons l'équation $\varphi = 0$ résolue par rapport à la dérivée $p_{1,n-1}$, ce qui est possible puisque, si φ ne renfermait pas $p_{1,n-1}$, elle ne renfermerait pas non plus $p_{1,n}$, d'après la première des équations (A). Écrivons, par conséquent,

$$\varphi = p_{1,n-1} + \psi(x, y, z, p_{1n}, \dots, p_{2n}) = 0;$$

les conditions (A) deviennent

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_{1n}} - m_1 = 0, \\ \left(\frac{d\psi}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{d\psi}{dy}\right) - \left(\frac{d^{n-1}\psi}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

La première montre que ψ est une fonction linéaire de p_m ; la seconde doit se réduire à une identité, quand on y remplace $p_{1,n-1}$ par $-\psi(x, y, z, p_{01}, \dots, p_{0n})$.

Imaginons encore que l'on se déplace sur une caractéristique du système (II); le long de cette caractéristique, $y, z, p_{10}, \dots, p_{0n}$ sont des fonctions de x . Si on substitue dans φ ces valeurs de y, z, \dots, p_{0n} , le résultat est aussi une fonction de x dont nous allons calculer la dérivée, dans cette hypothèse. On a

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dp_{1,n-1}}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial p_{0,n}} \frac{dp_{0,n}}{dx} + \left(\frac{d\psi}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{d\psi}{dy}\right),$$

ou bien, en tenant compte des équations d'une caractéristique du système (II),

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{d\psi}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{d\psi}{dy}\right) - \left(\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\right);$$

on voit donc que $\frac{d\varphi}{dx}$ doit être nul lorsque l'on a $\varphi = 0$. Or, $\frac{d\varphi}{dx}$ contient $p_{1,n-1}$ au second degré au plus, tandis que φ contient $p_{1,n-1}$ au premier degré; si l'on élimine $p_{1,n-1}$, on est donc conduit à une relation de la forme

$$\frac{d\varphi}{dx} = A\varphi + B\varphi^2,$$

qui est vérifiée quand on se déplace sur une caractéristique du système (II). Si φ est nul pour la valeur initiale x_0 , les coefficients A et B étant des fonctions régulières dans le voisinage, il s'ensuit que φ sera nul en tous les points de cette caractéristique. En d'autres termes, tous les éléments d'une caractéristique (II) vérifient l'équation $\varphi = 0$, pourvu qu'un seul élément de cette caractéristique vérifie cette équation. On en conclut, en raisonnant comme plus haut (n° 137), que, pour toute orientation d'éléments d'ordre n appartenant aux deux équations $r + f = 0$, $\varphi = 0$, il passe une intégrale commune à ces deux équations. La détermination de cette intégrale commune s'effectue de la même façon.

140. On déduit de ce qui précède la propriété fondamentale des systèmes en involution, qui pourrait leur servir de définition. Étant donné un système en involution formé d'une équation du second ordre $r + f = 0$ et d'une équation d'ordre quelconque n , toute orientation d'éléments d'ordre n appartenant à ces deux équations détermine une

intégrale commune du système, pourvu, bien entendu, que, dans le voisinage de cette orientation d'éléments, les conditions de continuité, que nous avons toujours supposées satisfaites, soient remplies. Il est facile, d'après cette propriété, de retrouver et de donner la raison d'un théorème établi plus haut (n° 134).

Si les équations $r + f = 0$, $\varphi = C$ forment un système en involution, quelle que soit la constante C , φ est un invariant d'un des systèmes de caractéristiques de l'équation $r + f = 0$.

Soit (S) une intégrale de l'équation $r + f = 0$, ne vérifiant pas l'équation $\varphi = C$. Sur cette surface, les courbes $\varphi = C$ forment une famille de courbes (Γ) qui sont forcément des caractéristiques. En effet, le long d'une de ces courbes (Γ) , l'orientation d'éléments d'ordre n de la surface (S) vérifie l'équation $\varphi = C$; il passe donc par cette courbe une intégrale du système en involution, qui a un contact d'ordre n avec (S) . Par suite, ces courbes (Γ) forment une des familles de caractéristiques de la surface (S) ; comme cette intégrale (S) est quelconque, il s'ensuit qu'il y a une des familles de caractéristiques de l'équation $r + f = 0$, telles que φ reste constant quand on se déplace sur une caractéristique de cette famille.

La recherche des équations d'ordre n formant avec $r + f = 0$ un système en involution est ramenée à l'intégration des équations linéaires simultanées (A) et (B). Ces systèmes seront étudiés en détail au chapitre suivant; pour le moment, je me bornerai aux deux remarques suivantes:

1° Lorsque n est > 2 , la première des équations (A) montre que les dérivées d'ordre n , $p_{1,n-1}$ et $p_{2,n}$ ne pourront figurer dans φ que si φ contient la combinaison linéaire $p_{1,n-1} + m_1 p_{2,n}$; une intégrale φ contiendra donc toujours la dérivée $p_{1,n-1}$;

2° Lorsqu'on fait successivement $n = 2, 3, \dots$, on obtient deux suites illimitées de systèmes d'équations linéaires. Chacun de ces systèmes admet toutes les intégrales des systèmes précédents de la même série. Pour le prouver, il suffit évidemment de démontrer que le système (A), correspondant à une valeur de n , admet toutes les intégrales du système précédent, obtenu en changeant n en $n - 1$. Si on suppose, en effet, que φ ne renferme que les dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$,

$$\varphi = \psi(x, y, z, p_{10}, \dots, p_{1,n-1}; p_{21}, \dots, p_{2,n-1}),$$

on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) &= \left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n-1} + \frac{\partial\psi}{\partial p_{2,n-1}} p_{2,n-1}, \\ \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) &= \left(\frac{d\psi}{dy}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n-1} + \frac{\partial\psi}{\partial p_{2,n-1}} p_{2,n-1}. \end{aligned}$$

$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$ et $\left(\frac{d\psi}{dy}\right)$ ayant un sens analogue à celui de $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$. La première des équations (A) est vérifiée identiquement, et la seconde devient.

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{d\psi}{dy}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial p_{1,n-2}} \{p_{1,n-2} + m_2 p_{1,n-1}\} + \frac{\partial\psi}{\partial p_{2,n-1}} \{p_{1,n-1} + m_2 p_{2,n}\} = 0.$$

D'autre part, on a, en différentiant $(n-2)$ fois par rapport à y , l'équation $r + f = 0$,

$$\left(\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}\right) + p_{1,n-2} + \frac{\partial f}{\partial y} p_{1,n-1} + \frac{\partial f}{\partial x} p_{2,n} = 0,$$

et, en éliminant $p_{1,n-2}$, il vient

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{d\psi}{dy}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial p_{1,n-2}} \left(\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}\right) + (p_{1,n-1} + m_2 p_{2,n}) \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial p_{2,n-1}} - m_1 \frac{\partial\psi}{\partial p_{1,n-1}} \right\} = 0;$$

comme, par hypothèse, ψ ne contient ni $p_{2,n}$, ni $p_{1,n-1}$, il faudra donc que l'on ait à la fois

$$(A') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\psi}{\partial p_{2,n-1}} - m_1 \frac{\partial\psi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ \left(\frac{d\psi}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{d\psi}{dy}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial p_{1,n-2}} \left(\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}\right) = 0, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que ψ soit une intégrale du système (A'), analogue au système (A). Le même calcul prouve qu'inversement toute intégrale du système (A') est aussi une intégrale du système (A).

Remarque I. — On a toujours supposé jusqu'ici que l'équation du second ordre proposée était résolue par rapport à r . Dans la pratique, il peut se faire que cette résolution ne puisse pas être effectuée, quoique l'équation du second ordre contienne la dérivée r . Mais on peut toujours, en différentiant cette équation, obtenir explicitement une dérivée d'ordre quelconque en fonction de x , y , z , p , q , r , s , t , et des dérivées $p_{i,t}$ d'ordre supérieur au second, où l'indice t a l'une des valeurs 0 ou 1; il suffit donc d'ajouter, dans les raisonnements qui ont été faits plus haut, la dérivée $p_{2,0}$ aux dérivées au moyen desquelles s'expriment toutes les autres. Cela étant, pour que l'équation proposée et une autre équation d'ordre n forment un système en involution, il suffit que les conditions qui remplacent (A) ou (B) soient vérifiées, en tenant compte de l'équation proposée elle-même.

De même, on pourra conserver r ou $p_{2,0}$ dans les équations différen-

tielles des caractéristiques (64), à condition d'ajouter à ce système l'équation du second ordre donnée. Nous n'insisterons pas davantage sur les modifications que doit alors subir la méthode précédente, qui n'offrent aucune difficulté théorique.

Remarque II. — On peut aussi étendre aux systèmes en involution formés d'une équation du second ordre et d'une équation d'ordre n la théorie des intégrales complètes. Une intégrale

$$\Phi(x, y, z, a_1, a_2, \dots, a_q) = 0,$$

dépendant de q paramètres a_1, a_2, \dots, a_q , est une *intégrale complète* du système en involution si, en éliminant les paramètres a_i entre l'équation $\Phi = 0$ et ses dérivées successives, on n'arrive à aucune relation entre $x, y, z, p_{10}, \dots, p_{1, n-1}, p_{01}, \dots, p_{0n}$, différente de $\Phi = 0$. S'il en est ainsi, on peut choisir arbitrairement $x, y, z, p_{10}, \dots, p_{1, n-1}, p_{01}, \dots, p_{0, n-1}$, et une des dérivées $p_{1, n-1}$ et p_{0n} , ce qui exige que le nombre q soit au moins égal à $2n$. Supposons $q = 2n$, et soit (S) une intégrale quelconque; on peut disposer des $2n$ paramètres a_1, \dots, a_{2n} de façon que l'intégrale complète ait avec (S) un contact d'ordre n en un point donné. Les deux surfaces auront alors (n° 136) un contact d'ordre n tout le long de la caractéristique issue de cet élément; ce qui prouve que toute intégrale du système en involution est l'enveloppe d'une suite simplement infinie d'intégrales complètes.

Les caractéristiques du système en involution sont donc représentées par un système de deux équations de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, y, z, a_1, \dots, a_{2n}) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} da_1 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial a_{2n}} da_{2n} = 0; \end{array} \right.$$

mais comme ces caractéristiques ne dépendent que de $2n + 1$ paramètres, il doit y avoir, entre $a_1, \dots, a_{2n}, da_1, \dots, da_{2n}$, $(2n - 2)$ relations homogènes en da_1, \dots, da_{2n}

$F_i(a_1, a_2, \dots, a_{2n}, da_1, da_2, \dots, da_{2n}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n - 2;$
ces $2n - 2$ relations s'obtiendraient, comme plus haut, par des différentiations et des calculs algébriques. On peut donc obtenir, sans aucune intégration, les caractéristiques dès qu'on connaît une intégrale complète. Mais, pour avoir l'intégrale générale elle-même, il faudrait trouver les expressions les plus générales de $2n$ fonctions a_1, a_2, \dots, a_{2n} d'un même paramètre, vérifiant les $2n - 2$ relations $F_i = 0$.

141. Reprenons maintenant la question générale proposée au début du n° 134. Il s'agit de rechercher les intégrales communes à l'équation du second ordre $r + f = 0$ et à une équation d'ordre n

$$(67) \quad \varphi(x, y, z, p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,n-1}, p_{2,1}, \dots, p_{n,n}) = 0;$$

on admet que, dans cette dernière équation, le premier membre est une fonction entière et irréductible des variables qui y figurent, au moins dans un certain domaine de valeurs pour ces variables, de telle sorte que les relations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n,n}} = 0,$$

par exemple, ne peuvent être des conséquences de l'équation (67) elle-même.

Les intégrales cherchées peuvent satisfaire à l'équation $\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0$, ou ne pas vérifier cette équation.

Examinons d'abord cette dernière hypothèse. Pour rechercher les intégrales dont il s'agit, on peut supposer l'équation (67) résolue par rapport à $p_{1,n-1}$ et l'écrire

$$(67)' \quad p_{1,n-1} + \psi(x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{n,n}) = 0.$$

Cela posé, nous avons encore plusieurs hypothèses à examiner, suivant que l'expression

$$H = \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_{n,n}} \right)^2 - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial p_{n,n}} + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

est nulle, ou non, identiquement. Si H n'est pas nul identiquement, et si les intégrales cherchées ne vérifient pas l'équation $H = 0$, on a vu plus haut que l'on pourrait trouver les valeurs de toutes les dérivées d'ordre $(n+1)$ de la fonction inconnue au moyen de x, y, z et des dérivées d'ordre moindre ; ces intégrales ne peuvent donc dépendre que d'un nombre fini de constantes, et on est ramené à un problème que l'on sait traiter.

Si les intégrales cherchées vérifient l'équation $H = 0$, H peut contenir $p_{n,n}$ ou être indépendant de $p_{n,n}$. Dans le second cas, les intégrales vérifieront une équation d'ordre inférieur à n . Dans le premier cas, si on n'a pas en même temps $\frac{\partial H}{\partial p_{n,n}} = 0$, on peut tirer $p_{n,n}$ de l'équation $H = 0$, la relation (67)' donne $p_{1,n-1}$, et, par suite, toutes les dérivées d'ordre n de la fonction inconnue s'expriment au moyen des précédentes.

Si on a à la fois $H = 0$, $\frac{\partial H}{\partial p_{n,n}} = 0$, l'élimination de $p_{n,n}$ conduit à une équation d'ordre inférieur à n .

Si H est nul identiquement, si on a, par exemple $\frac{\partial \psi}{\partial p_{n,n}} = m_1$, on a vu plus haut (n° 139) que toute intégrale commune aux deux équations $r + f = 0$, $p_{1,n-1} + \psi = 0$ doit vérifier aussi l'équation

$$K = \left(\frac{d\psi}{dx}\right) + m_1 \left(\frac{d\psi}{dy}\right) - \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0,$$

où on suppose $p_{1,n-1}$ remplacé par $-\psi$. Lorsque K est nul identiquement, les deux équations $r + f = 0$, $p_{1,n-1} + \psi = 0$ forment un système en involution. Si l'équation $K = 0$ ne se réduit pas à une identité, on démontre, en raisonnant comme tout à l'heure, que les intégrales communes ne dépendent que d'un nombre fini de constantes arbitraires, ou qu'elles satisfont à une équation d'ordre inférieur à n .

Il reste à examiner le cas où il existerait des intégrales communes aux deux équations

$$r + f = 0, \quad \varphi = 0,$$

vérifiant aussi l'équation $\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0$. On peut toujours supposer que la relation

$$\frac{D(\varphi, \varphi_1)}{D(p_{1,n-1}, p_{n,n})} = 0$$

n'est pas une conséquence des relations $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, car on pourrait alors remplacer ces deux relations par un système équivalent, mais d'une forme plus simple. Si les intégrales communes aux trois équations

$$r + f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0$$

ne satisfont pas à la relation $\frac{D(\varphi, \varphi_1)}{D(p_{1,n-1}, p_{n,n})} = 0$, on peut résoudre le système $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, par rapport à $p_{1,n-1}$ et $p_{n,n}$, et les intégrales communes ne dépendent que d'un nombre fini de constantes arbitraires. Si ces intégrales communes vérifient aussi la relation

$$\frac{D(\varphi, \varphi_1)}{D(p_{1,n-1}, p_{n,n})} = 0,$$

l'élimination de $p_{1,n-1}$ et $p_{0,n}$ conduira à une nouvelle équation d'ordre inférieur à n .

En résumé, en passant en revue toutes les hypothèses que l'on peut faire, on ne trouve que trois cas à examiner : 1° les équations proposées forment un système en involution ; 2° les intégrales communes dépendent d'un nombre fini de constantes arbitraires ; 3° ces intégrales communes vérifient une équation d'ordre inférieur à n .

En opérant sur une équation d'ordre inférieur à n , comme on a opéré sur l'équation d'ordre n , et ainsi de suite, on voit que, en définitive, la recherche des intégrales communes à une équation du second ordre $r + f = 0$ et à une équation d'ordre n se ramène toujours à l'intégration d'un ou de plusieurs systèmes en involution, ou à l'intégration d'un ou plusieurs systèmes dans lesquels toutes les dérivées d'un certain ordre de la fonction inconnue s'expriment au moyen des dérivées d'ordre inférieur. En particulier, pour qu'une équation d'ordre n , $\varphi = 0$, admette une infinité d'intégrales communes avec l'équation du second ordre $r + f = 0$, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires, il faut que le système $\varphi = 0$, $r + f = 0$ soit en involution, ou qu'il admette toutes les intégrales d'un ou plusieurs systèmes en involution $\psi = 0$, $r + f = 0$, où ψ est d'ordre inférieur à n .

Il peut d'ailleurs arriver que le système $r + f = 0$, $\varphi = 0$ admette plusieurs ensembles distincts d'intégrales, les uns dépendant d'un nombre fini de constantes, les autres d'une infinité de constantes. Nous en avons déjà vu un exemple (n° 129) avec le système

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

142. Considérons encore le système formé de l'équation du second ordre $r + f = 0$ et de deux équations d'ordre quelconque $\varphi = 0$, $\psi = 0$. D'après la discussion qui vient d'être faite, le seul cas qui demande un examen particulier est celui où chacun des systèmes ($r + f = 0$, $\varphi = 0$) et ($r + f = 0$, $\psi = 0$) est en involution. Ce cas se subdivise lui-même en deux autres, suivant que les fonctions φ et ψ vérifient l'une et l'autre des conditions du même type (A) ou (B), ou des conditions de types différents⁽¹⁾. Prenons d'abord le second cas, et supposons, de plus, pour fixer les idées, que les fonctions φ et ψ renferment toutes deux des dérivées d'ordre n , et aucune dérivée d'ordre supérieur, quand on ne laisse, bien entendu, que les dérivées $p_{i,i}$ où l'indice i a l'une des valeurs 0 ou 1.

(1) Dans ce paragraphe et les suivants, on suppose que les fonctions φ et ψ vérifient identiquement les équations correspondantes ; le raisonnement s'étend sans difficulté au cas où il faut tenir compte des relations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ elles-mêmes.

Dans ces conditions, la fonction φ , par exemple, satisfait aux équations (A)

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{a,n}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\right) = 0, \end{cases}$$

et la fonction ψ aux équations (B)

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial p_{a,n}} - m_2 \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ \left(\frac{d\psi}{dx}\right) + m_1 \left(\frac{d\psi}{dy}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\right) = 0. \end{cases}$$

Des deux équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ on peut tirer les valeurs des dérivées $p_{a,n}$ et $p_{1,n-1}$ en fonction des dérivées d'ordre inférieur, puisque le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(p_{a,n}, p_{1,n-1})} = (m_1 - m_2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} \right)^2$$

ne peut être nul dans le cas où m_1 et m_2 sont différents, ce que nous supposons. Si s est une intégrale commune aux trois équations proposées, on peut donc exprimer toutes les dérivées d'ordre n de la fonction inconnue au moyen des dérivées d'ordre inférieur. Prenons, comme inconnues auxiliaires

$$p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,n-1}; p_{a,1}, p_{a,2}, \dots, p_{a,n-1},$$

nous pourrions former un système d'équations aux différentielles totales,

$$(68) \quad \begin{cases} ds = p_{1,0} dx + p_{a,1} dy, \\ dp_{1,0} = p_{1,1} dx + p_{1,0} dy, \\ \dots \\ dp_{1,n-1} = p_{1,n} dx + p_{1,n-1} dy, \\ dp_{a,n-1} = p_{a,n} dx + p_{a,n-1} dy, \end{cases}$$

où $p_{1,n-1}$ et $p_{a,n}$ sont tirés des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$, tandis que $p_{1,0}$, $p_{1,1}$, ... $p_{1,n-2}$ sont supposés remplacés par leurs valeurs déduites des équations (53) et (54). D'après la façon même dont on a formé ce système, les seules conditions d'intégrabilité du système (68) qui ne soient pas vérifiées identiquement sont celles qui proviennent des deux dernières équations. Les dernières conditions d'intégrabilité s'obtiennent (n° 118) en exprimant qu'en partant des trois équations

$r + f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, on obtient un système de valeurs unique pour les dérivées d'ordre $(n + 1)$, $p_{0,n+1}$, $p_{1,n}$, $p_{2,n-1}$. Or ces trois dérivées doivent satisfaire aux cinq équations

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) + p_{2,n-1} + \frac{\partial f}{\partial x} p_{1,n} + \frac{\partial f}{\partial y} p_{0,n+1} = 0, \\ \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n}} p_{1,n} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{2,n-1} = 0, \\ \left(\frac{d\varphi}{dy} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n}} p_{0,n+1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n} = 0, \\ \left(\frac{d\psi}{dx} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial p_{0,n}} p_{1,n} + \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} p_{2,n-1} = 0, \\ \left(\frac{d\psi}{dy} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial p_{0,n}} p_{0,n+1} + \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n} = 0, \end{array} \right.$$

qui se réduisent à trois, d'après les conditions (A) et (B). En effet, les conditions (A) expriment que la seconde des relations (69) est une combinaison linéaire de la première et de la troisième; les conditions (B) expriment de même que la quatrième relation (69) est une combinaison linéaire de la première et de la cinquième. Les équations (68) forment donc un système complètement intégrable.

On peut encore établir ce résultat comme il suit: Prenons un élément d'ordre n appartenant aux trois équations $r + f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, c'est-à-dire un système de valeurs pour

$$x, y, z, p_{i,k} \quad (i + k \leq n)$$

satisfaisant à ces trois équations et à toutes celles qu'on obtient en différentiant l'équation $r + f = 0$, $(n - 2)$ fois au plus. Nous allons montrer que, par cet élément (E_n) , il passe une intégrale commune aux trois équations proposées. De cet élément (E_n) , il part une caractéristique du système (I) et d'ordre n , satisfaisant à la relation $\psi = 0$; en effet, si on ajoute aux équations différentielles des caractéristiques d'ordre n du système (I) la relation $d\psi = 0$, on a un système de $2n + 2$ équations différentielles entre $2n + 3$ variables qui admettent, en général, un système de solutions admettant les valeurs initiales données. Ces intégrales déterminent une caractéristique d'ordre n , (Γ) , du système (I), dont tous les éléments satisfont à l'équation $\psi = 0$, puisque $d\psi = 0$ est une des équations différentielles dont on s'est servi, et que l'élément initial satisfait à $\psi = 0$. On voit de même que de l'élément (E_n) part une caractéristique d'ordre n , (Γ') , du système (II), dont tous les éléments vérifient la relation $\varphi = 0$. Ces deux caractéristiques d'ordre n , (Γ)

et (Γ') , déterminent une surface intégrale (S) de l'équation $(1) r + f = 0$, qui, d'après ce qu'on a vu plus haut (n° 135), doit satisfaire aux deux équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$, car elle est le lieu des caractéristiques du système (II) issues des divers éléments de (Γ) , et aussi des caractéristiques du système (I), issues des divers éléments de (Γ') .

148. La conclusion est la même lorsque les deux équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sont d'ordres différents. Supposons, pour fixer les idées, que φ ne renferme que les dérivées d'ordre m ($m < n$) et vérifie les conditions (A)

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,m}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,m-1}} = 0, \\ \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) + m_2 \left(\frac{d\varphi}{dy} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,m-1}} \left(\frac{d^{m-1} \varphi}{dy^{m-1}} \right) = 0. \end{array} \right.$$

tandis que ψ renferme des dérivées d'ordre n et satisfait aux conditions (B)

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial p_{0,n}} - m_2 \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ \left(\frac{d\psi}{dx} \right) + m_1 \left(\frac{d\psi}{dy} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-1} \psi}{dy^{n-1}} \right) = 0; \end{array} \right.$$

(1) Le théorème du n° 84 (t. I, p. 193) peut en effet être généralisé de la façon suivante :

Deux caractéristiques d'ordre n , de systèmes différents (C) et (C') , ayant un élément commun d'ordre n , appartiennent à une surface intégrale et à une seule.

Soient, en effet (c) et (c') , les deux caractéristiques du second ordre qui sont contenues dans les caractéristiques (C) et (C') , et (S) la surface intégrale de l'équation $r + f = 0$, qui renferme ces deux caractéristiques (c) et (c') . Pour démontrer que tous les éléments des deux caractéristiques (C) et (C') appartiennent à cette intégrale, il suffit d'établir de proche en proche qu'il en est ainsi pour les éléments du troisième ordre, puis pour ceux du quatrième ordre, etc. Désignons par les lettres d et δ les différentielles relatives aux déplacements sur les caractéristiques (c) et (c') respectivement. Les valeurs des dérivées $p_{1,2}$ et $p_{0,2}$ au point commun à ces deux caractéristiques sont données, sans aucune ambiguïté, par les deux équations du premier degré

$$\begin{aligned} d p_{0,2} &= p_{1,2} dx + p_{0,2} dy \\ \delta p_{0,2} &= p_{1,2} \delta x + p_{0,2} \delta y, \end{aligned}$$

de sorte que l'élément commun du troisième ordre est déterminé; les caractéristiques du troisième ordre, issues de cet élément commun, renfermant les caractéristiques (c) , (c') , sont elles-mêmes déterminées. Par suite, il en est de même de l'élément commun du quatrième ordre, etc., de l'élément commun d'ordre n . Cet élément commun d'ordre n appartient nécessairement à la surface intégrale; comme les caractéristiques d'ordre n , qui renferment (c) et (c') sont entièrement déterminées quand on s'en donne un élément d'ordre n , il s'ensuit que tous les éléments de ces caractéristiques (C) , (C') appartiennent aussi à la surface (S) .

il est toujours entendu que φ et ψ ne renferment que les dérivées $p_{i,k}$, où l'indice i a l'une des valeurs 0, ou 1.

L'équation $r + f = 0$ et celles qu'on en déduit par des différentiations répétées permettent d'exprimer toutes les dérivées partielles de la fonction inconnue, jusqu'à celles d'ordre $m - 1$ inclusivement, au moyen de

$$x, y, z, p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,m-1}; p_{0,1}, \dots, p_{0,m-1};$$

il n'en est plus de même à partir des dérivées d'ordre m , puisqu'on doit tenir compte de la relation $\varphi = 0$ et de celles qu'on en déduira par des différentiations répétées. Mais on peut encore, dans chaque ordre, choisir arbitrairement la valeur d'une dérivée partielle (n° 134), puisque les équations $r + f = 0$, $\varphi = 0$ forment un système en involution; de sorte que, de l'ordre m jusqu'à l'ordre $n - 1$ inclusivement, toutes les dérivées partielles de la fonction inconnue s'expriment au moyen des précédentes et des dérivées

$$p_{0,m}, p_{0,m+1}, \dots, p_{0,n-1}$$

par exemple. À partir de l'ordre n , toutes les dérivées partielles s'exprimeront au moyen des précédentes. Ainsi, les deux dérivées $p_{0,n}$ et $p_{1,n-1}$ s'obtiendront par la résolution des deux équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n-1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n}} p_{0,n} + \left(\frac{d^{n-m} \varphi}{dy^{n-m}} \right) = 0.$$

$$\psi = 0.$$

Le déterminant fonctionnel des deux premiers membres par rapport à $p_{0,n}$ et $p_{1,n-1}$ a pour valeur

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{0,n}},$$

c'est à-dire, d'après les formules (A) et (B),

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_{1,n-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,m-1}} \right) (m_1 - m_2).$$

Connaissant $p_{0,n}$ et $p_{1,n-1}$, on formera ensuite les expressions des autres dérivées d'ordre n sans difficulté.

Par conséquent, si on introduit comme inconnues auxiliaires

$$p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,m-1}; p_{0,1}, p_{0,2}, \dots, p_{0,n-1},$$

on peut former un système d'équations aux différentielles totales pour déterminer z et ces inconnues auxiliaires, dans lesquelles les coefficients de dx et de dy dans les seconds membres sont des fonctions parfaitement déterminées de x, y, z et des inconnues auxiliaires. En s'appuyant sur ce que les deux systèmes $(r + f = 0, \varphi = 0)$, et $(r + f = 0, \psi = 0)$ sont en involution, on démontrera, comme dans le cas déjà examiné, que ce système d'équations aux différentielles totales est complètement intégrable.

On peut aussi employer le second procédé de démonstration. Soit $(E)_n$ un élément d'ordre n commun aux trois équations $r + f = 0, \varphi = 0, \psi = 0$, c'est-à-dire un système de valeurs

$$x, y, z, p_{i,k} \ (i + k \leq n),$$

satisfaisant à ces trois équations et à celles qu'on déduit des deux premières par des différentiations répétées. Par cet élément $(E)_n$, il passe une intégrale commune des trois équations. Appelons $(E)_m$ l'élément d'ordre m contenu dans $(E)_n$, élément qui appartient aux deux équations $r + f = 0, \varphi = 0$. On démontre, comme plus haut, que de l'élément $(E)_n$ part une caractéristique d'ordre n , $(C)_n$, du système (II) dont tous les éléments vérifient la relation $\psi = 0$; de même, de l'élément $(E)_m$ part une caractéristique d'ordre m , $(C')_m$, du système (I), dont tous les éléments vérifient la relation $\varphi = 0$. Cette caractéristique $(C')_m$ est contenue dans une caractéristique $(C'')_n$ du même système, à laquelle appartient l'élément $(E)_n$; et, de même $(C)_n$ renferme une caractéristique $(C''')_m$ du système (II), à laquelle appartient l'élément $(E)_m$. Cela posé, les deux caractéristiques $(C)_n$ et $(C'')_n$ déterminent une surface intégrale (S) de l'équation $r + f = 0$; (S) est aussi une intégrale des équations $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, car on peut la considérer, d'une part, comme un lieu de caractéristiques d'ordre n du système (I), issues des divers éléments de $(C)_n$; d'autre part, comme un lieu de caractéristiques d'ordre m du système (II), issues des divers éléments de $(C')_m$ (n° 133).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui est très important pour la suite.

Soit ψ un invariant du système (I) de caractéristiques de l'équation du second ordre $r + f = 0$; soit φ un invariant du système (II) de caractéristiques de la même équation. Les trois équations

$$r + f = 0, \quad \varphi = C, \quad \psi = C',$$

forment un système complètement intégrable.

144. Lorsque les deux fonctions φ et ψ vérifient simultanément les équations (A) ou les équations (B), les conclusions sont toutes différentes. Si les trois équations

$$r + f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0,$$

ont une intégrale commune, elles en ont une infinité dépendant d'une infinité de constantes arbitraires.

Supposons, pour fixer les idées, que φ et ψ vérifient les conditions (A). Soit (S) une intégrale commune, (C) une caractéristique de cette surface du système (I). Il existe (t. I, n° 83) une infinité d'intégrales de l'équation $r + f = 0$, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires, qui ont un contact d'ordre n avec (S) tout le long de cette caractéristique (C); nous prenons pour n l'ordre des plus hautes dérivées qui figurent dans les fonctions φ et ψ . Toutes ces intégrales satisfont aussi aux deux équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$, car on peut les considérer comme un lieu de caractéristiques du système (II), issues des divers éléments de la caractéristique (C), éléments qui vérifient tous les relations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (voir n° 135).

Il ne peut donc se présenter que deux cas pour le système proposé; ou bien ce système est incompatible, ou bien l'intégrale générale dépend d'une infinité de constantes arbitraires. Les deux cas peuvent effectivement se présenter, comme le montre l'exemple suivant. L'équation

$$r + s^2 = 0$$

forme un système en involution avec chacune des équations

$$\begin{aligned} y - 2xs + \varphi(s) &= 0, \\ p - xs^2 + \psi(s) &= 0, \end{aligned}$$

quelles que soient les fonctions φ et ψ . On tire de ces deux dernières, en différentiant par rapport à x , en tenant compte de $r + s^2 = 0$,

$$\begin{aligned} -2s - 2x \frac{\partial s}{\partial x} + \varphi'(s) \frac{\partial s}{\partial x} &= 0, \\ -2s^2 - 2xs \frac{\partial s}{\partial x} + \psi'(s) \frac{\partial s}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$[s\varphi'(s) - \psi'(s)] \frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Preons d'abord $\varphi(s) = \psi(s) = s$; la dernière équation nous donne

$\frac{\partial s}{\partial x} = 0$, et les précédentes donneraient $s = 0$, $p = 0$, $y = 0$, c'est-à-dire que les trois équations

$$r + s^2 = 0, \quad y - 2xs + s = 0, \quad p - xs^2 + s = 0,$$

sont incompatibles. Prenons, au contraire, $q = 2s$, $\phi = s^2$; si on élimine s entre les deux équations

$$y - 2xs + 2s = 0, \quad p - xs^2 + s^2 = 0,$$

on est conduit à une équation du premier ordre

$$4p(x-1) - y^2 = 0,$$

dont toutes les intégrales satisfont au système :

$$r + s^2 = 0, \quad y - 2xs + 2s = 0, \quad p - xs^2 + s^2 = 0.$$

145. Toute équation de la forme

$$(70) \quad s + f(x, y, z, p, q) = 0$$

peut, comme on l'a déjà remarqué (n° 132), être ramenée à la forme

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0,$$

en prenant pour nouvelles variables $x + y$ et $x - y$. Mais, comme l'équation (70) est une des plus simples auxquelles on puisse ramener une équation aux dérivées partielles du second ordre, nous montrerons rapidement comment on peut traiter les mêmes problèmes sur une équation de cette forme.

L'équation (70) et celles qu'on en déduit par des différentiations répétées permettent d'exprimer toutes les dérivées partielles au moyen de celles qui sont prises par rapport à l'une des variables seulement.

D'une manière générale $\frac{\partial^{i+k} s}{\partial x^i \partial y^k}$ s'exprime au moyen de

$$x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^i z}{\partial x^i}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^k z}{\partial y^k}.$$

D'après l'équation proposée elle-même, la loi est vraie pour $i = k = 1$; pour établir qu'elle est générale, il suffira de vérifier que, si elle est vraie pour les dérivées partielles d'ordre égal ou inférieur à n , elle est

encore vraie pour les dérivées d'ordre $n + 1$; ce qui n'offre aucune difficulté. Un des indices des dérivées $p_{i,n}$, au moyen desquelles s'expriment toutes les autres, étant toujours nul, nous modifierons un peu les notations employées jusqu'ici, en posant

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x} &= p_1, \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = p_2, \dots, \frac{\partial^n x}{\partial x^n} = p_n, \dots, \\ \frac{\partial x}{\partial y} &= q_1, \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = q_2, \dots, \frac{\partial^n x}{\partial y^n} = q_n, \dots, \end{aligned}$$

et on supposera toujours que, dans les relations suivantes, on a exprimé toutes les dérivées au moyen de $x, y, z, p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$. On a, par exemple,

$$\frac{\partial p_i}{\partial x} = p_{i+1}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial y} = q_{k+1},$$

tandis que $\frac{\partial p_i}{\partial y}$ est une fonction de $x, y, z, p_1, \dots, p_i, q_1$, et $\frac{\partial q_k}{\partial x}$ une fonction de $x, y, z, p_1, q_1, \dots, q_k$.

Cela posé, les équations différentielles des deux systèmes de caractéristiques d'ordre n de l'équation (70) sont respectivement

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \left\{ \begin{aligned} dy &= 0, dx = p_1 dx, dp_1 = p_2 dx, \dots, dp_{n-1} = p_n dx, \\ dq_1 &= \frac{\partial q_1}{\partial x} dx, \dots, dq_n = \frac{\partial q_n}{\partial x} dx, \end{aligned} \right. \\ \text{(II)} \quad & \left\{ \begin{aligned} dx &= 0, dz = q_1 dy, dp_1 = \frac{\partial p_1}{\partial y} dy, \dots, dp_n = \frac{\partial p_n}{\partial y} dy, \\ dq_1 &= q_2 dy, \dots, dq_{n-1} = q_n dy; \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

chacun de ces systèmes se compose de $(2n + 1)$ équations entre $(2n + 3)$ variables $(x, y, z, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$.

Cherchons les conditions pour que l'équation proposée (70) forme un système en involution avec une autre équation d'ordre n

$$(71) \quad \varphi(x, y, z, p_1, p_2, \dots, p_n; q_1, q_2, \dots, q_n) = 0.$$

En différentiant cette relation par rapport à x et par rapport à y , il vient

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} p_{n+1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial x} &= 0, \\ \left(\frac{d\varphi}{dy} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} q_{n+1} &= 0; \end{aligned} \right.$$

quand on aura remplacé $\frac{\partial q_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial p_n}{\partial y}$ par leurs expressions, p_{n+1} ne figurera que dans la première équation, et q_{n+1} ne figurera que dans la seconde. Pour que les deux relations se réduisent à une seule, il faudra donc que l'une d'elles soit vérifiée identiquement, c'est-à-dire que la fonction φ doit satisfaire à l'un des systèmes ci-dessous ⁽¹⁾

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} = 0, \left(\frac{d\varphi}{dy} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial y} = 0; \end{array} \right.$$

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0, \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial x} = 0. \end{array} \right.$$

Prenons, par exemple, les conditions (A). La première montre que φ ne dépend pas de q_n ; si n est > 1 , le coefficient de q_n dans la seconde est $\frac{\partial \varphi}{\partial q_{n-1}}$. On doit donc avoir aussi $\frac{\partial \varphi}{\partial q_{n-1}} = 0$, de sorte que φ ne dépend pas non plus de q_{n-1} . En continuant ainsi, on démontrera de proche en proche que φ ne doit renfermer que les variables

$$x, y, z, p_1, \dots, p_n,$$

et on peut remplacer le système (A) par le suivant

$$(A)' \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial y} = 0.$$

On voit de même que, si une fonction φ satisfait aux relations (B), φ est indépendante de p_1, p_2, \dots, p_n , et on peut remplacer le système (B) par le suivant

$$(B)' \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial x} = 0.$$

Lorsque les équations (A) sont vérifiées identiquement, il est aisé de vérifier que $d\varphi = 0$ est une combinaison intégrable des équations différentielles des caractéristiques du système (II); de même, les conditions (B) expriment que $d\varphi = 0$ est une combinaison intégrable des équations différentielles des caractéristiques du système (I). Les conséquences sont les mêmes que celles qui ont été développées plus haut.

146. La méthode générale d'intégration des systèmes en involution peut être remplacée ici par un procédé plus direct. Pour fixer les idées,

⁽¹⁾ Il suffit que ces relations soient vérifiées, en tenant compte de l'équation $\varphi = 0$ elle-même.

supposons que φ ne renferme que les dérivées p_1, p_2, \dots, p_n de la fonction inconnue, et qu'on ait résolu l'équation $\varphi = 0$ par rapport à p_n . On peut alors l'écrire

$$(73) \quad \varphi(x) = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + \psi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right) = 0;$$

la seconde condition (A') s'obtient en différenciant l'équation précédente par rapport à y , en remplaçant dans le résultat $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \dots, \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}$ par leurs valeurs en fonction de $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial z}{\partial y}$, déduites de l'équation proposée (70) et de ses $n-1$ premières dérivées par rapport à x , et substituant enfin à la place de $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ sa valeur $-\psi$, déduite de (73).

Si on arrive ainsi à une identité, c'est qu'il existe une relation linéaire et homogène de la forme

$$(74) \quad \frac{d^{n-1} F(x)}{dx^{n-1}} + \alpha_1 \frac{d^{n-2} F(x)}{dx^{n-2}} + \dots + \alpha_{n-2} \frac{dF(x)}{dx} + \alpha_{n-1} F(x) + \beta_1(x) + \beta_2 \frac{d\varphi(x)}{dy} = 0,$$

où on a posé

$$F(x) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \beta_2$ étant des fonctions de $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Cela posé, imaginons qu'on ait intégré l'équation différentielle ordinaire d'ordre n (73), où ne figure aucune dérivée par rapport à la variable y . L'intégrale générale de cette équation est de la forme

$$(75) \quad z = \Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

C_1, C_2, \dots, C_n étant des fonctions arbitraires de y . Si on remplace z par cette intégrale dans $F(x)$, le résultat de la substitution est une certaine fonction de x et de y , $U(x, y)$, qui satisfait à une relation de la forme

$$(76) \quad \frac{d^{n-1} U}{dx^{n-1}} + \gamma_1 \frac{d^{n-2} U}{dx^{n-2}} + \dots + \gamma_{n-2} \frac{dU}{dx} + \gamma_{n-1} U = 0;$$

on déduit de là que, pour que $U(x, y)$ soit identiquement nul, il faut et il suffit que U et ses $n-2$ premières dérivées par rapport à x soient nulles pour $x = x_0$, pourvu que les fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ soient régulières dans le voisinage de ce point.

Imaginons que C_1, C_2, \dots, C_n soient les fonctions de y auxquelles se

réduisent, pour $x = x_0, x, \frac{\partial x}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}}$,

$$x_0 = \varphi_0(y), \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)_0 = \varphi_1(y), \dots, \left(\frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}}\right)_0 = \varphi_{n-1}(y);$$

il résulte du raisonnement précédent que l'intégrale générale du système en involution

$$x + f = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \dagger \left(x, y, x, \frac{\partial x}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}} \right) = 0$$

est représentée par la formule :

$$x = \Phi [x, y, \varphi_0(y), \varphi_1(y), \dots, \varphi_{n-1}(y)],$$

où les fonctions $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \dots, \varphi_{n-1}(y)$ doivent satisfaire aux $(n-1)$ conditions

$$F(x) = 0, \quad \frac{dF(x)}{dx} = 0, \dots, \quad \frac{d^{n-2}F(x)}{dx^{n-2}} = 0,$$

où on aurait remplacé $x, \frac{\partial x}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}}$ par $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \dots, \varphi_{n-1}(y)$ respectivement, et x par x_0 .

Il est facile de voir comment on pourra obtenir des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ satisfaisant à ces conditions. Si on se donne $\varphi_0(y)$, l'équation $F(x) = 0$ devient

$$\varphi'_1(y) + f[x, y, \varphi_0(y), \varphi_1(y), \varphi'_0(y)] = 0;$$

on en déduira l'expression de $\varphi_1(y)$, qui dépendra d'une constante arbitraire. L'équation $\frac{dF(x)}{dx} = 0$ donnera ensuite une nouvelle équation du premier ordre pour déterminer $\varphi_2(y)$, et ainsi de suite.

REMARQUE. — L'application de la méthode générale exposée plus haut conduit aussi à l'équation (73). En effet, d'après cette méthode, pour obtenir les caractéristiques du système en involution, on doit intégrer les équations différentielles du système (I)

$$\begin{aligned} dy &= 0, & dx &= p_1 dx, & dp_1 &= p_2 dx, & \dots, & dp_{n-1} &= p_n dx, \\ dq_1 &= \frac{\partial q_1}{\partial x} dx, & \dots, & dq_n &= \frac{\partial q_n}{\partial x} dx, \end{aligned}$$

auxquelles on ajoute la relation

$$p_n + \psi(x, y, z, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = 0.$$

L'élimination de p_1, p_2, \dots, p_n conduit précisément à l'équation (73); l'intégration de cette équation fera connaître x, p_1, p_2, \dots, p_n en fonction de s et de n constantes arbitraires. On aura ensuite q_1 en intégrant l'équation différentielle du premier ordre,

$$\frac{dq_1}{dx} = \frac{\partial q_1}{\partial x} = -f(x, y, z, p_1, q_1);$$

puis on aura q_2 au moyen d'une nouvelle équation du premier ordre

$$\frac{dq_2}{dx} = \frac{\partial q_2}{\partial x} = f_1(x, y, z, p_1, q_1, q_2).$$

et ainsi de suite. La détermination des caractéristiques du système en involution se ramène donc à l'intégration d'une équation différentielle d'ordre n et de n équations du premier ordre.

147. On voit que le fait capital qui domine toute la théorie des systèmes en involution est le suivant : Toute intégrale est un lieu de multiplicités d'éléments qui dépendent d'un nombre fini de constantes, et qui, par suite, peuvent être obtenues par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Dans un Mémoire déjà cité ⁽¹⁾, M. Sophus Lie a démontré cette propriété par une méthode ingénieuse et profonde, qui s'applique à des systèmes très généraux d'équations aux dérivées partielles.

Pour donner une idée de cette méthode, reprenons un système de deux équations du second ordre

$$(77) \quad \begin{cases} r + f(x, y, z, p, q, s) = 0, \\ t + \varphi(x, y, z, p, q, s) = 0; \end{cases}$$

et soit $s = F(x, y)$ une intégrale de ce système. Si on regarde (x, y, z, p, q) comme les coordonnées d'un point dans un espace à cinq dimensions, les relations

$$(78) \quad z = F(x, y), \quad p = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial F}{\partial y},$$

définissent une multiplicité ponctuelle (Γ_2) à deux dimensions, dans cet

⁽¹⁾ *Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft*; 1886.

espace. Cette multiplicité ponctuelle (Γ_2) sert de support à une multiplicité M_2 de ∞^4 éléments ⁽¹⁾, que l'on peut définir comme il suit.

Appelons V_x, V_y, V_z, V_p, V_q les coordonnées homogènes d'un plan tangent à (Γ_2) au point (x, y, z, p, q) ; ces coordonnées doivent satisfaire à la relation

$$V_x dx + V_y dy + V_z dz + V_p dp + V_q dq = 0,$$

et, comme x et y sont des variables indépendantes, et z, p, q des fonctions de x et de y définies par les formules (78), on doit avoir séparément

$$\begin{aligned} V_x + V_z p + V_p \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + V_q \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= 0, \\ V_y + V_z q + V_p \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + V_q \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $F(x, y)$ est une intégrale des équations (77) on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + f\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + g\left(x, y, z, p, q, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) &= 0, \end{aligned}$$

et l'élimination de $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ entre ces quatre relations conduit à une équation de condition

$$(79) \quad \Phi(x, y, z, p, q; V_x, V_y, V_z, V_p, V_q) = 0,$$

homogène par rapport à V_x, V_y, V_z, V_p, V_q . Tous les éléments $(x, y, z, p, q; V_x, V_y, V_z, V_p, V_q)$ de M_2 vérifient donc la relation (79); en d'autres termes, cette multiplicité M_2 constitue une *multiplicité intégrale* de l'équation (79) où on aurait remplacé V_x par $\frac{\partial V}{\partial x}$, ... Or, on sait que toutes les intégrales de cette équation du 1^{er} ordre s'obtiennent en associant suivant une loi convenable les multiplicités caractéristiques, qui ne dépendent que d'un nombre fini de constantes; il en est donc de même des intégrales du système proposé (77). Mais il est à remarquer que toute intégrale de l'équation (79) ne donne pas inversement une intégrale de ce système; il faut, en outre, que cette intégrale

(1) Équations du premier ordre. Chap. x.

ait pour support, dans l'espace à cinq dimensions, une multiplicité ponctuelle à deux dimensions.

Si le système (77) est en involution, l'équation (79) admet une infinité de pareilles intégrales, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires. Cette équation est donc une de ces équations auxquelles M. Sophus Lie a donné le nom de *semi-linéaires*. Nous renverrons au mémoire de M. Lie pour plus de détails sur la méthode précédente.

148. Dans une note intéressante ⁽¹⁾, M. Vladimir de Tannenberg a indiqué un nouveau point de vue auquel on peut se placer pour étudier les systèmes en involution, en les rattachant à la théorie des groupes de transformation et à certains systèmes d'équations aux différentielles totales, déjà considérés par M. Hamburger ⁽²⁾.

Supposons, d'une manière générale, qu'il s'agisse de déterminer n fonctions x_1, x_2, \dots, x_n , de q variables indépendantes, satisfaisant aux p équations aux différentielles totales

$$(80) \quad \Theta_i' = \sum X_{ik} dx_k = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

où les X_{ik} sont des fonctions données de x_1, x_2, \dots, x_n . M. de Tannenberg remarque que le problème est susceptible d'une simplification, lorsqu'il existe un système d'équations différentielles du premier ordre

$$(81) \quad \frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n} = d\theta,$$

où $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sont des fonctions de x_1, x_2, \dots, x_n , dont l'intégrale générale représentée par les formules

$$(82) \quad x_i = f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \theta)$$

jouit des propriétés suivantes :

1° x_1^0, \dots, x_n^0 désignant les valeurs initiales de x_1, \dots, x_n pour la valeur $\theta = 0$, les fonctions de θ définies par les formules (82), quand on y regarde x_1^0, \dots, x_n^0 comme des constantes, satisfont identiquement aux équations (80);

⁽¹⁾ Sur la Théorie des Équations aux Dérivées partielles (Comptes Rendus, t. CXX, p. 674; 25 mars 1895).

⁽²⁾ Erweiterung eines Pfaffschen Satzes auf simultane totale Differentialgleichungen erster Ordnung und Integration einer Klasse von simultanen partiellen Differentialgleichungen (Crelle, t. CX; 1892).

2° Le système (80) est invariant pour toutes les transformations (82), c'est-à-dire que, quand on regarde θ comme constant, et x_1^*, \dots, x_n^* comme de nouvelles variables, la transformation définie par les formules (82) conduit du système (80) à un nouveau système de même forme

$$(83) \quad \sum_k X_{1k} dx_k^* = 0, \quad \text{où } X_{1k} = X_{1k}(x_1^*, \dots, x_n^*).$$

Dans ces conditions, pour obtenir une solution du problème proposé, il suffira évidemment de remplacer, dans les formules (82), $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ par des fonctions de $(q-1)$ variables, satisfaisant identiquement au système (83). Il y a donc une simplification.

Pour montrer comment la remarque précédente s'applique aux systèmes en involution, reprenons encore un système formé de deux équations du second ordre

$$\begin{aligned} r + f(x, y, z, p, q, s) &= 0, \\ t + \varphi(x, y, z, p, q, s) &= 0. \end{aligned}$$

Intégrer ce système revient au fond à trouver six fonctions x, y, z, p, q, s de deux variables indépendantes satisfaisant aux équations aux différentielles totales

$$(84) \quad \begin{cases} dz - p dx - q dy = 0, \\ dp + f dx - s dy = 0, \\ dq - s dx + \varphi dy = 0. \end{cases}$$

Considérons, d'autre part, le système d'équations différentielles

$$(85) \quad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{dz}{p + q \frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{dp}{-f + s \frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{dq}{s - \varphi \frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{ds}{-\left(\frac{df}{dy}\right)} = d\theta;$$

il est clair que toute intégrale du système (83) vérifie identiquement les équations (84), et les calculs du n° 124 prouvent que la seconde condition de M. de Tannenberg est vérifiée également, si le système proposé est en involution. Nous retrouvons donc les conclusions énoncées plus haut. La remarque s'applique aussi aux systèmes formés d'une équation du deuxième ordre et d'une équation d'ordre n .

Étant donné un système d'équations aux différentielles totales de la forme (80), on verra dans la note citée comment on peut reconnaître s'il existe des fonctions $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, telles que les intégrales du sys-

tème (81) satisfassent aux conditions énoncées. Ces n fonctions ξ_i doivent vérifier des équations du premier degré dont le nombre est supérieur à n ; pour que la simplification soit possible, il faut et il suffit que ce système du premier degré soit compatible.

149. Quoique l'objet principal de ce chapitre soit l'étude des systèmes en involution, nous démontrerons, en terminant, quelques résultats dus à M. König⁽¹⁾, qui se rattachent aux considérations développées au début de ce chapitre. Cherchons d'abord les conditions pour que les deux équations

$$(86) \quad \begin{cases} r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0, \\ u(x, y, z, p, q, s, t) = a, \end{cases}$$

forment un système complètement intégrable. En différentiant ces deux équations, il vient, pour déterminer les dérivées du troisième ordre, les quatre relations

$$(87) \quad \begin{cases} \left(\frac{df}{dx}\right) + p_{10} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{11} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{12} = 0, \\ \left(\frac{df}{dy}\right) + p_{20} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{21} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{22} = 0, \\ \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} p_{11} + \frac{\partial u}{\partial t} p_{12} = 0, \\ \left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} p_{21} + \frac{\partial u}{\partial t} p_{22} = 0, \end{cases}$$

d'où on pourra tirer les valeurs de p_{12} , p_{21} , p_{11} , p_{22} pourvu que le déterminant

$$(88) \quad \Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2$$

ne soit pas nul. Si Δ était nul, l'élimination des dérivées du troisième ordre conduirait à une autre relation $v(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, et le système proposé ne pourrait être complètement intégrable, à moins que v ne soit identiquement nul; dans ce cas, le système (86) serait en involution.

Supposons donc que Δ ne soit pas nul. Les équations (87) nous donnent les dérivées du troisième ordre en fonction de x, y, z, p, q, s, t , et, pour que le système proposé soit complètement intégrable, il faut

⁽¹⁾ *Mathematische Annalen*, t. XXIV.

et il suffit que les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial p_{10}}{\partial y} = \frac{\partial p_{11}}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_{21}}{\partial y} = \frac{\partial p_{22}}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_{32}}{\partial y} = \frac{\partial p_{33}}{\partial x},$$

soient vérifiées identiquement, quand on exprime ces dérivées au moyen de x, y, z, p, q, s, t . Or, d'après une remarque déjà faite (n° 118), on obtient ces conditions d'intégrabilité en exprimant que les huit équations obtenues en différentiant les quatre équations (87) déterminent un système de valeurs unique pour les dérivées du quatrième ordre, c'est-à-dire se réduisent à cinq équations distinctes. Or, les quatre équations obtenues en différentiant les deux premières se réduisent évidemment à trois, de même que les quatre équations obtenues en différentiant les deux dernières. On n'a donc en tout que six équations pour calculer les cinq dérivées du quatrième ordre, et, en écrivant qu'elles sont compatibles, on a une seule équation de condition

$$(89) \quad R = 0.$$

Le premier membre R renferme les variables x, y, z, p, q, s, t , et les dérivées premières et secondes de u par rapport à ces variables; de plus, c'est une fonction entière de ces dérivées et, d'après la façon même dont on l'a obtenu, les dérivées du second ordre y entrent linéairement. Donc, pour que l'équation $u = a$ forme avec $r + f = 0$ un système complètement intégrable, il faut que u vérifie une seule équation du second ordre $R = 0$.

Réciproquement, toute intégrale u de l'équation $R = 0$, ne vérifiant pas la relation $\Delta = 0$, donne lieu à un système complètement intégrable

$$u = a, \quad r + f = 0;$$

de ces équations et des relations (87) on peut, en effet, déduire les valeurs des dérivées du second et du troisième ordre en fonction de x, y, z, p, q et d'une des dérivées s et t , de t par exemple. Les conditions d'intégrabilité étant vérifiées identiquement, on peut choisir arbitrairement les valeurs initiales de z, p, q, t pour des valeurs données (x_0, y_0) des variables indépendantes, et le système (86) admet une intégrale dépendant de quatre constantes arbitraires, en outre de a ,

$$z = F(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a);$$

elle contient donc en tout cinq paramètres, a, a_1, a_2, a_3, a_4 , et, par suite, c'est une *intégrale complète* de l'équation du second ordre propo-

sée

$$r + f = 0.$$

On verra aisément que toute intégrale complète peut, en général, s'obtenir de cette façon.

Prenons plus généralement un système formé d'une équation du second ordre et d'une équation d'ordre quelconque

$$(90) \quad \begin{cases} r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0, \\ u(x, y, z, p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,n-1}; p_{2,1}, \dots, p_{2,n}) = 0, \end{cases}$$

où on suppose que u ne renferme plus que les dérivées $p_{i,k}$, où l'indice i a l'une des valeurs 0, 1. On a, pour calculer les dérivées d'ordre $(n+1)$, $p_{2,n+1}$, $p_{1,n}$, $p_{2,n-1}$, les trois relations

$$(91) \quad \begin{cases} \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) + p_{2,n-1} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,n} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{2,n+1} = 0, \\ \left(\frac{du}{dx} \right) + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} p_{2,n-1} + \frac{\partial u}{\partial p_{2,n}} p_{1,n} = 0, \\ \left(\frac{du}{dy} \right) + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n} + \frac{\partial u}{\partial p_{2,n}} p_{2,n+1} = 0. \end{cases}$$

Si le déterminant

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial p_{2,n}} \right)^2 - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial p_{2,n}} \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} + \frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} \right)^2$$

n'est pas nul, on pourra donc calculer les dérivées d'ordre $(n+1)$ en fonction des précédentes. Pour que le système (90) soit complètement intégrable, il faut encore que les six équations obtenues, en différentiant les équations (91) par rapport à x et par rapport à y , admettent un système de solutions communes en $p_{2,n-1}$, $p_{2,n}$, $p_{1,n+1}$, $p_{2,n+2}$, c'est-à-dire se réduisent à quatre équations. Or, comme les quatre dernières équations se réduisent à trois, on obtient encore une seule équation de condition

$$R = 0,$$

renfermant $x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{1,n-1}; p_{2,1}, \dots, p_{2,n}$, les dérivées premières et secondes de u , et linéaire par rapport aux dérivés du second ordre. Toute solution u de l'équation $R = 0$, n'annulant pas Δ , fournit un système complètement intégrable

$$r + f = 0, \quad u = a,$$

dont l'intégrale générale renferme $2n+1$ constantes arbitraires, $a, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$.

CHAPITRE VII

LA MÉTHODE DE M. DARBOUX

Rappel des théorèmes énoncés par M. Darboux. — Étude du cas où les deux familles de caractéristiques admettent deux combinaisons intégrables. — Application à divers exemples. — Cas où une seule des familles de caractéristiques admet deux combinaisons intégrables. — Solution du problème de Cauchy. — Comparaison avec la méthode d'Ampère. — Théorèmes divers sur les invariants. — Détermination des équations intégrables, ne possédant qu'un système de caractéristiques. — Retour sur les équations linéaires. — Discussion de l'équation $s = f(z)$, d'après M. Sophus Lie. — Autres exemples. — Application de la théorie des groupes infinis. — La méthode de M. Julius König.

150. Pendant de longues années, après la publication des *Mémoires d'Ampère* (1814-1819), il n'a été ajouté rien d'essentiel à la théorie qu'il avait développée; on ne peut signaler que quelques perfectionnements de détail, ou quelques changements de forme plus ou moins heureux. L'année 1870 marque une date importante dans l'histoire de cette théorie; c'est en effet en mars 1870 que fut présenté à l'Académie des Sciences ⁽¹⁾ un remarquable *Mémoire* de M. Darboux, où se trouvent des vues profondes et originales. D'après un passage assez obscur du *Mémoire d'Ampère* ⁽²⁾, il semble que l'illustre géomètre avait eu quelque vague intuition de cette nouvelle méthode; mais il s'est borné à quelques courtes indications, et ce passage, d'ailleurs très confus, ne paraît pas avoir appelé l'attention qu'il méritait. Depuis 1870, un certain nombre de géomètres ont développé des méthodes se rapprochant plus ou moins de celle de M. Darboux; d'autres travaux ont eu pour but, soit d'étendre cette méthode à des équations plus générales, soit d'en faire des applications. Parmi les travaux qui nous sont connus,

⁽¹⁾ *Comptes Rendus*, t. LXX, p. 673 et 746; *Annales de l'École normale*, t. VII, première série (1870).

⁽²⁾ Ce passage est reproduit plus loin (Note de la page 141).

nous citerons ceux de M. Falk ⁽¹⁾, de Picart ⁽²⁾, de M. Hamburger ⁽³⁾, de M. Winckler ⁽⁴⁾, de M. Julius König ⁽⁵⁾, de M. Victor Sersawy ⁽⁶⁾, de M. de Boer ⁽⁷⁾, de M. A. W. Speckman ⁽⁸⁾, de M. Maurice Lévy ⁽⁹⁾, de M. Sophus Lie ⁽¹⁰⁾, de M. Beudon ⁽¹¹⁾, de M. E. von Weber ⁽¹²⁾, de M. Sonine ⁽¹³⁾, etc.

Nous reproduirons d'abord les passages les plus importants du Mémoire de M. Darboux. Après avoir établi les équations différentielles des caractéristiques du second ordre pour une équation du second ordre de forme quelconque et rappelé la simplification qui se présente pour une équation de la forme considérée par Monge et Ampère, M. Darboux continue ainsi :

« On a vu, dans les deux paragraphes précédents, que le problème des équations d'ordre supérieur se sépare très nettement du problème relatif aux équations du premier ordre. Pour le premier ordre, en effet, la méthode du changement de variables ramène la question à l'intégration d'un système complet d'équations aux dérivées ordinaires. Pour le second ordre, et pour les

(1) FALK, « On the integration of partial differential equations of the n^{th} order ». *Nova Acta Regiæ Soc. Ups. Sér. III*, vol. 8, 1872.

(2) PICART, *Comptes Rendus*, t. LXXVIII, p. 882-883, 1874.

(3) HAMBURGER, *Journal de Crelle*, Bd. 81, 1876 et Bd. 93, 1882.

(4) WINCKLER, « Ueber eine neue Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung » (*Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften*. Wien, Abth. II, Bd. 88 et 89, 1883-1884).

(5) J. KÖNIG, « Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung » (*Mathematische Annalen*, t. XXIV; 1884). L'important mémoire de M. König sera analysé plus loin.

(6) SERSAWY, « Die Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung » (*Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*. Wien, Math. Naturw. Classe, Bd. 49; 1885).

(7) F. DE BOER, « Application de la méthode de Darboux à l'intégration de l'équation différentielle $s = f(r, l)$ » (*Archives néerlandaises*, t. XXVII, p. 335-412).

(8) H. A. W. SPECKMAN, « La méthode de Darboux pour l'intégration des équations aux dérivées partielles, non linéaires, du second ordre » (*Archives néerlandaises*, t. XXVII; p. 303-351). On trouve dans ce travail une analyse succincte des Mémoires qui viennent d'être cités.

(9) MAURICE LÉVY, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXV (1872), p. 1.094.

(10) SOPHUS LIE, « Zur Theorie der Flächen Constanten Krümmung » (*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, t. V; 1880).

« Discussion der Differentialgleichungen » = F (z) (*id.* 1880).

« Résumé d'une théorie d'intégration » (*Forhandlinger Videnskabs-Selskabet i Christiania*, 1880).

« Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung » (*Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft*; 1893).

(11) *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 28 mai 1894; 11 février 1895; 29 avril 1895; 2 décembre 1895; Thèse de Doctorat.

(12) *Mathematische Annalen*, t. XLVII; p. 229-272; *Sitzungsberichte der Mathematisch-Physikalischen Classe der k. Bayer Akademie der Wissenschaften*, Bd. 25 et 26.

(13) Le Mémoire de M. Sonine, publié dans un recueil russe, est analysé dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. X, 1^{re} série, p. 96.

ordres supérieurs, il y a, au contraire, moins d'équations que d'inconnues à déterminer. Les remarques qui suivent paraissent accuser aussi une différence profonde entre les deux problèmes.

Puisque, dans le cas où l'on se borne aux inconnues x, y, z, p, q, r, s, t , on a une équation de moins qu'il ne faudrait pour la solution cherchée du problème, il est naturel de se demander si, en adjoignant aux inconnues précédentes les quatre dérivées partielles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, du troisième ordre, on ne parviendrait pas à un nombre d'équations suffisant pour déterminer comme fonctions de x , non seulement les inconnues primitives, mais aussi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Il se présente ici un fait important et qui, je crois, n'a pas été remarqué. *Le nombre des équations est encore inférieur d'une unité au nombre des fonctions inconnues.* Ces équations ne suffisent donc pas à déterminer les inconnues, considérées comme fonctions de la seule variable x ; mais la différence entre le nombre des équations et celui des fonctions inconnues reste la même qu'auparavant : elle est égale à l'unité. Il en est de même si, au lieu de s'arrêter au troisième ordre, on continue les calculs jusqu'à un ordre quelconque : *il y a toujours une équation de moins qu'il n'y a d'inconnues.*

Les résultats précédents établissent, on le voit, une différence essentielle entre les équations aux dérivées partielles du premier ordre et celles des ordres supérieurs. Pour les équations du premier ordre, le nombre des équations contenant seulement les dérivées par rapport à x est toujours égal au nombre des fonctions inconnues. Il n'en est plus de même pour les équations d'ordre supérieur. Pour l'équation de Monge, par exemple, on n'a que trois relations pour déterminer z, p, q, y , considérées comme fonctions de x . On sait tout le parti que l'on tire, d'ailleurs, de ces relations différentielles : toutes les fois qu'elles offrent deux combinaisons intégrables, on peut résoudre l'équation aux dérivées partielles proposée, ou du moins la ramener à une équation du premier ordre.

Les remarques que nous avons faites indiquent de même, pour les équations du second ordre, la méthode suivante :

On essaiera de trouver, en dehors de l'équation proposée, deux combinaisons intégrables des équations en y, z, p, q, r, s, t . Si ces combinaisons existent dans les deux systèmes que l'on obtient en prenant successivement pour $\frac{\partial y}{\partial x}$ les deux racines de l'équation

$$R \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - S \frac{\partial y}{\partial x} + T = 0,$$

le problème pourra être considéré comme entièrement résolu ; si l'on n'a pas de combinaison intégrable, on aura recours aux équations qui contiennent les dérivées du troisième ordre. *Alors même que les premières équations ne fourniraient pas de combinaison susceptible d'intégration, le second système formé avec les dérivées prises jusqu'au troisième ordre pourra en donner.* Si ce système n'est pas susceptible d'intégration partielle, on ira jusqu'aux dérivées du quatrième ordre, et l'on pourra avoir des combinaisons intégrables ; et ainsi de suite.

La remarque précédente me paraît conduire à une méthode plus générale

que celles qui sont habituellement employées. On peut, du reste, présenter cette méthode sous un autre point de vue qui permet d'obtenir plus facilement les systèmes successifs que l'on aura à intégrer partiellement.

Supposons que l'un quelconque de nos systèmes conduise à deux combinaisons intégrables

$$F(x, y, z, p, q, \dots) = C^0,$$

$$F_1(x, y, z, p, q, \dots) = C^1.$$

Les deux constantes qui figurent dans ces équations doivent être considérées comme des fonctions d'une même variable; en éliminant cette variable, on est conduit à une équation de la forme

$$F = \text{fonction arbitraire de } F_1.$$

Cette dernière relation peut être considérée comme une nouvelle équation aux dérivées partielles, compatible avec la première, et qui admet en commun avec elle une intégrale avec une fonction arbitraire. Nous sommes donc conduits à la solution de la question suivante, qui répond à ce deuxième mode d'exposition :

Trouver une équation aux dérivées partielles

$$V = a$$

du n^{me} ordre, admettant, en commun avec la proposée, une solution contenant au moins une fonction arbitraire.

Pour cela, il suffit de remarquer que la proposée, différenciée $n - 1$ fois, donne n équations contenant les dérivées d'ordre $n + 1$, au nombre de $n + 2$. L'équation $V = a$, différenciée successivement par rapport à x et par rapport à y , donne deux équations contenant, elles aussi, les dérivées d'ordre $n + 1$. On a donc en tout $n + 2$ équations contenant linéairement les dérivées d'ordre $n + 1$, et qui déterminent ces $n + 2$ dérivées en fonction des dérivées d'ordre inférieur, si les deux équations aux dérivées partielles dont on cherche la solution commune sont prises arbitrairement. Mais ici, cela ne doit pas être; sans cela les dérivées d'ordre supérieur à $n + 1$ se détermineraient toutes, comme les dérivées d'ordre $n + 1$, en fonction des dérivées d'ordre moindre; puisque une fois obtenues toutes les dérivées d'ordre $n + 1$ en fonction des dérivées d'ordre inférieur, on n'aurait qu'à dériver toutes les équations qui donneraient chacune de ces dérivées pour avoir les dérivées d'ordre supérieur; et la solution commune, si elle existait, ne pourrait contenir tout au plus qu'un nombre limité de constantes arbitraires. Il faut donc que ces $n + 2$ équations contenant linéairement les $n + 2$ dérivées d'ordre $n + 1$ forment un système indéterminé, ce qui donne deux équations de condition. Comme deux des équations contiennent les dérivées de V , $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$, ..., les relations de condition doivent être considérées comme deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, auxquelles doit

satisfaire la fonction V . Ces équations sont homogènes et du second degré par rapport aux dérivées.

Ce qui précède explique et généralise la remarque par laquelle Bour a établi que l'on peut toujours reconnaître si l'application des méthodes de Monge et d'Ampère pourra réussir. Bour n'avait examiné que le premier cas, celui où on suppose que l'équation du second ordre a une intégrale intermédiaire.

Les deux méthodes que nous venons d'indiquer se retrouvent d'ailleurs dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. La première, fondée sur le changement de variables, est due, comme on sait, à l'illustre Cauchy, qui l'a donnée en 1819. La seconde a été introduite dans la science et développée par Jacobi. C'est en essayant d'établir un lien entre les deux méthodes que j'ai été amené à l'étude dont les résultats principaux ont été résumés ici.

La seconde méthode permet de se rendre compte simplement du nombre des intégrations qui sont nécessaires pour la solution complète du problème; mais il est indispensable qu'avant de traiter ce point, nous entrions dans quelques explications.

Soit une équation aux dérivées partielles d'ordre n

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 - 1 \partial y}, \dots\right) = 0.$$

Désignons par R_n, R_{n-1}, \dots , les dérivées du premier membre de l'équation prises par rapport aux dérivées d'ordre $n, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 - 1 \partial y}, \dots$. Nous appellerons *équation caractéristique* de l'équation aux dérivées partielles l'équation suivante à une inconnue u

$$R_n u^n + R_{n-1} u^{n-1} + \dots = 0.$$

Par exemple, pour l'équation du second ordre, cette équation caractéristique serait

$$Ru^2 + Su + T = 0.$$

Cette définition une fois comprise, il est facile de compléter un résultat énoncé plus haut. Pour que l'équation proposée

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

et l'équation aux dérivées partielles $V = a$ aient une solution commune avec une fonction arbitraire, il faut d'abord que l'équation caractéristique de l'équation $V = a$ admette une racine de l'équation

$$Ru^2 + Su + T = 0.$$

On voit donc que les équations $V = a$ que nous cherchons se partagent en deux classes, suivant qu'elles appartiennent à l'une ou à l'autre des

racines de l'équation précédente. Pour la solution complète du problème, il suffit d'avoir une équation de chaque classe, contenant elle-même une fonction arbitraire. Un nombre quelconque d'équations différentielles appartenant à la même classe ne peut donner l'intégrale complète de notre équation. Il est, du reste, évident que si l'équation

$$Ru^2 + Su + T = 0$$

est irréductible, si $S^2 - 4RT$ n'est pas carré parfait, il suffira de changer dans une intégrale le signe du radical pour en obtenir une nouvelle.

Ainsi, dans le cas où l'équation caractéristique est irréductible, il suffit, pour la solution complète du problème, que l'un des systèmes à intégrer fournisse deux combinaisons intégrables correspondant à la même racine de l'équation irréductible. Si l'on n'a pas le nombre voulu de combinaisons intégrables, on n'aura évidemment que des solutions particulières.

Les méthodes précédentes réussissent toujours, il est facile de le démontrer, toutes les fois que les intégrales seront de celles qu'Ampère appelle *intégrales de la première classe*, et qui ne contiennent pas de signe d'intégration. »

151. La plupart des propositions énoncées dans ce qui précède ont été démontrées au chapitre VI. En particulier, on a établi directement qu'il revenait au même de rechercher les combinaisons intégrables des équations différentielles des caractéristiques d'une équation du second ordre $F = 0$, ou de chercher les équations $V = a$ du n^{me} ordre, qui ont en commun avec la proposée une solution dépendant d'une infinité de constantes arbitraires. Le seul point qui demande à être examiné de plus près est le suivant.

Supposons que les équations différentielles de l'un des systèmes de caractéristiques d'ordre n de l'équation proposée $F = 0$ admettent deux combinaisons intégrables distinctes

$$du = 0, \quad dv = 0,$$

l'une au moins des fonctions u et v renfermant les dérivées d'ordre n . Soit (S) une surface intégrale de l'équation $F = 0$; le long d'une caractéristique du système considéré, située sur (S) , u et v restent constants. Ce sont donc des fonctions d'une seule variable indépendante et, par suite, elle sont fonctions l'une de l'autre. Toute intégrale de l'équation proposée satisfait donc aussi à une équation de la forme

$$u = \varphi(v).$$

Inversement, quelle que soit la fonction φ , l'équation

$$d[u - \varphi(v)] = 0$$

est une combinaison des équations différentielles des caractéristiques; les équations

$$F = 0, \quad u - \varphi(v) = 0$$

forment donc toujours un système en involution. On appelle quelquefois l'équation $u - \varphi(v) = 0$ une *intégrale intermédiaire* de l'équation du second ordre $F = 0$.

La proposition précédente, qui est fondamentale, s'établit aisément par le calcul. Pour fixer les idées, supposons l'équation du second ordre résolue par rapport à r

$$(1) \quad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0,$$

et soient m_1, m_2 les deux racines de l'équation caractéristique

$$m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Nous admettons de plus que u et v sont deux intégrales distinctes du système d'équations simultanées

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_{i,n}} = m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{i,n-1}}, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial p_{i,n-1}} \left(\frac{d^2 \varphi}{dy^2} - 1\right);$$

on suppose, comme plus haut, que u et v ne renferment que les dérivées p_{ik} où i est ≤ 2 . Cela posé, je dis que, si dans u et v on remplace x par une intégrale quelconque de l'équation (1) et p_{ik} par $\frac{\partial^{ik} x}{\partial x \partial y^k}$, le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$$

est identiquement nul. On a, en effet,

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{i,n}} p_{i,n} + \frac{\partial u}{\partial p_{i,n-1}} p_{i,n-1} & \left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial v}{\partial p_{i,n}} p_{i,n} + \frac{\partial v}{\partial p_{i,n-1}} p_{i,n-1} \\ \left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{i,n}} p_{i,n+1} + \frac{\partial u}{\partial p_{i,n-1}} p_{i,n} & \left(\frac{dv}{dy}\right) + \frac{\partial v}{\partial p_{i,n}} p_{i,n+1} + \frac{\partial v}{\partial p_{i,n-1}} p_{i,n} \end{vmatrix};$$

si on multiplie les éléments de la seconde ligne par m_2 et qu'on ajoute à ceux de la première ligne, les deux éléments de la première ligne du nouveau déterminant sont nuls. On a, par exemple, pour le premier élément

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{i,n-1}} p_{i,n-1} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial p_{i,n}} + m_2 \frac{\partial u}{\partial p_{i,n-1}} \right\} p_{i,n} + m_2 \frac{\partial u}{\partial p_{i,n}} p_{i,n+1},$$

c'est-à-dire, en tenant compte des équations (2) et des relations

$$m_1 + m_2 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m_1 m_2 = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \right) + p_{1,n-1} + \frac{\partial f}{\partial x} p_{1,n} + \frac{\partial f}{\partial x} p_{1,n+1} \right\},$$

et le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}$ est nul évidemment lorsque x est une intégrale de l'équation (1), et que l'on remplace p_n par

$$\frac{\partial^{n+k}}{\partial x^k \partial y^n}.$$

L'équation $\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 0$ est donc une conséquence de l'équation

$$r + f = 0.$$

152. Considérons d'abord, avec M. Darboux, le cas où chacun des deux systèmes de caractéristiques admet deux combinaisons intégrables, de sorte que l'équation du second ordre $F = 0$ admet deux intégrales intermédiaires distinctes, appartenant à deux systèmes de caractéristiques différents et n'étant pas nécessairement du même ordre

$$u - \varphi(v) = 0, \quad u_1 - \psi(r_1) = 0.$$

Toute intégrale de l'équation du second ordre vérifie ainsi deux équations de la forme précédente, et inversement, quelles que soient les fonctions φ et ψ , les trois équations simultanées

$$F = 0, \quad u - \varphi(v) = 0, \quad u_1 - \psi(r_1) = 0$$

forment un système complètement intégrable, dont l'intégrale générale, qui dépend d'un nombre fini de constantes, peut être obtenue par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires (n° 142, 143).

Lorsque u, v, u_1, v_1 , ne renferment que les dérivées du premier ordre, l'équation du second ordre considérée est nécessairement de la forme

$$Hr + 2Ks + L + M + N(rt - s^2) = 0$$

et appartient à la classe étudiée aux n° 41-43. Le cas le plus simple après celui-là est celui où u, v, u_1, v_1 , ne renferment aucune dérivée

d'ordre supérieur au second. Pour intégrer le système

$$F = 0, \quad u = \varphi(v), \quad u_1 = \psi(v_1).$$

introduisons deux variables auxiliaires α et β , en posant

$$v = \alpha, \quad u = \varphi(\alpha), \quad v_1 = \beta, \quad u_1 = \psi(\beta);$$

de ces quatre équations et de $F = 0$, on peut tirer cinq des huit variables x, y, z, p, q, r, s, t , en fonction des trois autres et de $\alpha, \beta, \varphi(\alpha), \psi(\beta)$. En remplaçant ces cinq variables par leurs valeurs dans les relations

$$dz = p dx + q dy, \quad dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy,$$

on est conduit à un système complètement intégrable d'équations aux différentielles totales pour déterminer les trois variables restantes en fonction de α et β . On ne pourra, en général, achever l'intégration tant qu'on n'aura pas particularisé les fonctions φ et ψ .

Nous allons appliquer la méthode à quelques exemples.

Exemple I. — Soit à intégrer l'équation de Liouville (I, p. 97)

$$(3) \quad s = e^z;$$

les équations différentielles des caractéristiques du second ordre sont respectivement

$$(I) \quad dx = 0, \quad dz = q dy, \quad dp = e^z dy, \quad dq = t dy, \quad dr = p e^z dy;$$

$$(II) \quad dy = 0, \quad dz = p dx, \quad dp = r dx, \quad dq = e^z dx, \quad dt = e^z q dx.$$

Le système (I) admet les deux combinaisons intégrables $dx = 0$, $d\left(r - \frac{p^2}{2}\right) = 0$, et le système (II) admet de même les deux combinaisons intégrables $dy = 0$, $d\left(t - \frac{q^2}{2}\right) = 0$. Il existe donc, pour l'équation (3), deux intégrales intermédiaires distinctes du second ordre,

$$r - \frac{p^2}{2} = \varphi(x), \quad t - \frac{q^2}{2} = \psi(y),$$

et l'intégration de l'équation $s = e^z$ est ramenée à celle du système

complètement intégrable

$$dz = p dx + q dy,$$

$$dp = \left\{ \frac{p^2}{2} + \varphi(x) \right\} dx + e^z dy,$$

$$dq = e^z dx + \left\{ \frac{q^2}{2} + \psi(y) \right\} dy,$$

qui est lui-même équivalent à un système de six équations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p^2}{2} + \varphi(x),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = e^z,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = e^z,$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{q^2}{2} + \psi(y);$$

la dernière équation $\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{q^2}{2} + \psi(y)$ a déjà été intégrée (I, p. 96). En mettant la fonction arbitraire $\psi(y)$ sous une forme convenable, on a vu que l'intégrale générale peut s'écrire :

$$q = \frac{Y''}{Y'} - \frac{2Y'}{X + Y},$$

X et Y étant des fonctions arbitraires de x et de y respectivement. On tire ensuite z de la relation

$$\frac{\partial q}{\partial x} = e^z,$$

ce qui donne pour z une expression de la forme

$$e^z = \frac{2X'Y'}{(X + Y)^2},$$

et on vérifie que, quels que soient X et Y, cette fonction z est une intégrale de l'équation proposée.

Exemple II. — Soit à intégrer l'équation

$$(4) \quad r - qs + pt = 0.$$

Les deux racines de l'équation caractéristique sont ici :

$$m_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2}, \quad m_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2}.$$

En se bornant aux dérivées du second ordre, les caractéristiques de l'un des systèmes sont définies par les équations

$$\begin{aligned} dy &= m_1 dx, & dx &= (p + qm_1) dx, & dp &= (qs - pt + sm_1) dx, \\ dq &= (s + tm_1) dx, & ds + m_2 dt &= 0. \end{aligned}$$

On a une première combinaison intégrable provenant de la multiplication par un facteur convenable de

$$dp + m_2 dq = 0;$$

c'est une équation de Clairaut dont l'intégrale générale est $m_2 = C$. La dernière équation donne alors une nouvelle intégrale $s + m_2 t = C'$; de sorte que l'équation proposée admet l'intégrale intermédiaire

$$s + m_2 t = \varphi(-m_2);$$

l'équation caractéristique étant irréductible, le second système de caractéristiques donne une autre intégrale intermédiaire

$$s + m_1 t = \psi(-m_1).$$

Pour appliquer la méthode générale, posons $m_2 = -\alpha$, $m_1 = -\beta$, et par suite $s - \alpha t = \varphi(\alpha)$, $s - \beta t = \psi(\beta)$. On tire de ces relations et de l'équation proposée elle-même

$$\begin{aligned} p &= \alpha\beta, & q &= \alpha + \beta, & r &= \frac{\beta^2 \varphi(\alpha) - \alpha^2 \psi(\beta)}{\beta - \alpha}, & s &= \frac{\beta \varphi(\alpha) - \alpha \psi(\beta)}{\beta - \alpha}, \\ t &= \frac{\varphi(\alpha) - \psi(\beta)}{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Les valeurs de p , q , r , s , t substituées dans les relations

$$\begin{aligned} dp &= r dx + \alpha dy, \\ dq &= s dx + t dy, \end{aligned}$$

nous donnent

$$\begin{aligned} dx &= \frac{d\alpha}{\varphi(\alpha)} + \frac{d\beta}{\psi(\beta)}, \\ dy &= -\frac{\alpha d\alpha}{\varphi(\alpha)} - \frac{\beta d\beta}{\psi(\beta)}; \end{aligned}$$

on a ensuite

$$ds = p dx + q dy = -\frac{\alpha^2 d\alpha}{\varphi(\alpha)} - \frac{\beta^2 d\beta}{\psi(\beta)},$$

et il suffirait de remplacer $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ par $\frac{1}{\varphi'''(\alpha)}$ et $\frac{1}{\psi'''(\beta)}$ respectivement pour avoir les expressions de x , y , z , débarrassées de tout signe de quadrature. Remarquons que les surfaces intégrales sont des surfaces de translation, les tangentes aux courbes des deux familles, dont la translation engendre la surface, restant parallèles aux génératrices du cône $y^2 + xz = 0$.

158. La méthode de M. Darboux s'applique aussi avec succès à l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima et, en général, à toute équation du second ordre qui définit des surfaces de translation. Il est aisé de s'en rendre compte *a priori*. Toute surface de translation est engendrée par la translation d'une courbe (Γ) , dont les tangentes sont parallèles aux génératrices d'un certain cône (T) représenté par l'équation

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0,$$

l'un des points de cette courbe (Γ) décrivant une autre courbe (Γ') dont les tangentes sont parallèles aux génératrices d'un second cône (T') , différent ou non du premier et ayant pour équation

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0.$$

On sait que, dans ce mouvement, tout point de la courbe (Γ) décrit une courbe égale à (Γ') et que la surface peut aussi être engendrée par le mouvement de translation d'une courbe (Γ') le long d'une courbe (Γ) . Les courbes (Γ) et (Γ') de chaque surface constituent les deux familles de caractéristiques. Pour montrer que la méthode de M. Darboux est applicable à l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces, il suffit de faire voir qu'il existe deux fonctions distinctes de p , q , r , s , t , qui conservent une valeur constante quand on se déplace sur une caractéristique. Prenons, par exemple, une courbe (Γ') ; par chaque point de (Γ') passe une courbe (Γ) située sur la surface; soient

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x),$$

les équations de cette courbe; puisque la surface est engendrée par la translation de (Γ) , les valeurs de y' , z' , y'' , z'' , relatives à cette courbe (Γ) sont les mêmes tout le long de (Γ') . Or on a, pour déterminer y' , z' , y'' , z'' ,

les quatre équations

$$F(y', s') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} y' + \frac{\partial F}{\partial s'} s' = 0,$$

$$s' = p + qy', \quad s'' = r + 2xy' + ty'' + qy''.$$

qui montrent que y' et s' dépendent de p et de q , tandis que y'' et s'' dépendent de p, q, r, s, t . On a donc, pour les caractéristiques du système (Γ') , deux intégrales premières distinctes.

$$y' = C^u, \quad y'' = C^v,$$

dont la première ne contient que les dérivées du premier ordre, tandis que la seconde contient les dérivées du second ordre. Le même raisonnement s'applique aussi aux caractéristiques (Γ) .

154. Exemple III. — Soit à intégrer l'équation

$$(5) \quad r + f(s) = 0.$$

Les équations des deux systèmes de caractéristiques sont respectivement

$$(I) \quad dy = 0, \quad dz = p dx, \quad dp = -f(s) dx, \quad dq = s dx, \quad ds + f'(s) dt = 0;$$

$$(II) \quad \begin{cases} dy = f'(s) dx, & dz = \{ p + qf'(s) \} dx, \\ dp = \{ sf'(s) - f(s) \} dx, & dq = \{ s + tf'(s) \} dx, & ds = 0; \end{cases}$$

le premier admet deux combinaisons intégrables

$$dy = 0, \quad dt + \frac{ds}{f'(s)} = 0,$$

le second en admet trois

$$ds = 0, \quad d\{y - x f'(s)\} = 0, \quad d\{p + x f(s) - x s f'(s)\} = 0.$$

On a donc deux intégrales intermédiaires distinctes que nous écrirons :

$$(6) \quad t + F(s) = \psi''(y), \quad y - x f'(s) = \varphi''(s),$$

en posant

$$F(s) = \int \frac{ds}{f'(s)},$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires. Pour plus de symétrie, posons $s = \alpha$, $y = \beta$; les équations (5) et (6) donnent

$$r = -f(\alpha), \quad x = \frac{\beta - \varphi'(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad t = \psi'(\beta) - F(\alpha).$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} dp &= r dx + x dy = d(rx) - x dr + x dy \\ &= d(rx) + \left\{ \beta - \varphi'(\alpha) \right\} d\alpha + x d\beta, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$p = rx + \alpha\beta - \varphi'(\alpha) = \frac{\varphi'(\alpha) - \beta}{f'(\alpha)} f(\alpha) + \alpha\beta - \varphi'(\alpha).$$

On a de même

$$\begin{aligned} dq &= s dx + t dy = d(sx) - x ds + t dy \\ &= d(sx) + \frac{\varphi'(\alpha) - \beta}{f'(\alpha)} d\alpha + \psi'(\beta) d\beta - F(\alpha) d\beta, \end{aligned}$$

et on en tire

$$q = \frac{\beta - \varphi'(\alpha)}{f'(\alpha)} \alpha + \int \frac{\varphi''(\alpha) d\alpha}{f'(\alpha)} + \psi'(\beta) - \beta \int \frac{d\alpha}{f'(\alpha)}.$$

On a z par une nouvelle quadrature

$$z = px + qy - \int (x dp + y dq);$$

on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} x dp + y dq &= (rx + sy) dx + (sx + ty) dy \\ &= \left\{ \alpha\beta - x f(\alpha) \right\} \left\{ \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta \right\} + \left\{ \alpha x + \beta \right\} d\beta, \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$x dp + y dq = d \left\{ \alpha\beta x - \frac{x^2}{2} f(\alpha) \right\} + \left\{ \frac{x^2}{2} f'(\alpha) - \beta x \right\} d\alpha + \beta d\beta.$$

Il vient donc :

$$\int x dp + y dq = \alpha\beta x - \frac{x^2}{2} f(\alpha) + \frac{1}{2} \int \frac{\{\varphi'(\alpha)\}^2 d\alpha}{f'(\alpha)} + \beta \psi'(\beta) - \psi(\beta) - \frac{\beta^2}{2} \int \frac{d\alpha}{f'(\alpha)},$$

et, en portant dans la valeur de z , on a x , y , z , p , q exprimés au moyen de α , β .

intégration des équations.

EXEMPLE IV. — Soit à intégrer l'équation

$$(7) \quad 3rt^3 + 1 = 0.$$

Les deux racines de l'équation caractéristique sont $m_1 = \frac{1}{t^3}$, $m_2 = -\frac{1}{t^3}$.

L'un des systèmes de caractéristiques est défini par les équations

$$\begin{aligned} dy &= \frac{dx}{t^3}, & dx &= \left(p + \frac{q}{t^3}\right) dx, & dp &= \left(\frac{s}{t^3} - \frac{1}{3t^3}\right) dx, \\ dq &= \left(s + \frac{1}{t}\right) dx, & ds - \frac{dt}{t^3} &= 0, \end{aligned}$$

qui admettent les deux intégrales premières

$$s + \frac{1}{t} = C^w, \quad x \left(s + \frac{1}{t}\right) - q = C^w;$$

le second système de caractéristiques admet de même deux intégrales premières

$$s - \frac{1}{t} = C^w, \quad x \left(s - \frac{1}{t}\right) - q = C^w.$$

Conformément à la méthode générale, posons

$$\begin{aligned} s + \frac{1}{t} &= 2\alpha, & 2\alpha x - q &= \varphi''(\alpha), \\ s - \frac{1}{t} &= 2\beta, & 2\beta x - q &= \psi''(\beta), \end{aligned}$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires; on tire de ces équations

$$s = \alpha + \beta, \quad t = \frac{1}{\alpha - \beta}, \quad x = \frac{1}{2} \frac{\varphi''(\alpha) - \psi''(\beta)}{\alpha - \beta}, \quad q = \frac{\beta\varphi''(\alpha) - \alpha\psi''(\beta)}{\alpha - \beta},$$

et l'équation proposée donne ensuite

$$r = \frac{(\beta - \alpha)^3}{3}.$$

Il reste à exprimer y , p et z en fonction de α et de β ; de la relation

$$dq = sdx + tdy,$$

on tire d'abord

$$dy = \frac{dq - sdx}{t} = \frac{d(q - sx) + xds}{t},$$

ou, en remplaçant x, y, s, t , par leurs valeurs et en effectuant les quadratures,

$$y = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) [\varphi''(\alpha) + \psi''(\beta)] + \varphi'(\alpha) - \psi'(\beta).$$

On a ensuite p au moyen de la relation

$$dp = rdx + sdy = d(rx + sy) - xdr - yds,$$

qui donne, en effectuant les quadratures,

$$p = rx + sy + (\alpha - \beta) \{ \varphi'(\alpha) + \psi'(\beta) \} + 2 \{ \psi(\beta) - \varphi(\alpha) \},$$

ou, en remplaçant x, y, r, s par leurs valeurs

$$p = \frac{1}{6}(\alpha - \beta)^2 \{ \varphi''(\alpha) - \psi''(\beta) \} + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \{ \varphi''(\alpha) + \psi''(\beta) \} \\ + 2\alpha\varphi'(\alpha) - 2\beta\psi'(\beta) + 2\psi(\beta) - 2\varphi(\alpha).$$

Enfin, on tirera z de la relation

$$dz = pdx + qdy$$

par une dernière quadrature.

Le dernier exemple est dû à M. de Boer (¹), qui s'est proposé de trouver tous les cas où la méthode de M. Darboux permet d'intégrer une équation de la forme $f(r, s, t) = 0$, en se bornant aux intégrales intermédiaires du second ordre. Sans entrer ici dans l'étude détaillée de cet intéressant problème, nous montrerons comment on peut trouver des cas d'intégrabilité. L'équation étant mise sous la forme

$$(8) \quad r + f(s, t) = 0,$$

soient m_1, m_2 , les deux racines de l'équation caractéristique

$$m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0;$$

les caractéristiques du second ordre sont définies par les équations

$$(9) \quad \begin{cases} dy = m_1 dx, & dz = (p + qm_1) dx, & dp = \{ -f(s, t) + m_1 s \} dx, \\ dq = (s + m_1 t) dx, & ds + m_2 dt = 0, \end{cases}$$

(¹) *Archives néerlandaises*, t. XXVII.

le second système se déduisant du premier en permutant m_1 et m_2 . On a toujours une combinaison intégrable provenant de l'équation $ds + m_2 dt = 0$, puisque m_2 ne renferme que s et t ; soit

$$u(s, t) = C^{\text{te}}$$

cette intégrale première. La fonction u est une intégrale de l'équation du premier ordre

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - m_2 \frac{\partial u}{\partial s} = 0.$$

Pour trouver des cas où il existe une autre intégrale première, il suffit de remarquer que si l'une des fonctions $m_1, sm_1 - f(s, t), s + tm_1$, satisfait à l'équation (10), on a aussitôt une seconde intégrale $y - m_1 x = C^{\text{te}}$, ou $p + [f(s, t) - m_1 s] x = C$, ou $q - (s + tm_1) x = C$. Prenons par exemple le premier cas; pour qu'il se présente, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} - \frac{\partial m_1}{\partial s} m_2 = 0.$$

On a une combinaison analogue pour le second système, pourvu que l'on ait aussi

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} - \frac{\partial m_2}{\partial s} m_1 = 0.$$

On peut remplacer ces deux conditions par les combinaisons suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial (m_1 + m_2)}{\partial t} - \frac{\partial (m_1 m_2)}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial (m_1^2 + m_2^2)}{\partial t} - 2m_1 m_2 \frac{\partial (m_1 + m_2)}{\partial s} &= 0, \end{aligned}$$

pourvu que les racines m_1, m_2 soient distinctes. La première se réduit à une identité, tandis que la seconde devient, en remplaçant $m_1, m_2, m_1 + m_2, m_1^2 + m_2^2$ par leurs valeurs,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = 0;$$

c'est l'équation intégrée plus haut (Exemple II, n° 432) pourvu qu'on y remplace t et s par x et y . On en conclut que toute équation de la forme

$$f(r, s, t) = 0$$

s'intègre de cette façon lorsque, quand on considère r, s, t , comme des coordonnées courantes, cette équation représente une surface de translation, les courbes des deux familles dont la translation engendre la surface ayant leurs tangentes parallèles aux génératrices du cône $s^2 - rt = 0$.

155. Prenons maintenant le cas général où l'équation du second ordre proposée admet deux intégrales intermédiaires d'ordre quelconque, dépendant chacune d'une fonction arbitraire et correspondant à des caractéristiques différentes. Soit

$$(11) \quad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

l'équation du second ordre ; soient

$$du = 0, \quad dv = 0$$

deux combinaisons intégrables distinctes des équations différentielles de l'un des systèmes de caractéristiques,

$$du_1 = 0, \quad dv_1 = 0$$

deux combinaisons intégrables distinctes des équations différentielles du second système de caractéristiques. Appelons m l'ordre des dérivées de l'ordre le plus élevé qui figurent dans u et v , n l'ordre des dérivées de l'ordre le plus élevé qui figurent dans u_1 et v_1 ; nous supposons, pour fixer les idées, $m \leq n$. Des trois équations

$$(12) \quad r + f = 0, \quad u = \varphi(v), \quad u_1 = \psi(v_1),$$

qui forment un système complètement intégrable, et de celles qu'on en déduit par des différentiations répétées, on peut alors tirer l'expression de toutes les dérivées partielles de la fonction inconnue au moyen de $x, y, z, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{1,m-1}; p_{2,1}, \dots, p_{2,n-1}$ (n° 143) et former un système complètement intégrable de $(m + n - 1)$ équations aux différentielles totales.

On peut encore opérer comme plus haut, en introduisant deux nouvelles variables indépendantes α et β . Si on pose, en effet,

$$v = \alpha, \quad v_1 = \beta,$$

on aura aussi $u = \varphi(\alpha)$, $u_1 = \psi(\beta)$. De ces quatre équations, jointes à celles qu'on obtient en différentiant l'équation $r + f = 0$, on peut tirer

les valeurs de plusieurs des anciennes variables

$$x, y, z, p_1, \dots, p_{1, m-1}; p_{2, 1}, \dots, p_{2, n-1}$$

au moyen de $\alpha, \beta, \varphi(\alpha), \psi(\beta)$, et des variables restantes. En substituant dans le système d'équations aux différentielles totales dont il a été question tout à l'heure, on a un nouveau système complètement intégrable d'équations aux différentielles totales entre $(m + n - 1)$ fonctions inconnues $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1}$, et deux variables indépendantes α et β . L'une quelconque des équations de ce système est de la forme

$$(13) \begin{cases} dx_i = F_i[x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1}, \alpha, \beta, \varphi(\alpha), \psi(\beta), \varphi'(\alpha), \psi'(\beta), \dots] d\alpha \\ + \Phi_i[x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1}, \alpha, \beta, \varphi(\alpha), \psi(\beta), \varphi'(\alpha), \psi'(\beta), \dots] d\beta; \end{cases}$$

les coefficients F_i et Φ_i sont des fonctions déterminées de $x_1, x_2, \dots, x_{m+n-1}, \alpha, \beta, \varphi(\alpha), \psi(\beta)$, pouvant aussi renfermer les dérivées $\varphi'(\alpha), \psi'(\beta), \dots$, jusqu'à un ordre fini.

156. EXEMPLE V. — Reprenons encore l'équation

$$(14) \quad z - pz = 0,$$

qui a été intégrée au n° 47. Un des systèmes de caractéristiques admet, comme on l'a reconnu, deux combinaisons intégrables du premier ordre,

$$dy = 0, \quad d\left(q_1 - \frac{z^2}{2}\right) = 0.$$

Les équations différentielles des caractéristiques du second système sont

$$\begin{aligned} dx &= 0, & dz &= q_1 dy, & dq_1 &= q_2 dy, & \dots \\ dp_1 &= p_1 x dy, & dp_2 &= (p_2 x + p_1^2) dy, & dp_3 &= (p_3 x + 3p_1 p_2) dy, & \dots \end{aligned}$$

en posant

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad p_3 = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \dots, q_1 = \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$$

On a d'abord la combinaison intégrable $dx = 0$, et, si l'on pousse jusqu'au troisième ordre, on trouve une nouvelle combinaison intégrable

$$d\left(\frac{3p_3^2 - 2p_2 p_1}{2p_1^2}\right) = 0.$$

Les trois équations :

$$(15) \quad s - p_1 x = 0, \quad q_1 - \frac{x^2}{2} = \varphi(y), \quad \frac{2p_2 p_1 - 3p_1^2}{2p_1^2} = \psi(x)$$

forment donc un système complètement intégrable, quelles que soient les fonctions arbitraires $\varphi(y)$ et $\psi(x)$. Pour intégrer ce système, prenons comme inconnues auxiliaires p_1 et p_2 ; on déduit des équations (15)

$$(15') \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial x} = p_1, & \frac{\partial p_1}{\partial x} = p_2, & \frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{3p_1^2}{2p_1^2} + p_1 \psi(x), \\ \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + \varphi(y), & \frac{\partial p_1}{\partial y} = p_1 x, & \frac{\partial p_2}{\partial y} = p_2 x + p_1^2. \end{cases}$$

et on est conduit à intégrer le système d'équations aux différentielles totales

$$(16) \quad \begin{cases} dx = p_1 dx + \left[\frac{x^2}{2} + \varphi(y) \right] dy, \\ dp_1 = p_2 dx + p_1 x dy, \\ dp_2 = \left[\frac{3p_1^2}{2p_1^2} + p_1 \psi(x) \right] dx + (p_2 x + p_1^2) dy. \end{cases}$$

Pour cela, intégrons d'abord les trois équations (15') de la première ligne ou, ce qui revient au même, l'équation unique du troisième ordre

$$(17) \quad \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}}{\frac{\partial x}{\partial x}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}}{\frac{\partial x}{\partial x}} \right)^2 = \psi(x);$$

le premier membre de cette équation, qui se présente dans l'étude des équations différentielles linéaires du second ordre, ne change pas de forme quand on effectue sur x une substitution linéaire quelconque. Si donc $x = X$ est une intégrale particulière de l'équation (17), l'intégrale générale de cette équation est

$$(18) \quad x = \frac{aX + b}{cX + d},$$

a, b, c, d étant indépendantes de x . Comme $\psi(x)$ est une fonction arbitraire de x , il est clair qu'on peut prendre aussi pour X une fonction arbitraire de x , et l'intégrale générale du système (16) est de la forme

précédente, où a, b, c, d , désignent des fonctions de la seule variable y . On peut encore écrire cette intégrale

$$x = \theta_1(y) + \frac{\theta_2(y)}{X + \theta_3(y)},$$

et si on substitue cette valeur de x dans $\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{x^2}{2}$, en écrivant que le résultat est indépendant de X , on trouve les conditions

$$\theta_2'(y) - \theta_1(y) \theta_3(y) = 0, \quad 2\theta_3'(y) + \theta_2(y) = 0.$$

Soit $\theta_3(y) = Y$; on déduit des conditions précédentes qu'il faut prendre $\theta_2(y) = -2Y'$, $\theta_1(y) = \frac{Y''}{Y'}$, et on retrouve le résultat obtenu plus haut (n° 47).

EXEMPLE VI. — Soit à intégrer l'équation

$$rs - p = 0,$$

à laquelle se ramène, par la transformation de Legendre, l'équation d'Ampère étudiée précédemment (n° 100).

Pour un des systèmes de caractéristiques, on a trois combinaisons intégrables du second ordre

$$d(s - x) = 0, \quad d\left(\frac{s^2}{p}\right) = 0, \quad d\left(y - \frac{p}{s}\right) = 0;$$

pour le second système, on a une combinaison intégrable du premier ordre $dy = 0$, et une combinaison intégrable du troisième ordre,

$$d\left(p_{03} + \frac{s^2}{p} p_{12}\right) = 0.$$

L'intégration de l'équation proposée est donc ramenée à celle du système

$$rs - p = 0, \quad \frac{s^2}{p} = \varphi(s - x), \quad p_{03} + \frac{s^2}{p} p_{12} = \psi(y),$$

avec deux fonctions arbitraires φ et ψ . Si on prend pour inconnues auxiliaires p, q , et t , ce système est équivalent au système complète-

ment intégrable d'équations aux différentielles totales

$$(A) \quad \begin{cases} dz = p dx + q dy, \\ dp = \frac{p}{s} dx + s dy, \\ dq = s dx + t dy, \\ dt = p_{12} dx + p_{03} dy, \end{cases}$$

où on suppose que s est remplacé par sa valeur tirée de l'équation

$$\frac{s^2}{p} = \varphi(s - x);$$

p_{12} et p_{03} s'obtiennent au moyen de la relation obtenue en différentiant la précédente par rapport à y et de la dernière équation

$$p_{03} + \frac{s^2}{p} p_{12} = \psi(y).$$

L'intégration du système (A) présente une simplification, car s étant supposé remplacé par sa valeur, la seconde équation ne renferme plus que les variables x, y, p , et leurs différentielles. Pour l'intégrer, posons

$$p = u^2, \quad s - x = \alpha$$

et remplaçons φ par φ^2 ; il vient $s = u\varphi(\alpha)$, $x = u\varphi(\alpha) - \alpha$, et l'équation

$$dp = \frac{p}{s} dx + s dy$$

devient

$$du = \left[\frac{u\varphi'(\alpha) - 1}{\varphi(\alpha)} \right] d\alpha + \varphi(\alpha) dy.$$

On en déduit

$$u = (y - y_0) \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha) \int \frac{d\alpha}{\varphi^2(\alpha)};$$

l'équation $dz = p dx + q dy$ devient alors :

$$dz = u^2 \{ \varphi(\alpha) du + u\varphi'(\alpha) d\alpha - d\alpha \} + q dy$$

ou encore

$$dz = 2u^2 \{ u\varphi'(\alpha) - 1 \} d\alpha + \{ u^2\varphi^2(\alpha) + q \} dy.$$

Par suite, l'expression générale de z est de la forme

$$z = 2 \int u^2 \{ u_1'(x) - 1 \} dx + Y,$$

et inversement, quelle que soit la fonction Y de y , on obtient ainsi une intégrale de l'équation proposée. On peut ne laisser subsister qu'un seul signe de quadrature en remplaçant $\varphi^2(x)$ par $\frac{1}{\phi'(x)}$.

157. Supposons maintenant qu'un seul des systèmes de caractéristiques, supposés distincts, de l'équation

$$(19) \quad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

admette deux combinaisons intégrables distinctes

$$dv = 0, \quad du = 0,$$

l'une au moins des fonctions u, v , renfermant des dérivées d'ordre n , et aucune ne contenant de dérivée d'ordre supérieur à n . Pour fixer les idées, supposons que u et v soient deux intégrales distinctes du système d'équations

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial p_{n,n}} - m_1 \frac{\partial z}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ \left(\frac{dz}{dx} \right) + m_2 \left(\frac{dz}{dy} \right) - \frac{\partial z}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) = 0, \end{cases}$$

où $m_1, m_2, \left(\frac{dz}{dx} \right), \left(\frac{dz}{dy} \right), \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right)$ ont le même sens que plus haut (Chap. vi). L'équation proposée (19) admet une intégrale intermédiaire d'ordre n

$$(21) \quad u - \phi(v) = 0,$$

avec une fonction arbitraire ϕ ; et inversement, quelle que soit la fonction ϕ , les deux équations

$$r + f = 0, \quad u - \phi(v) = 0$$

forment un système en involution.

Pour résoudre le problème de Cauchy par cette voie, supposons donnée une multiplicité M , d'éléments du premier ordre, c'est-à-dire

une courbe (Γ) dont chaque point est associé à un plan tangent à (Γ) en ce point. Cette multiplicité M_1 détermine en général une surface intégrale admettant tous ces éléments, sauf dans le cas où elle appartiendrait à une caractéristique, cas que nous négligerons. Soit (S) la surface intégrale ainsi déterminée par la multiplicité M_1 ; on peut calculer, comme il a été expliqué (n° 16), les valeurs de toutes les dérivées partielles de la fonction inconnue le long de la courbe (Γ) . Si on substitue les valeurs obtenues dans u et v , ces deux fonctions ne dépendent plus que d'une seule variable, et la relation

$$u - \psi(v) = 0$$

détermine la fonction inconnue ψ . Cette fonction une fois obtenue, le problème revient à trouver l'intégrale du système en involution

$$(22) \quad r + f = 0, \quad u - \psi(v) = 0,$$

qui passe par les ∞^1 éléments du n^{me} ordre définis par la multiplicité M_1 et l'équation $r + f = 0$. Nous savons que cette intégrale est le lieu des caractéristiques d'ordre n communes aux deux équations, issues des ∞^1 éléments du n^{me} ordre dont il vient d'être question.

On obtient ces caractéristiques communes par l'intégration du système d'équations différentielles ordinaires

$$(23) \quad \begin{cases} dy = m_1 dx, & dz = p_{1,0} dx + p_{1,1} dy, \\ dp_{1,0} = p_{2,0} dx + p_{1,1} dy, \dots, dp_{1,n-2} = p_{2,n-2} dx + p_{1,n-1} dy, \\ dp_{1,n-1} = p_{2,n-1} dx + p_{1,n} dy, \dots, dp_{2,n-1} = p_{1,n-1} dx + p_{2,n} dy, \\ \left(\frac{d[u - \psi(v)]}{dx} \right) + \frac{\partial [u - \psi(v)]}{\partial p_{1,n-1}} \frac{dp_{1,n-1}}{dx} = 0, \\ \left(\frac{d[u - \psi(v)]}{dy} \right) + \frac{\partial [u - \psi(v)]}{\partial p_{1,n-1}} \frac{dp_{1,n-1}}{dy} = 0, \end{cases}$$

composé de $2n + 2$ équations entre $2n + 3$ variables $x, y, z, p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,n-1}, p_{2,n}$; les dérivées $p_{2,0}, p_{2,1}, \dots, p_{2,n-2}$ sont supposées remplacées par leurs valeurs.

Ainsi, lorsque l'un des systèmes de caractéristiques d'ordre n présente deux combinaisons intégrables distinctes $du = 0, dv = 0$, la solution du problème de Cauchy est ramenée à l'intégration de deux systèmes successifs d'équations différentielles ordinaires. Le premier de ces systèmes,

qui donne u et v ne dépend pas des conditions initiales. Le second système à intégrer dépend, au contraire, des conditions initiales ⁽¹⁾.

158. La méthode précédente s'applique encore au cas où les deux systèmes de caractéristiques seraient confondus. Lorsque ces deux systèmes sont distincts, on peut la modifier un peu. On a vu en effet (n° 138) que le système d'équations différentielles (23) peut être remplacé par le suivant

$$(24) \quad \begin{cases} dy = m_1 dx, \quad dz = p_{1,0} dx + p_{n,1} dy, \\ dp_{1,0} = p_{2,0} dx + p_{1,1} dy, \quad \dots, \quad dp_{1,n-1} = p_{1,n-1} dx + p_{1,n-1} dy, \\ dp_{n,1} = p_{1,1} dx + p_{n,2} dy, \quad \dots, \quad dp_{n,n-1} = p_{1,n-1} dx + p_{n,n} dy, \\ \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) + \frac{dp_{1,n-1}}{dx} + m_2 \frac{dp_{n,n}}{dx} = 0, \end{cases}$$

auxquelles on ajoute l'équation

$$u - \phi(v) = 0.$$

Introduisons une nouvelle variable auxiliaire α en posant $v = \alpha$ et, par suite, $u = \phi(\alpha)$. De ces équations, on peut tirer deux des variables $x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{n,n}$ en fonction de $\alpha, \phi(\alpha)$ et des $2n + 1$ variables restantes. En substituant les valeurs de ces deux variables dans les équations (24), qui sont précisément les équations différentielles des caractéristiques de l'équation

$$r + f = 0,$$

n'admettant pas les combinaisons intégrables $du = 0, dv = 0$, on est conduit à un système de $2n + 1$ équations différentielles à $2n + 2$ variables pour déterminer les caractéristiques communes aux deux équations

$$r + f = 0, \quad u - \phi(v) = 0.$$

Ainsi présenté, le procédé apparaît comme une généralisation de la

(1) Dans la note déjà citée des *Comptes Rendus* (1872), M. Maurice Lévy annonce qu'il possède une méthode générale pour intégrer toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre, dont l'intégration se ramène à celle de plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires. D'après M. Sophus Lie, cette méthode serait identique, dans ses traits essentiels, à celle qui est développée dans le texte. M. J. König a ramené également la solution du problème de Cauchy à l'intégration d'équations différentielles ordinaires, dans le cas où nous nous plaçons. Sa méthode sera expliquée à la fin du chapitre.

méthode employée par Ampère pour intégrer une équation

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

lorsque l'un des deux systèmes de caractéristiques du premier ordre présente deux combinaisons intégrables distinctes ⁽¹⁾ (n° 54). On peut, du reste, l'établir en généralisant le raisonnement même d'Ampère.

Soit (S) une intégrale de l'équation

$$(23) \quad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0;$$

⁽¹⁾ Lorsque $n = 2$, Ampère avait déjà indiqué sommairement cette méthode. Voici le passage de son Mémoire auquel il est fait allusion plus haut: « Cette réduction des équations qui doivent conduire à l'intégrale primitive à des équations qu'on peut intégrer comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, dont le nombre n'est inférieur que d'une unité à celui des variables, n'a pas lieu seulement lorsque l'équation donnée est de la forme

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

mais elle a lieu de la même manière pour toutes les équations aux différentielles partielles du second ordre susceptibles d'une intégrale intermédiaire. On trouve aussi dans ce cas, par le procédé expliqué dans un des paragraphes précédents, deux équations relatives à x et à z , qui par le changement du signe du radical de la valeur de $\frac{dy}{dx(z)}$, donnent deux autres équations où ce sont x et β qui sont considérés comme variables indépendantes; la seule différence est que, quand les dérivées du second ordre doivent être homogènes à l'intégrale, parce que l'équation donnée contient d'autres puissances ou d'autres produits de ces dérivées que $rt - s^2$, on a nécessairement dans le calcul dix quantités $x, y, z, p, q, r, s, t, \alpha$ et β , entre lesquelles, outre les quatre équations dont nous venons de parler, on a l'équation même donnée et les trois suivantes

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx(\alpha)} &= p + q \frac{dy}{dx(\alpha)}, \\ \frac{dp}{dx(\alpha)} &= r + s \frac{dy}{dx(\alpha)}, \\ \frac{dq}{dx(\alpha)} &= s + t \frac{dy}{dx(\alpha)}. \end{aligned}$$

Parmi ces huit équations, il y en a une qui ne contient que les quantités mêmes x, y, z, p, q, r, s, t , et cinq où il entre seulement de plus leurs dérivées relatives à x , prises en regardant x et z comme les deux variables indépendantes. Les deux autres seront relatives à x et à β ; mais on pourra les ramener à avoir x et α pour variables indépendantes, en y introduisant des dérivées relatives à α . S'il y a une intégrale intermédiaire, elles fourniront deux équations de la forme

$$\begin{aligned} f(x, y, z, p, q, r, s, t) &= \beta, \\ F(x, y, z, p, q, r, s, t) &= \phi(\beta), \end{aligned}$$

qui serviront, conjointement avec l'équation donnée, à éliminer r, s, t et leurs dérivées relatives à x des cinq autres, en sorte qu'on aura dans ce cas cinq équations du premier ordre, entre les sept variables x, y, z, p, q, s et β , qu'on pourra toujours intégrer comme si elles étaient aux différentielles ordinaires, parce qu'elles ne contiendront point de dérivées relatives à α , ce qui réduira à six le nombre des quantités considérées comme variables dans cette intégration. »

(Journal de l'École polytechnique, XVII^e cahier, p. 70-71.)

rapportons cette surface à ses deux familles de caractéristiques comme courbes coordonnées, et soient α et β les paramètres de ces deux familles de courbes. Alors $x, y, z, p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,n-1}, p_{2,0}, \dots, p_{2,n}$ sont des fonctions des deux variables α et β qui satisfont aux $4n+2$ équations simultanées

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = m_1 \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = p_{1,0} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + p_{2,0} \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial p_{1,0}}{\partial \alpha} = p_{1,0} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + p_{1,1} \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \dots, \frac{\partial p_{1,n-1}}{\partial \alpha} = p_{1,n-1} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + p_{1,n} \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial p_{2,0}}{\partial \alpha} = p_{1,1} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + p_{2,1} \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \dots, \frac{\partial p_{2,n-1}}{\partial \alpha} = p_{1,n-1} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + p_{2,n} \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \\ \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial p_{1,n-1}}{\partial \alpha} + m_1 \frac{\partial p_{2,n}}{\partial \alpha} = 0; \end{array} \right.$$

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial \beta} = m_2 \frac{\partial x}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = p_{1,0} \frac{\partial x}{\partial \beta} + p_{2,0} \frac{\partial y}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial p_{1,0}}{\partial \beta} = p_{1,0} \frac{\partial x}{\partial \beta} + p_{1,1} \frac{\partial y}{\partial \beta}, \dots, \frac{\partial p_{1,n-1}}{\partial \beta} = p_{1,n-1} \frac{\partial x}{\partial \beta} + p_{1,n} \frac{\partial y}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial p_{2,0}}{\partial \beta} = p_{1,1} \frac{\partial x}{\partial \beta} + p_{2,1} \frac{\partial y}{\partial \beta}, \dots, \frac{\partial p_{2,n-1}}{\partial \beta} = p_{1,n-1} \frac{\partial x}{\partial \beta} + p_{2,n} \frac{\partial y}{\partial \beta}, \\ \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial p_{1,n-1}}{\partial \beta} + m_2 \frac{\partial p_{2,n}}{\partial \beta} = 0; \end{array} \right.$$

m_1 et m_2 sont les racines de l'équation caractéristique

$$m^2 - \frac{\partial f}{\partial x} m + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

et on suppose $p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,n-1}$ remplacés par leurs valeurs en fonction de $x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{2,n}$. Nous savons a priori que ces $4n+2$ équations à $2n+3$ variables sont compatibles, puisque l'équation $r + f = 0$ admet des intégrales. Inversement, tout système de solutions des équations (26) et (27) fournit une intégrale de l'équation

$$r + f = 0.$$

Cela posé, considérons le cas où les équations (27) du second système de caractéristiques présentent deux combinaisons intégrables distinctes

$$du = 0, \quad dv = 0;$$

ceci prouve que le long d'une caractéristique de ce système ($\alpha = C^{\text{te}}$) u et v restent constants et ne varient que lorsqu'on passe d'une carac-

téristique à une autre du même système. Par conséquent, u et v sont des fonctions de la variable α seulement; on peut évidemment supposer $u = \alpha$, et on en déduit $v = \psi(\alpha)$, la fonction $\psi(\alpha)$ étant indéterminée. On peut donc ajouter aux équations (26) les deux nouvelles relations

$$u = \alpha, \quad v = \psi(\alpha);$$

si de celles-ci on tire deux des $2n + 3$ variables $x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{n,n}$ en fonction de α et des $2n + 1$ variables restantes, puis qu'on substitue dans les équations (26), on est conduit à un système de $2n + 1$ équations différentielles ordinaires à $2n + 2$ variables, y compris α , que l'on peut regarder comme la variable indépendante. L'intégration de ce système d'équations différentielles ordinaires nous fera connaître $x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{n,n}$ en fonction de α et des valeurs initiales, qui ne doivent dépendre que de la variable β seulement. Il reste à choisir ces valeurs initiales de façon à obtenir une intégrale. En généralisant la méthode de Cauchy comme on l'a indiqué plus haut, on démontrera qu'il suffit que ces valeurs initiales vérifient les équations $r + f = 0$, $u = \psi(v)$, et les $2n$ premières équations (27).

On voit, d'après cela, que le progrès essentiel à accomplir pour généraliser la méthode d'Ampère consistait à étendre la notion de caractéristiques, en ne se bornant plus aux dérivées du premier et du second ordre, mais en considérant la suite des valeurs prises par les dérivées d'ordre quelconque. C'est ce qu'a fait M. Darboux au début de son Mémoire.

159. Lorsque les deux systèmes de caractéristiques sont distincts, on ne peut, en général, intégrer les équations différentielles (23), tant que la fonction ψ , qui figure dans ces équations, reste indéterminée. Il n'en est plus de même lorsque les deux systèmes de caractéristiques sont confondus; alors, en effet, $du = 0$ et $dv = 0$ sont aussi des combinaisons intégrables (n° 138) des équations (23), et dans les deux dernières équations de ce système

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right) - \psi'(v) \left(\frac{dv}{dx}\right) + \left[\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} - \psi'(v) \frac{\partial v}{\partial p_{1,n-1}}\right] \frac{dp_{1,n-1}}{dx} &= 0 \\ \left(\frac{du}{dy}\right) - \psi'(v) \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left[\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} - \psi'(v) \frac{\partial v}{\partial p_{1,n-1}}\right] \frac{dp_{1,n-1}}{dy} &= 0, \end{aligned}$$

on peut remplacer $\psi'(v)$ par une constante C , puisque $v = C^u$ est une intégrale première. Le système d'équations différentielles à intégrer est

donc le suivant

$$(28) \quad \begin{cases} dy = m dx, & dz = p_{1,0} dx + p_{a,1} dy, \\ dp_{1,0} = p_{1,0} dx + p_{1,1} dy, \dots, dp_{1,n-1} = p_{1,n-1} dx + p_{1,n} dy, \\ dp_{a,1} = p_{1,1} dx + p_{a,2} dy, \dots, dp_{a,n-1} = p_{1,n-1} dx + p_{a,n} dy, \\ \left(\frac{du}{dx} \right) - C \left(\frac{dv}{dx} \right) + \left[\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} - C \frac{\partial v}{\partial p_{1,n-1}} \right] \frac{dp_{1,n-1}}{dx} = 0, \\ \left(\frac{du}{dy} \right) - C \left(\frac{dv}{dy} \right) + \left[\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} - C \frac{\partial v}{\partial p_{1,n-1}} \right] \frac{dp_{a,n}}{dx} = 0, \end{cases}$$

dont on connaît déjà deux intégrales premières

$$u = C^*, \quad v = C^*;$$

et ce système ne renferme plus qu'une constante arbitraire C , au lieu d'une fonction arbitraire, comme dans le cas général.

Soient

$$(29) \quad \begin{cases} y = F_1(x, x_0, y_0, z_0, \pi_{1,0}, \pi_{1,1}, \dots, \pi_{1,n-1}; \pi_{a,1}, \dots, \pi_{a,n}; C), \\ z = F_2(x, x_0, y_0, z_0, \pi_{1,0}, \dots, \pi_{a,n}; C), \\ p_{1,0} = F_3(x, \dots, \pi_{a,n}; C), \\ \dots \\ p_{a,n} = F_{1+n}(x, \dots, \pi_{a,n}; C), \end{cases}$$

les formules qui représentent l'intégrale générale de ce système,

$$x_0, y_0, z_0, \pi_{1,0}, \pi_{1,1}, \dots, \pi_{1,n-1}; \pi_{a,1}, \dots, \pi_{a,n}$$

étant les valeurs initiales de $x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{a,n}$. D'après ce qui précède, pour que les formules (29) représentent une intégrale de l'équation $r + f = 0$, il faut prendre pour ces valeurs initiales des fonctions d'une variable indépendante β satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0, \pi_{1,0}, \dots, \pi_{a,n}) &= \psi \{ v(x_0, y_0, z_0, \dots, \pi_{a,n}) \} \\ \frac{\partial x_0}{\partial \beta} &= \pi_{1,0} \frac{\partial x_0}{\partial \beta} + \pi_{a,1} \frac{\partial y_0}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial \pi_{1,0}}{\partial \beta} &= \pi_{1,0} \frac{\partial x_0}{\partial \beta} + \pi_{1,1} \frac{\partial y_0}{\partial \beta}, \dots, \frac{\partial \pi_{1,n-1}}{\partial \beta} = \pi_{1,n-1} \frac{\partial x_0}{\partial \beta} + \pi_{1,n} \frac{\partial y_0}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial \pi_{a,1}}{\partial \beta} &= \pi_{1,1} \frac{\partial x_0}{\partial \beta} + \pi_{a,2} \frac{\partial y_0}{\partial \beta}, \dots, \frac{\partial \pi_{a,n-1}}{\partial \beta} = \pi_{1,n-1} \frac{\partial x_0}{\partial \beta} + \pi_{a,n} \frac{\partial y_0}{\partial \beta}, \end{aligned}$$

$\pi_{1,0}, \pi_{1,1}, \dots, \pi_{1,n-1}$ s'exprimant au moyen de $\pi_{1,0}, \dots, \pi_{1,n-1}, \pi_{a,1}, \dots$

$x_{a,n}$ comme $p_{1,0}, \dots, p_{1,n-1}$ au moyen de $p_{1,0}, \dots, p_{a,n}$. Reprenons, par exemple, le problème de Cauchy; si on se donne une courbe (Γ) et une surface développable passant par cette courbe, on connaît par là même $x_0, y_0, z_0, \pi_{1,0}, \pi_{a,0}$ en fonction d'une variable auxiliaire β . Si la multiplicité précédente n'est pas une caractéristique, on en déduira, en général, par des calculs algébriques, comme on l'a déjà expliqué bien des fois, les valeurs de $\pi_{1,1}, \dots, \pi_{1,n-1}, \pi_{a,1}, \dots, \pi_{a,n}$ en fonction de β . Quant à C , remarquons que lorsqu'on remplace, dans u et v , $x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{a,n}$ par $x_0, y_0, z_0, \pi_{1,0}, \dots, \pi_{a,n}$ respectivement, u et v deviennent des fonctions d'une seule variable β . Soient u_0 et v_0 ces deux fonctions; la relation

$$u_0 = \psi(v_0)$$

détermine ψ . On a aussi

$$du_0 = \psi'(v_0) dv_0,$$

et comme C est égal à $\psi'(v)$, on a aussi

$$C = \psi'(v_0) = \frac{du_0}{dv_0}.$$

Il est facile de déduire de là des formules pour représenter l'intégrale générale de l'équation proposée, où figurent explicitement deux fonctions arbitraires d'un même argument et leurs dérivées en nombre fini, sans aucun signe d'intégration⁽¹⁾. Supposons, en effet, que l'on prenne pour x_0 une constante numérique, puis que l'on pose

$$y_0 = \beta, \quad z_0 = \varphi(\beta), \quad \pi_{1,0} = \psi(\beta);$$

on aura, par conséquent,

$$\begin{aligned} \pi_{a,1} &= \varphi'(\beta), & \pi_{a,2} &= \varphi''(\beta), & \dots, & \pi_{a,n} &= \varphi^{(n)}(\beta), \\ \pi_{1,1} &= \psi'(\beta), & \pi_{1,2} &= \psi''(\beta), & \dots, & \pi_{1,n-1} &= \psi^{(n-1)}(\beta), \end{aligned}$$

et, si on porte ces valeurs de $\pi_{a,1}, \dots, \pi_{1,n-1}$ dans C , puis dans les formules (20), on a bien, pour représenter les coordonnées x, y, z d'un point d'une surface intégrale, des formules où figurent explicitement les deux fonctions arbitraires $\varphi(\beta)$ et $\psi(\beta)$, avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ au plus.

Je n'insisterai pas davantage sur cette remarque, parce que nous déterminerons un peu plus loin toutes les équations du second ordre,

(¹) Voir ma note : « Sur la méthode de M. Darboux pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. » (*Comptes Rendus*, t. CXX, p. 542-546).

ayant leurs deux systèmes de caractéristiques confondus, auxquelles s'applique la méthode de M. Darboux.

160. On voit donc qu'en définitive tout repose sur la détermination des invariants d'un des systèmes de caractéristiques de l'équation du second ordre proposée, ou des deux systèmes. Il est toujours possible de reconnaître s'il existe des invariants dont l'ordre ne dépasse pas une limite assignée à l'avance, puisque cela revient à rechercher si un système de deux équations linéaires simultanées admet des intégrales. Mais, aussi loin que l'on aille dans la série des essais, il ne semble pas que l'on puisse toujours reconnaître l'existence ou l'absence d'invariants par des opérations dont la fin soit assurée. Nous ferons connaître, au sujet de ces invariants, un certain nombre de propositions qui peuvent en faciliter la recherche⁽¹⁾.

Remarquons d'abord que le théorème du numéro 151 admet une réciproque. Soit $F = 0$ une équation du second ordre; si cette équation admet une intégrale intermédiaire d'ordre n , $u - \varphi(v) = 0$, c'est-à-dire si toute intégrale de cette équation (sauf peut-être quelques intégrales exceptionnelles) satisfait à une relation de la forme $u - \varphi(v) = 0$, où u et v renferment x, y, z , et les dérivées partielles de z jusqu'à l'ordre n , u et v sont des invariants de l'un des systèmes de caractéristiques de l'équation $F = 0$. On pourrait l'établir par un calcul facile, mais il vaut mieux se servir de considérations analogues à celles qui nous ont déjà servi plusieurs fois, basées sur la théorie des caractéristiques. Il suffit de montrer que, quelle que soit la fonction φ , les deux équations

$$(30) \quad F = 0, \quad u - \varphi(v) = 0,$$

forment un système en involution. En effet, prenons une orientation d'éléments d'ordre n , satisfaisant aux deux équations (30) et à celles qu'on déduit de $F = 0$ par des différentiations répétées. Cette orientation d'éléments d'ordre n appartient à une intégrale (S) de l'équation du second ordre $F = 0$, intégrale qui, par hypothèse, satisfait aussi à une relation de la forme $u - \psi(v) = 0$. Mais, pour un élément quelconque de l'orientation considérée, u et v sont des fonctions d'une seule variable indépendante qui satisfont à la fois aux deux relations $u = \varphi(v)$, $u = \psi(v)$. On a donc nécessairement $\psi = \varphi$, de sorte que (S) est une intégrale commune des deux équations

$$F = 0, \quad u = \varphi(v),$$

(1) E. GOURSAT. « Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre » (*Comptes Rendus*, 2 novembre 1896).

et ceci suffit pour prouver que le système (30) est en involution (n° 140). Il en est évidemment de même des deux équations

$$F = 0, \quad u - \varphi(v) = C,$$

pour une valeur arbitraire de la constante C. Donc $u - \varphi(v)$ doit être un invariant de l'un des systèmes de caractéristiques de l'équation $F = 0$, ce qui ne peut avoir lieu, quelle que soit la fonction φ , que si u et v sont deux invariants distincts.

Cela posé, soient u et v deux invariants distincts de l'un des systèmes de caractéristiques de l'équation $F = 0$. Toute intégrale satisfait à une relation de la forme

$$u = \varphi(v),$$

et par suite aux deux relations

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(v) \frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dy} = \varphi'(v) \frac{dv}{dy};$$

il suit de là que, quand on se déplace sur une caractéristique quel-

conque du système considéré, $\frac{dv}{dx}$ et $\frac{dv}{dy}$ restent constants. Ce sont deux

nouveaux invariants pour ce système de caractéristiques, qui d'ailleurs se réduisent à un seul, car toute intégrale de l'équation $F = 0$ satisfait aussi à l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{dv}{dx} \\ \frac{du}{dy} & \frac{dv}{dy} \end{vmatrix} = 0;$$

nous désignerons par $\frac{dv}{du}$ ce nouvel invariant du même système de caractéristiques que u et v . Par exemple, si l'équation du second ordre est résolue par rapport à r , on pourra supposer que dans $\frac{dv}{du}$ on ne laisse que les dérivées $p_{i,j}$, où l'indice i ne dépasse pas l'unité; si on a fait la même opération pour u et v , l'expression

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dy}}{\frac{du}{dy}},$$

est ramenée à cette forme sans aucune transformation nouvelle. Lorsque u et v sont du même ordre n , $\frac{dv}{du}$ est en général d'ordre $n + 1$, mais il peut être d'ordre inférieur. Par exemple, nous avons vu (n° 134) que l'équation $r + f(s) = 0$ a trois invariants du second ordre correspondant à un même système de caractéristiques :

$$u = s, \quad v = y - xf'(s), \quad w = p + x \{ f(s) - sf'(s) \};$$

on a deux nouveaux invariants :

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - xf''(s)p_{1,1}}{p_{1,1}}, \quad \frac{dw}{dv} = \frac{s - xsf''(s)p_{1,1}}{1 - xf''(s)p_{1,1}} = s,$$

dont un seul est du troisième ordre, tandis que $\frac{dw}{dv}$ est identique à u .

Si u et v sont deux invariants distincts d'un même système de caractéristiques, $\frac{dv}{du}$ est un nouvel invariant distinct des premiers.

Si on avait, en effet, une relation de la forme

$$\frac{dv}{du} = f(u, v),$$

toute intégrale de l'équation du second ordre proposée $F = 0$, satisfaisant à l'équation

$$v = \varphi(u),$$

vérifierait aussi l'équation

$$\frac{dv}{du} = \varphi'(u)$$

et on aurait, par conséquent,

$$\varphi'(u) = f[u, \varphi(u)],$$

ce qui est impossible, puisque la fonction $\varphi(u)$ peut être choisie arbitrairement.

Plus généralement, supposons qu'on ait $(n + 1)$ invariants distincts u, v_1, v_2, \dots, v_n ; parmi les nouveaux invariants

$$\frac{dv_1}{du}, \frac{dv_2}{du}, \dots, \frac{dv_n}{du},$$

et soient m_1, m_2 les deux racines de l'équation du second degré

$$(32) \quad m^2 - \frac{\partial f}{\partial x} m + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Tout invariant d'ordre n doit satisfaire aux deux équations simultanées

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n,n}} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) + m_2 \left(\frac{d\varphi}{dy} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) = 0, \end{cases}$$

ou à celles qu'on obtient en permutant m_1 et m_2 . Lorsque n est plus grand que 2, cas que nous allons d'abord examiner, la première équation (33) montre que toute intégrale de ce système doit être de la forme

$$u = \pi (p_{1,n-1} + m_1 p_{n,n}; x, y, z, \dots, p_{1,n-2}, p_{n,n-1}).$$

Admettons qu'il existe une intégrale u de ce système renfermant effectivement les dérivées d'ordre n , c'est-à-dire dépendant de

$$p_{1,n-1} + m_1 p_{n,n}$$

et des dérivées d'ordre inférieur à n ; on aura inversement

$$p_{1,n-1} + m_1 p_{n,n} = \psi (x, y, z, p_{1,n-2}, \dots, p_{1,n-2}, p_{n,n-1}, u).$$

Cela posé, choisissons comme variables indépendantes

$$x, y, z, p_{1,n-2}, \dots, p_{1,n-2}, p_{n,n-1}, p_{n,n}, u,$$

et posons

$$\varphi = F (x, y, z, \dots, p_{1,n-2}, p_{n,n-1}, p_{n,n}; u).$$

La première équation du système (33) devient

$$\frac{\partial F}{\partial p_{n,n}} = 0;$$

quant à la seconde, elle ne contiendra pas de terme en $\frac{\partial F}{\partial u}$, puisque, par hypothèse, $\varphi = u$ est une intégrale du système (33). Pour calculer les coefficients des autres dérivées, remarquons que l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v}$$

u désignant l'une quelconque des variables $x, y, z, \dots, p_{1,n-1}, p_m$, et

$$\frac{\partial p}{\partial p_{1,n-1}} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}.$$

En substituant dans la seconde des équations (33) et négligeant les termes en $\frac{\partial F}{\partial u}$, elle devient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p_{1,0} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-2}} p_{1,n-2} + \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n-1} \\ & + m_1 \left[\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} p_{0,1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-2}} p_{1,n-2} + \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n-1} \right] \\ & + \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-2}} \left\{ - \left(\frac{d^{n-2}}{dy^{n-2}} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} p_{1,n-1} - \frac{\partial f}{\partial z} p_{1,n} \right\} + \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n-1} \\ & + m_2 \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-2}} p_{1,n-1} + \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n} \right\} = 0; \end{aligned}$$

on n'a écrit dans les deux premières lignes que les termes qui ne renferment que les dérivées d'ordre inférieur à n . Les seuls termes qui renferment les dérivées d'ordre n sont, en remplaçant $\frac{\partial f}{\partial z}$ par $(m_1 + m_2)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ par $m_1 m_2$,

$$(p_{1,n-1} + m_2 p_{1,n}) \left(\frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} - m_1 \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-2}} \right).$$

Le système (33) devient donc, après ce changement de variables,

$$A(F) = \frac{\partial F}{\partial p_m} = 0.$$

$$\begin{aligned} B(F) = \left(\frac{dF}{dx} \right) + m_1 \left(\frac{dF}{dy} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-2}} \left(\frac{d^{n-2}}{dy^{n-2}} \right) \\ + (p_{1,n-1} + m_2 p_{1,n}) \left(\frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} - m_1 \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-2}} \right) = 0, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF}{dx} \right) &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p_{1,0} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-2}} p_{1,n-2} + \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n-1} \\ \left(\frac{dF}{dy} \right) &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} p_{0,1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-2}} p_{1,n-2} + \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n-1}. \end{aligned}$$

On peut encore écrire

$$\begin{aligned} p_{1,n-1} + m_2 p_{1,n} &= (m_2 - m_1) p_{1,n} + p_{1,n-1} + m_1 p_{1,n} \\ &= (m_2 - m_1) p_{1,n} + \psi(x, y, z, p_{1,n}, \dots, p_{1,n-1}, p_{1,n-1}; u), \end{aligned}$$

et les variables u et $p_{1,n}$ ne figurent dans $B(F)$ que dans le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} - m_1 \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}}$. Des deux équations

$$A(F) = 0, \quad B(F) = 0,$$

on tire

$$A[B(F)] - B[A(F)] = (m_2 - m_1) \left(\frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} - m_1 \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} \right) = 0,$$

et, comme les deux racines m_1, m_2 , sont supposées distinctes, on en conclut que F , considérée comme fonction de $x, y, z, p_{1,n}, \dots, p_{1,n-1}$, doit satisfaire au système de deux équations

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} - m_1 \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ \left(\frac{dF}{dx} \right) + m_2 \left(\frac{dF}{dy} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^2 F}{dy^2} \right) = 0, \end{cases}$$

où les coefficients ne contiennent pas la variable u . Les équations (34) sont précisément celles qui déterminent les invariants d'ordre $n-1$ ou d'ordre inférieur. S'il y a k invariants distincts d'ordre égal ou inférieur à $n-1$, u_1, u_2, \dots, u_k , l'intégrale générale du système (34) et, par suite, du système (33) est donc

$$\varphi(u, u_1, u_2, \dots, u_k).$$

Ainsi, lorsque les deux familles de caractéristiques sont distinctes, il y a au plus dans chaque famille un invariant distinct d'ordre n , pour toute valeur de n supérieure à 2. Il faut entendre par là que tous les invariants d'ordre n , s'il en existe, s'expriment au moyen de l'un d'entre eux et d'invariants d'ordre inférieur.

Le théorème n'est plus vrai, en général, pour les invariants du second ordre, comme on peut s'en convaincre par l'exemple de l'équation $3r^2 + 1 = 0$, étudiée plus haut (n° 154); il subsiste cependant lorsque l'équation du second ordre considérée est linéaire en $r, s, t, rt - s^2$. On ne diminue pas la généralité en supposant que l'équation ne renferme pas de terme en $rt - s^2$, puisqu'on peut faire disparaître ce

terme par une transformation de contact convenable. Prenons donc l'équation sous la forme

$$(35) \quad r + Ks + Lt + M = 0,$$

K, L, M étant des fonctions de x, y, z, p, q ; un invariant du second ordre doit satisfaire au système

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - m_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p - \frac{\partial \Phi}{\partial p} (Ks + Lt + M) + \frac{\partial \Phi}{\partial q} s \\ + m_2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q + \frac{\partial \Phi}{\partial p} s + \frac{\partial \Phi}{\partial q} t \right\} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left[\left(\frac{dK}{dy} \right) s + \left(\frac{dL}{dy} \right) t + \left(\frac{dM}{dy} \right) \right]. \end{cases}$$

Soit u un invariant du second ordre, qui est nécessairement de la forme $u = \psi(x, y, z, p, q, s + m_1 t)$. Si on prend comme tout à l'heure pour variables indépendantes

$$x, y, z, p, q, t, u,$$

en posant $\Phi = \Phi(x, y, z, p, q, t, u)$, la première des équations (36) se réduit à

$$\Lambda(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

tandis que la seconde devient, en remarquant que le coefficient de $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ sera nul,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + m_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} (p + m_2 q) + \frac{\partial \Phi}{\partial p} (m_2 s - Ks - Lt - M) + \frac{\partial \Phi}{\partial q} (s + m_2 t) = 0,$$

ou, en remplaçant K par $m_1 + m_2$, L par $m_1 m_2$,

$$B(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} (p + m_2 q) - M \frac{\partial \Phi}{\partial p} + (s + m_2 t) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q} - m_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = 0.$$

Lorsque les deux racines m_1, m_2 de l'équation caractéristique sont distinctes, on en conclut, en raisonnant comme dans le cas précédent, que toute intégrale des deux équations $\Lambda(\Phi) = 0, B(\Phi) = 0$ doit vérifier aussi les deux équations

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial q} - m_1 \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} (p + m_2 q) - M \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0; \end{cases}$$

ce sont précisément les relations auxquelles doit satisfaire un invariant du premier ordre, et la conclusion énoncée plus haut s'applique encore, dans ce cas, aux invariants du second ordre.

Voici encore une proposition analogue à la précédente, quoiqu'un peu différente. *Lorsque les deux familles de caractéristiques sont distinctes, s'il existe un invariant du premier ordre pour une famille de caractéristiques, il y a au plus un invariant distinct du second ordre pour la même famille.* Lorsqu'un des systèmes de caractéristiques d'une équation du second ordre admet un invariant du premier ordre, on peut effectuer une transformation de contact de façon que cet invariant soit y ; l'équation est alors de la forme

$$(38) \quad r + f(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

et les invariants du second ordre correspondant à la famille de caractéristiques qui admet l'invariant y doivent satisfaire aux deux équations

$$(39) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial z} p - \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial p} f + \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial q} s - \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial s} \left(\frac{df}{dy} \right) = 0. \end{cases}$$

Supposons que ce système admette une intégrale u , contenant les dérivées du second ordre s et t ; en prenant comme tout à l'heure x, y, z, p, q, t et u pour variables indépendantes, le système (39) est remplacé par le suivant

$$(40) \quad A(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad B(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p - \frac{\partial \Phi}{\partial p} f + \frac{\partial \Phi}{\partial q} s = 0,$$

où on suppose que s a été remplacé par sa valeur en fonction de x, y, z, p, q, t et u déduite de la relation

$$u = \psi(x, y, z, p, q, s, t).$$

Des équations (40) on déduit que Φ doit satisfaire aussi à l'équation

$$A[B(\Phi)] - B[A(\Phi)] = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \frac{\partial s}{\partial t} = 0;$$

soit

$$C(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0;$$

on a de même :

$$A[C(\Phi)] - C[A(\Phi)] = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0.$$

Écartons le cas, qui vient d'être examiné, où $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ serait nul ; les équations (40) entraînent donc les suivantes

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0,$$

et l'intégrale générale du système (39) est $\varphi(y, x)$, φ étant une fonction arbitraire.

En résumé, lorsqu'un des systèmes de caractéristiques admet un invariant d'ordre p , il ne peut y avoir plus d'un invariant distinct d'ordre q , pour toute valeur de q supérieure à p .

162. En supposant toujours les deux systèmes de caractéristiques distincts, chacun de ces systèmes admet au plus deux invariants du premier ordre, et ce nombre maximum ne peut être atteint que si l'équation du second ordre proposée est une équation de Monge et d'Ampère. Il nous reste, pour être complet, à rechercher le nombre maximum des invariants distincts du second ordre pour une équation de forme quelconque. Écrivons l'équation

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0;$$

nous avons à rechercher le nombre maximum d'intégrales que peut avoir le système

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0, \\ B(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (p + m_2 q) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (m_2 s - f) \frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ \quad + (s + m_2 t) \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} p + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} t \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0. \end{array} \right.$$

Toute intégrale de ce système doit satisfaire à l'équation

$$\begin{aligned} A[B(\varphi)] - B[A(\varphi)] &= \left(\frac{\partial m_2}{\partial x} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \left(\frac{\partial m_2}{\partial x} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ &\quad + \left[s \left(\frac{\partial m_2}{\partial x} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s} \right) + m_1^2 - m_1 m_2 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ &\quad + \left[t \left(\frac{\partial m_2}{\partial x} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s} \right) + m_2 - m_1 \right] \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \dots = 0; \end{aligned}$$

pour que les équations (41) forment un système complet, il faut que cette dernière équation se réduise à une identité, ce qui exige que l'on ait $m_2 = m_1$. Il ne peut donc y avoir cinq invariants du second ordre, si les deux familles de caractéristiques sont distinctes.

Cherchons s'il peut y avoir quatre invariants distincts. Supposons d'abord que

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s}$$

ne soit pas nul ; on tire de la relation précédente

$$C(q) = \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + q \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \left\{ r + \frac{m_1^2 - m_1 m_2}{\frac{\partial m_2}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s}} \right\} \frac{\partial^2 q}{\partial p^2} \\ \left\{ + r + \frac{m_2 - m_1}{\frac{\partial m_2}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s}} \right\} \frac{\partial^2 q}{\partial q^2} + \dots = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + q \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ par la valeur précédente dans $B(q)$, il vient

$$B_1(q) = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} - \left\{ r + \frac{(m_1^2 - m_1 m_2) m_2}{\frac{\partial m_2}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s}} \right\} \frac{\partial^2 q}{\partial p^2} \\ + \left\{ s - \frac{m_1^2 - m_1 m_2}{\frac{\partial m_2}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s}} \right\} \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \dots = 0.$$

Pour qu'il y ait quatre invariants distincts du second ordre, il faudrait que les trois équations

$$A(q) = 0, \quad B_1(q) = 0, \quad C(q) = 0,$$

forment un système jacobien ; or, dans la combinaison

$$B_1[C(q)] - C[B_1(q)],$$

le coefficient de $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ est $B_1(p) - C(p)$, c'est-à-dire

$$s + \frac{m_1 m_2 - m_1^2}{\frac{\partial m_2}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s}} - s - \frac{m_1^2 - m_1 m_2}{\frac{\partial m_2}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s}} = - \frac{(m_1 - m_2)^2}{\frac{\partial m_2}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s}}.$$

et, par suite, ce coefficient ne peut être nul, lorsque m_1 et m_2 sont inégaux.

Il nous reste à examiner le cas où on aurait

$$m_1 - m_2 \neq 0, \quad \frac{\partial m_2}{\partial x} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial s} = 0.$$

L'équation $A [B (\varphi)] - B [A (\varphi)] = 0$ donne alors

$$C (\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - m_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 0,$$

K étant un coefficient dont il est inutile d'écrire l'expression développée. En supposant $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ remplacé par cette valeur dans $B (\varphi)$, on a trois équations, où L , M sont des coefficients qu'il est inutile de calculer,

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} A (\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0, \\ B_1 (\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + m_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (p + m_2 q) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + L \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + M \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 0, \\ C (\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - m_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 0, \end{array} \right.$$

qui devraient former un système jacobien. Il faut pour cela que les coefficients de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ et de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}$ dans la combinaison $C [B_1 (\varphi)] - B_1 [C (\varphi)]$ soient nuls, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_2}{\partial y} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial p} + K \frac{\partial m_2}{\partial s} &= 0, \\ m_2 - m_1 + q \left(\frac{\partial m_2}{\partial y} - m_1 \frac{\partial m_2}{\partial p} + K \frac{\partial m_2}{\partial s} \right) &= 0, \end{aligned}$$

et, par conséquent, $m_1 = m_2$. En définitive, lorsque les deux familles de caractéristiques sont distinctes, il existe au plus pour chacune d'elles trois invariants distincts du premier ou du second ordre.

Il est facile de découvrir toutes les équations du second ordre, pour lesquelles un des systèmes de caractéristiques admet trois invariants du second ordre. Soient κ , φ , ω ces trois invariants, et (S) une intégrale quelconque de l'équation proposée $r + f = 0$; cette intégrale satisfait à deux équations de la forme $\varphi = \psi (\kappa)$, $\omega = \pi (\kappa)$, et, d'après un théo-

ème démontré antérieurement (n° 144), les trois équations

$$(43) \quad r + f = 0, \quad v = \phi(u), \quad w = \pi(u),$$

ayant une intégrale commune (S), en admettent une infinité, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires. Or u, v, w , sont trois intégrales de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - m, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

on a donc

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial(v - \phi(u))}{\partial x} & \frac{\partial(v - \phi(u))}{\partial y} \\ \frac{\partial(w - \pi(u))}{\partial x} & \frac{\partial(w - \pi(u))}{\partial y} \end{array} \right| = 0,$$

et on peut éliminer les dérivées du second ordre x et y entre les deux équations

$$v - \phi(u) = 0, \quad w - \pi(u) = 0.$$

Soit

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

le résultat de l'élimination; l'équation $F = 0$ admet toutes les intégrales du système (43): elle a donc une infinité d'intégrales communes avec la proposée $r + f = 0$, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires. Ceci ne peut arriver (n° 120) que si $F = 0$ est une intégrale intermédiaire de l'équation du second ordre $r + f = 0$. On voit donc que toute intégrale de l'équation du second ordre appartient à une intégrale intermédiaire du premier ordre; il faut, pour cela, que l'équation du second ordre proposée admette une intégrale intermédiaire du premier ordre

$$V(x, y, z, p, q, a, b) = 0,$$

dépendant de deux constantes essentiellement distinctes a et b (I, n° 90).

Inversement, lorsqu'une équation du second ordre $F = 0$ admet une intégrale intermédiaire du premier ordre avec deux constantes arbitraires

$$(44) \quad V(x, y, z, p, q, a, b) = 0,$$

l'application de la méthode de M. Darboux donne trois invariants du second ordre, pour un des systèmes de caractéristiques. En effet, toute intégrale de l'équation du second ordre $F = 0$ satisfait à une équation

du premier ordre obtenue en éliminant a et b entre les trois relations

$$V = 0, \quad b = \varphi(a), \quad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} \varphi'(a) = 0;$$

on en déduit que les dérivées secondes r, s, t satisfont aussi aux deux relations

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p + \frac{\partial V}{\partial p} r + \frac{\partial V}{\partial q} s = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q + \frac{\partial V}{\partial p} s + \frac{\partial V}{\partial q} t = 0; \end{cases}$$

l'élimination de a et de b entre les relations (44) et (45) conduit précisément à l'équation du second ordre proposée $F = 0$ et à celle-là seulement. De deux des trois équations (44 et 45), on peut donc tirer les valeurs de a et de b en fonction de x, y, z, p, q, r, s, t ,

$$a = u(x, y, z, p, q, r, s, t), \quad b = v(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

et on voit que toute intégrale de l'équation $F = 0$ satisfait aux deux autres équations

$$v = \varphi(u), \quad -\frac{\frac{\partial V}{\partial a}}{\frac{\partial V}{\partial b}} = w(x, y, z, p, q, r, s, t) = \varphi'(u).$$

Quand on passe d'une intégrale à une autre, u, v, w conservent les mêmes expressions et la fonction φ seule varie. L'équation proposée admet donc les deux intégrales intermédiaires du second ordre

$$v = \varphi(u), \quad w = \varphi'(u),$$

ce qui prouve que u, v, w sont trois invariants d'un même système de caractéristiques (n° 100). Ces invariants sont distincts; car, s'il existait entre eux une relation, telle que

$$\Phi(u, v, w) = 0,$$

on en conclurait que la fonction $\varphi(u)$ doit satisfaire à une équation différentielle du premier ordre

$$\Phi(u, \varphi(u), \varphi'(u)) = 0,$$

ce qui est impossible, puisque cette fonction est arbitraire.

Le même raisonnement prouve que l'invariant w peut se déduire des invariants u et v ,

$$w = \frac{dv}{du}.$$

REMARQUE. — Il peut se faire que l'on puisse former deux combinaisons des invariants u , v , w , qui ne renferment que les dérivées du premier ordre p et q . C'est ce qui arrivera pour une équation de Monge-Ampère, pour laquelle un des deux systèmes de caractéristiques admet deux invariants du premier ordre u et v . Il est clair que cette équation peut être considérée comme un cas particulier des équations qui admettent une intégrale intermédiaire $V = 0$ dépendant de deux constantes arbitraires. D'ailleurs, on voit directement qu'il y aura un seul invariant distinct du second ordre $\frac{dv}{du}$.

163. Lorsqu'il existe plus d'un invariant pour un des systèmes de caractéristiques, on a déjà fait observer qu'il y en avait une infinité. Des remarques précédentes, on déduit facilement que tous ces invariants peuvent se calculer par des différentiations successives au moyen de deux d'entre eux. Imaginons, en effet, la suite des systèmes d'équations linéaires simultanées auxquelles doit satisfaire un invariant du 1^{er} ordre, du 2^e ordre..., etc. Supposons que le premier de ces systèmes qui admette des intégrales soit le p^{me} ; il peut admettre une, deux, ou trois intégrales distinctes, ce qui fait trois cas à examiner.

Premier cas. — Le premier système qui n'est pas incompatible admet une seule intégrale distincte; il n'y a donc aucun invariant d'ordre inférieur à p , et un seul invariant u , d'ordre p . Tous les systèmes d'équations linéaires que l'on a à considérer, à partir du p^{me} , admettent u pour intégrale. Nous supposons qu'en allant assez loin on trouve un autre système, le $(p+q)^{\text{me}}$ par exemple, qui admet une intégrale distincte de u ; soit v cette intégrale. Alors tous les invariants d'ordre $p+q$ s'expriment au moyen des deux invariants u et v (n° 161); $v_1 = \frac{dv}{du}$ est un invariant d'ordre $p+q+1$, et tous les invariants d'ordre $p+q+1$ s'expriment au moyen de u , v , v_1 . De même $v_2 = \frac{dv_1}{du}$ est d'ordre $p+q+2$, et tous les invariants d'ordre $p+q+2$ s'expriment au moyen de u , v , v_1 , v_2 . En continuant ainsi, on démontrera de proche en proche que tous les invariants s'expriment au moyen de ceux qui sont compris dans la suite

$$u, v, v_1 = \frac{dv}{du}, \quad v_2 = \frac{dv_1}{du}, \quad \dots, \quad v_{n+1} = \frac{dv_n}{du}, \quad \dots$$

Deuxième cas. — Le premier système qui n'est pas incompatible admet deux intégrales distinctes (on a nécessairement $p = 1$, ou $p = 2$).

Soient u et v ces deux invariants distincts d'ordre p ; $v_1 = \frac{dv}{du}$ est un nouvel invariant distinct des premiers, et, par suite, v_1 est d'ordre $p + 1$.

Tout invariant d'ordre $p + 1$ est une fonction de u, v, v_1 ; de même tout invariant d'ordre $p + 2$ s'exprime au moyen de $u, v, v_1, \frac{dv_1}{du}$ et le raisonnement s'achève comme dans le premier cas.

Troisième cas. — Si le premier système qui n'est pas incompatible admet trois intégrales distinctes, on a nécessairement $p = 2$, et il y a trois invariants distincts du second ordre. D'après ce qui a été démontré tout à l'heure (n° 163), on peut prendre pour u et v deux invariants du second ordre, tels que $v_1 = \frac{dv}{du}$ soit aussi du second ordre. Alors

$\frac{dv_1}{du}$ sera nécessairement du troisième ordre, car, s'il était d'ordre 2,

il s'exprimerait au moyen de $u, v, \frac{dv}{du}$, ce qui est impossible (n° 160);

tous les invariants du troisième ordre s'exprimeront au moyen de $u, v, v_1, \frac{dv_1}{du}$. Le raisonnement s'achève comme plus haut.

En résumé, lorsque les deux familles de caractéristiques sont distinctes, s'il existe pour l'une d'elles une infinité d'invariants, on peut en trouver deux, u et v , tels que tous les invariants s'expriment au moyen de ceux de la suite

$$u, v, v_1 = \frac{dv}{du}, \quad v_2 = \frac{dv_1}{du}, \quad \dots \quad v_n = \frac{dv_{n-1}}{du}, \quad \dots$$

On en déduit, comme corollaire, que le nombre des invariants distincts d'ordre égal ou inférieur à n est au plus égal à $n + 1$; pour que cette limite soit atteinte, il faut et il suffit que l'équation du second ordre proposée admette une intégrale intermédiaire du premier ordre, avec deux constantes arbitraires. Il y a alors trois invariants distincts du second ordre (ou deux du premier ordre et un du second ordre), un du troisième ordre, un du quatrième ordre, etc.

164. Tout système d'équations linéaires et homogènes du premier ordre, à n variables indépendantes et à une seule fonction inconnue, qui admet r intégrales distinctes seulement, se ramène, par des opérations élémentaires, à un système jacobien de $n - r$ équations. Si on

applique à ce système la méthode de Mayer ⁽¹⁾, on sait que l'intégration est ramenée à celle d'un système de r équations différentielles ordinaires du premier ordre, ou, ce qui revient au même, à l'intégration d'une équation différentielle unique d'ordre r . Si on applique cette méthode aux systèmes linéaires qui déterminent les invariants d'une famille de caractéristiques, nous avons vu qu'il ne peut se présenter que trois cas. Si le premier système, qui n'est pas incompatible, admet une seule intégrale, on l'obtiendra par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre. Le premier système après celui-là, qui admettra plus d'une intégrale distincte, en admettra deux, et comme on en connaît déjà une, la détermination de la seconde intégrale exigera l'intégration d'une nouvelle équation différentielle du premier ordre ⁽²⁾. La recherche des invariants exige donc l'intégration de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre.

On voit de même que, lorsque le premier système qui n'est pas incompatible admet deux intégrales distinctes, la recherche des invariants est ramenée à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du second ordre.

Enfin, dans le cas où l'équation admet trois invariants distincts du second ordre pour une famille de caractéristiques, on aurait à intégrer une équation différentielle ordinaire du troisième ordre.

165. Lorsque les deux familles de caractéristiques d'une équation du second ordre sont distinctes, toute caractéristique d'ordre n appartient à une infinité de caractéristiques d'ordre $n + 1$, dépendant d'une constante arbitraire, dont la détermination exige, en général, l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Ces caractéristiques s'obtiennent sans aucune intégration, toutes les fois que le système considéré admet un invariant d'ordre $n + 1$. Pour fixer les idées, supposons l'équation du second ordre proposée mise sous la forme

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0;$$

une caractéristique d'ordre n est complètement définie si on connaît, en fonction d'un paramètre variable α , les valeurs de

$$x, y, z, p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,n-1}; p_{\alpha,1}, p_{\alpha,2}, \dots, p_{\alpha,n}.$$

Pour trouver une caractéristique d'ordre $n + 1$ renfermant la précé-

⁽¹⁾ *Equations du premier ordre*, p. 58 et suivantes.

⁽²⁾ *Equations du premier ordre* (n° 33).

dente, il suffira de connaître les valeurs des dérivées $p_{1,n}$ et $p_{2,n+1}$ le long de cette caractéristique; on a évidemment

$$\frac{dp_{2,n}}{dz} = p_{1,n} \frac{dx}{dz} + p_{2,n+1} \frac{dy}{dz}.$$

De plus, si u est un invariant d'ordre $n + 1$ de ce système, on doit avoir aussi

$$u(x, y, z, \dots, p_{1,n}, p_{2,n+1}) = C,$$

et les deux équations précédentes permettent de déterminer $p_{1,n}$ et $p_{2,n+1}$ en fonction de z et de la constante arbitraire C . On peut remarquer en passant que cela suffirait pour établir qu'il ne peut y avoir plus d'un invariant distinct d'ordre $n + 1$, lorsque n est supérieur à l'unité (n° 161).

Plus généralement, si le système de caractéristiques considéré possède un invariant d'ordre $n + 1$ et un invariant d'ordre inférieur, on pourra en déduire de proche en proche, sans aucune intégration, toutes les caractéristiques d'ordre $n + 1$, d'ordre $n + 2$, etc., qui renferment une caractéristique donnée d'ordre n . Prenons, par exemple, l'équation $rs - 1 = 0$; elle admet une famille de caractéristiques du premier ordre, définie par les équations différentielles

$$dy = 0, \quad dz = p dx, \quad dp dq = dx^2,$$

dont l'intégrale générale est

$$y = y_0, \quad x = \alpha \varphi''(\alpha) - \varphi'(\alpha), \quad p = \varphi'(\alpha), \quad q = \alpha^2 \varphi''(\alpha) - 2\alpha \varphi'(\alpha) + 2\varphi(\alpha), \\ z = \int \alpha \varphi''(\alpha) \varphi''(\alpha) d\alpha,$$

$\varphi(\alpha)$ étant une fonction arbitraire. D'autre part, on a, pour les caractéristiques du 2^e ordre de la même famille, l'invariant du second ordre

$$u = s^2 + 3t;$$

on obtiendra donc les caractéristiques du second ordre, en ajoutant aux équations précédentes les deux relations

$$\frac{\partial q}{\partial x} = s \frac{\partial x}{\partial \alpha} + t \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad s^2 + 3t = C,$$

d'où on tire $s = \alpha, t = \frac{C - \alpha^2}{3}$. On aura de même les caractéristiques

du troisième ordre en se servant de l'invariant $\frac{1}{3} \frac{dx}{dy}$ ou $s^2 p_{12} + p_{23}$ et ainsi de suite.

166. Nous allons maintenant étudier dans ce paragraphe les équations du second ordre pour lesquelles les deux familles de caractéristiques ne sont pas distinctes. Une équation de cette espèce représente, quand on y considère x, y, z, p, q , comme des constantes, et r, s, t , comme des coordonnées courantes, un plan parallèle à un plan tangent au cône (T) ayant pour équation

$$rt - s^2 = 0,$$

ou une surface développable, enveloppe d'un plan mobile qui reste constamment parallèle à un plan tangent au cône (T) (I n° 78). Dans le premier cas, l'équation du second ordre est de la forme

$$(46) \quad A^2 r + 2ABs + B^2 t + K = 0.$$

A, B, K, étant des fonctions de x, y, z, p, q ; dans le second cas, l'équation du second ordre s'obtient en éliminant le paramètre m entre les deux équations

$$(47) \quad \begin{cases} r + 2sm + tm^2 + 2\psi(x, y, z, p, q; m) = 0, \\ s + mt + \frac{\partial \psi}{\partial m} = 0. \end{cases}$$

Pour la question dont il s'agit, on peut se borner à ce second cas; en effet, étant donnée une équation de la forme (46), on peut toujours lui appliquer une transformation de contact convenable, de façon à la ramener à une équation ayant un terme en $rt - s^2$ (n° 28). La nouvelle équation sera représentée par un système de la forme (47), où ψ sera une fonction entière et du second degré de m .

Nous prendrons, par conséquent, l'équation du second ordre sous la forme

$$(48) \quad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0,$$

la fonction f ayant la valeur

$$(49) \quad f = 2sm + tm^2 + 2\psi(x, y, z, p, q; m),$$

et m étant défini par la relation

$$(30) \quad s + mt + \frac{\partial \psi}{\partial m} = 0.$$

On déduit de là que, u désignant une des variables x, y, s, p, q , on a

$$\frac{\partial m}{\partial u} = - \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial m \partial u}}{1 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial m^2}},$$

tandis que

$$\frac{\partial m}{\partial s} = \frac{-1}{1 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial m^2}}, \quad \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{-m}{1 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial m^2}}$$

On a aussi

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 2m, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = m^2,$$

de sorte que m est la racine double de l'équation caractéristique.

Cherchons d'abord s'il peut y avoir des invariants du second ordre, c'est-à-dire si le système

$$(51) \quad \begin{cases} A(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - m \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0, \\ B(\varphi) = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) + m \left(\frac{d\varphi}{dy} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \left(\frac{df}{dy} \right) = 0 \end{cases}$$

peut admettre des intégrales renfermant s et t . On a déjà

$$\frac{\partial m}{\partial t} - m \frac{\partial m}{\partial s} = 0,$$

de sorte que l'intégrale générale de l'équation $A(\varphi) = 0$ est une fonction arbitraire de x, y, s, p, q, m . Prenons alors pour variables indépendantes

$$x, y, s, p, q, m, t,$$

et posons

$$\varphi(x, y, s, p, q, s, t) = F(x, y, s, p, q, m, t);$$

le système (51) devient

$$A(F) = \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

$$\begin{aligned} B(F) = & \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial s} p - \frac{\partial F}{\partial p} (2sm + tm^2 + 2\phi) + \frac{\partial F}{\partial q} s + \frac{\partial F}{\partial m} \left(\frac{dm}{dx} \right) \\ & + m \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial s} q + \frac{\partial F}{\partial p} s + \frac{\partial F}{\partial q} t \right\} + m \frac{\partial F}{\partial m} \left(\frac{dm}{dy} \right) \\ & + \frac{\partial F}{\partial m} \left(\frac{df}{dy} \right) \frac{1}{1 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial m^2}} = 0. \end{aligned}$$

La dernière équation peut encore s'écrire, en réduisant et tenant compte des relations précédentes,

$$B(F) = \frac{\partial F}{\partial x} + m \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} (p + qm) + \frac{\partial F}{\partial p} \left(m \frac{\partial \psi}{\partial m} - 2\psi \right) - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial m} \\ + \frac{\partial F}{\partial m} \left\{ \left(\frac{dm}{dx} \right) + m \left(\frac{dm}{dy} \right) + \frac{\left(\frac{d\psi}{dy} \right)}{1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2}} \right\} = 0.$$

Nous remarquons que les coefficients de $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial p}$, $\frac{\partial F}{\partial q}$ ne dépendent que des variables x, y, z, p, q, m , de sorte que la combinaison

$$A[B(F)] - B[A(F)] = 0$$

conduira à la nouvelle équation

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 0,$$

à moins que le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial m}$ dans $B(F)$ ne soit lui-même indépendant de t . Il ne peut donc se présenter que deux cas ; si le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial m}$ dans $B(F)$ n'est pas indépendant de t , quand on l'exprime au moyen des variables x, y, z, p, q, m, t , on doit avoir $\frac{\partial F}{\partial m} = 0$, et, par suite, il ne peut exister d'invariant du second ordre. Au contraire, si le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial m}$ dans $B(F)$ est indépendant de t , les deux équations $A(F) = 0$, $B(F) = 0$ forment un système jacobien ; il en est, par suite, de même des équations (51), et on a cinq invariants distincts du premier ou du second ordre.

Nous allons chercher la condition pour qu'il en soit ainsi. On a, en posant, pour abréger,

$$H = t + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2},$$

$$-H \left(\frac{dm}{dx} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial z} p - \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial p} (2sm + tm^2 + 2\psi) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial q} s,$$

$$-H \left(\frac{dm}{dy} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial z} q + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial p} s + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial q} t,$$

$$\left(\frac{d\psi}{dy} \right) = 2(s + tm) \left(\frac{dm}{dy} \right) + 2 \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q + \frac{\partial \psi}{\partial p} s + \frac{\partial \psi}{\partial q} t + \frac{\partial \psi}{\partial m} \left(\frac{dm}{dy} \right) \right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q + \frac{\partial \psi}{\partial p} s + \frac{\partial \psi}{\partial q} t \right\}.$$

ce qu'on peut encore écrire, en remplaçant s par $-\frac{\partial \psi}{\partial m} - mt$,

$$\left(\frac{df}{dy}\right) = 2 \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q - \frac{\partial \psi}{\partial m} \frac{\partial \psi}{\partial p} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q} - m \frac{\partial \psi}{\partial p}\right) t \right\}.$$

Le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial m}$ est donc, en remplaçant s par $-\frac{\partial \psi}{\partial m} - mt$, réduisant et multipliant par H ,

$$2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q - \frac{\partial \psi}{\partial m} \frac{\partial \psi}{\partial p} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial q} - m \frac{\partial \psi}{\partial p}\right) t \right] - \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial x} + m \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial z} (p + mq) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial p} \left(m \frac{\partial \psi}{\partial m} - 2t\right) - \frac{\partial \psi}{\partial m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial q} \right\}.$$

Ce coefficient est donc une fraction rationnelle et du premier degré en t ; pour qu'il ne dépende pas de t , il faut et il suffit que l'on ait

$$(32) \begin{cases} 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial q} - m \frac{\partial \psi}{\partial p}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial p} \left(m \frac{\partial \psi}{\partial m} - 2t\right) - \frac{\partial \psi}{\partial m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial q} \\ = 2 \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q - \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right\} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial x} - m \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial z} (p + mq). \end{cases}$$

La relation ainsi obtenue s'est déjà présentée dans une autre question; elle est identique à celle qui exprime que les équations, auxquelles doit satisfaire une intégrale intermédiaire de l'équation du second ordre (48) forment un système en involution ⁽¹⁾ (t. I, n° 93). Nous avons vu que l'intégrale générale d'une équation de cette espèce est représentée par un système de formules où figuraient explicitement deux fonctions arbitraires, sans aucun signe d'intégration; ce qui est bien d'accord avec la proposition du n° 159.

Cherchons encore s'il peut exister des invariants d'ordre $n > 2$,

$$\varphi(x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{1,n-1}; p_{0,1}, \dots, p_{0,n}),$$

pour une équation de la forme (48). Un tel invariant doit satisfaire aux

⁽¹⁾ L'équation (57) de la page 297 (t. I), qui est identique en réalité à notre équation (32), a été écrite inexactement. On doit lire, sur la première ligne,

$$-m \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial x_2}, \quad \text{au lieu de} \quad -m \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial x_1},$$

et le terme $m \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial x_2}$ de la seconde ligne doit être supprimé.

deux équations simultanées

$$(53) \quad \begin{cases} A(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial p_{a,n}} - m \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \\ B(\varphi) = \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) + m \left(\frac{d\varphi}{dy} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \right) = 0. \end{cases}$$

L'intégrale générale de la première est une fonction arbitraire de $x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{1,n-2}; p_{a,1}, \dots, p_{a,n-1}, p_{1,n-1} + mp_{a,n}$; ceci nous conduit à prendre pour variables indépendantes

$$x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{1,n-2}; p_{a,1}, \dots, p_{a,n-1}; p_{a,n}, u,$$

en posant $u = p_{1,n-1} + mp_{a,n}$. La première équation du système (53) devient, F désignant la nouvelle expression de φ ,

$$A(F) = \frac{\partial F}{\partial p_{a,n}} = 0;$$

quant à la seconde, elle se change en une équation $B(F) = 0$, renfermant, en général, toutes les autres dérivées. Nous remarquerons sur cette équation que les coefficients des dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial p_{a,1}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_{a,n-2}}, \frac{\partial F}{\partial p_{1,0}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-2}}$$

ne renferment pas les dérivées d'ordre n ; les seuls coefficients qui puissent contenir les variables u et $p_{a,n}$, sont donc les coefficients de

$$\frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}}, \frac{\partial F}{\partial p_{a,n-1}}, \frac{\partial F}{\partial u}.$$

Les coefficients de $\frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}}, \frac{\partial F}{\partial p_{a,n-1}}$ sont respectivement

$$p_{1,n-2} + mp_{1,n-1}, \quad p_{1,n-1} + mp_{a,n};$$

or $p_{1,n-1} + mp_{a,n} = u$, et en différentiant $n-2$ fois l'équation proposée par rapport à y , on trouve que $p_{1,n-2} + mp_{1,n-1}$ s'exprime au moyen de x, y, z, u , et des dérivées d'ordre inférieur à n .

Les coefficients de $\frac{\partial F}{\partial p_{1,n-2}}$ et de $\frac{\partial F}{\partial p_{a,n-1}}$ ne renferment donc pas $p_{a,n}$ et

cette variable ne peut entrer que dans le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial u}$. En raison-

nant comme plus haut, on en déduit que la combinaison

$$A [B (F)] - B [A (F)] = 0$$

conduira à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

à moins que le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial u}$ dans $B (F)$ ne soit indépendant de p_m .

S'il n'en est pas ainsi, il n'y aura pas d'invariant d'ordre n ; si la condition est satisfaite, les équations (53) forment un système complet.

Le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial u}$ dans $B (F)$ est

$$p_m \left\{ \frac{dm}{dx} + m \frac{dm}{dy} \right\} - \left(\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \right),$$

où $\frac{dm}{dx}$ et $\frac{dm}{dy}$ désignent les dérivées complètes

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dx} &= \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial z} p + \frac{\partial m}{\partial p} r + \frac{\partial m}{\partial q} s + \frac{\partial m}{\partial s} p_{2,1} + \frac{\partial m}{\partial t} p_{1,2}, \\ \frac{dm}{dy} &= \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial z} q + \frac{\partial m}{\partial p} s + \frac{\partial m}{\partial q} t + \frac{\partial m}{\partial s} p_{1,2} + \frac{\partial m}{\partial t} p_{2,1}. \end{aligned}$$

Remplaçons les dérivées partielles de m par leurs valeurs, il vient

$$\begin{aligned} -H \left\{ \frac{dm}{dx} + m \frac{dm}{dy} \right\} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial y} m + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial z} (p + m q) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial p} \left(m \frac{\partial \psi}{\partial m} - 2\psi \right) \\ &\quad - \frac{\partial \psi}{\partial m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial m \partial q} + p_{2,1} + 2mp_{1,2} + m^2 p_{2,1}. \end{aligned}$$

De la relation

$$r + 2sm + m^2 t + 2\psi = 0,$$

on tire, en différentiant par rapport à y ,

$$p_{2,1} + 2mp_{1,2} + m^2 p_{2,1} + 2 \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q + \frac{\partial \psi}{\partial p} s + \frac{\partial \psi}{\partial q} t \right\} = 0,$$

de sorte que $\frac{dm}{dx} + m \frac{dm}{dy}$ s'exprime au moyen de x, y, z, p, q, m, t .

Il nous faut calculer maintenant les termes de $\left(\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \right)$ qui contiennent

les dérivées d'ordre n . Après une première différentiation, on a

$$\frac{df}{dy} = 2mp_{1,1} + m^2p_{2,1} + 2 \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} q + \frac{\partial \psi}{\partial p} s + \frac{\partial \psi}{\partial q} i \right\};$$

si on différentie ensuite $2mp_{1,1} + m^2p_{2,1}$, par rapport à y , $(n-2)$ fois, le résultat est, en négligeant les termes qui contiennent les dérivées d'ordre $n+1$,

$$2 \frac{d^{n-2}m}{dy^{n-2}} p_{1,1} + \frac{d^{n-2}m^2}{dy^{n-2}} p_{2,1} + 2(n-2) \frac{d^{n-2}m}{dy^{n-2}} p_{1,2} + (n-2) \frac{d^{n-2}m^2}{dy^{n-2}} p_{2,2} + \dots \\ + \dots + 2(n-2) \frac{dm}{dy} p_{1,n-1} + (n-2) \frac{dm^2}{dy} p_{2,n},$$

et les dérivées $p_{1,n-1}$ et $p_{2,n}$ ne peuvent provenir que des deux premiers termes et des deux derniers. Les termes renfermant les dérivées d'ordre n sont, en définitive,

$$2(p_{1,1} + mp_{2,1}) \left(\frac{dm}{dy} p_{1,n-1} + \frac{dm}{dy} p_{2,n} \right) + 2(n-2) \frac{dm}{dy} \{ p_{1,n-1} + mp_{2,n} \};$$

si on remplace $\frac{dm}{dy}$, $\frac{dm}{dx}$, $\frac{dm}{dp}$ par les valeurs obtenues plus haut, on trouve finalement que les dérivées d'ordre n ne figurent que dans la combinaison $p_{1,n-1} + mp_{2,n} = u$. En différentiant de même $(n-2)$ fois par rapport à y la somme des autres termes de $\frac{df}{dy}$, c'est-à-dire

$$2 \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} q + \frac{\partial \psi}{\partial p} s + \frac{\partial \psi}{\partial q} i \right\},$$

on trouve que les termes qui renferment les dérivées d'ordre n sont les suivants

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial p} p_{1,n-1} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial q} p_{2,n} - 2 \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial m} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial m} q + \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial m} s + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q \partial m} i \right\} \left\{ \frac{p_{1,n-1} + mp_{2,n}}{1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2}} \right\}.$$

On voit donc que, si on prend pour variables

$$x, y, z, p_{1,1}, \dots, p_{1,n-1}; p_{2,1}, \dots, p_{2,n-1}; p_{2,n}, u,$$

le seul terme de $\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right)$, qui renferme $p_{2,n}$, proviendra de

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial p} p_{1,n-1} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial q} p_{2,n} = 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial q} - m \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) p_{2,n} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial p} u.$$

Par suite, le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial u}$ dans $B(F)$ est une fonction linéaire de $p_{a,n}$, et le coefficient de $p_{a,n}$ est

$$\frac{dm}{dx} + m \frac{dm}{dy} - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial q} - m \frac{\partial f}{\partial p} \right);$$

en égalant ce coefficient à zéro, on retrouve précisément la relation (32).

Les seules équations du second ordre, ayant leurs deux familles de caractéristiques confondues, auxquelles s'applique la méthode de M. Darboux, sont donc les équations intégrées précédemment (t. I; n° 93-96), qui comprennent comme cas particulier les équations de Monge-Ampère, pour lesquelles les équations différentielles des caractéristiques du premier ordre admettent trois combinaisons intégrables distinctes.

Toute équation de la forme (48), qui n'appartient pas à cette catégorie, ne peut admettre pour ses caractéristiques d'invariant d'ordre supérieur au premier; si elle admet un invariant du premier ordre, on pourra effectuer une transformation de contact telle que cet invariant soit précisément y . La nouvelle équation sera de la forme

$$r + f(x, y, z, p, q, s) = 0,$$

et, comme les deux systèmes de caractéristiques doivent être confondus, il faudra que f soit indépendant de s , et l'équation se réduira à la forme simple

$$r + f(x, y, z, p, q) = 0.$$

On voit, d'après ce qui précède, que cette équation n'est jamais intégrable par la méthode de M. Darboux, à moins que $\frac{\partial f}{\partial q}$ ne soit nul; car telle est la condition pour que les caractéristiques du premier ordre aient trois invariants distincts.

167. Nous allons appliquer la méthode générale à quelques exemples.
Exemple VII. — Soit à intégrer une équation de la forme

$$r + f(x, y, p, s) = 0;$$

les deux racines m_1, m_2 de l'équation caractéristique ont pour valeurs

$$m_1 = 0, \quad m_2 = \frac{\partial f}{\partial s}.$$

Tout invariant $\varphi(x, y, z, p, q, s, t)$ du second ordre du système de caractéristiques correspondant à la racine m_2 doit satisfaire aux deux équations simultanées

$$A(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

$$B(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p - \frac{\partial \varphi}{\partial p} r + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q + \frac{\partial \varphi}{\partial p} s + \frac{\partial \varphi}{\partial q} t \right\} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} s \right\} = 0;$$

la combinaison $A[B(\varphi)] - B[A(\varphi)] = 0$ conduit à la nouvelle équation

$$A[B(\varphi)] - B[A(\varphi)] = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0;$$

comme la fonction f n'est pas supposée indépendante de s , on en conclut la nouvelle équation

$$C(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0;$$

d'e même la combinaison $C[B(\varphi)] - B[C(\varphi)] = 0$ donne $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, et il reste une seule équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial p} r + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} s \right\} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} s \right\} = 0$$

pour déterminer la fonction φ des quatre variables x, y, p, s . Il y a donc trois invariants distincts du second ordre, ce qui est bien conforme aux résultats déjà connus (n° 92 et 162).

EXEMPLE VIII. — Prenons encore une équation de la forme

$$r + f\left(x, z, p, \frac{s}{q}\right) = 0;$$

posons, pour abréger, $u = \frac{s}{q}$; les deux racines de l'équation caractéristique sont

$$m_1 = 0, \quad m_2 = \frac{1}{q} \frac{\partial f}{\partial u}$$

Un invariant du second ordre de l'un des systèmes doit satisfaire aux

deux équations

$$A(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

$$B(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p - \frac{\partial \varphi}{\partial p} r + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s + \frac{1}{q} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} q + \frac{\partial \varphi}{\partial p} s + \frac{\partial \varphi}{\partial q} t \right\} \\ - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} q + \frac{\partial \varphi}{\partial p} s - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{st}{q^2} \right\} = 0;$$

de ces deux équations on déduit, comme tout à l'heure, en supposant $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ différent de zéro,

$$C(\varphi) = q \frac{\partial \varphi}{\partial q} + s \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

d'où il suit que φ est de la forme $F(x, y, z, p, u)$. En prenant pour variables x, y, z, p, q, u , les équations $B(\varphi) = 0$, $C(\varphi) = 0$ deviennent

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p - \frac{\partial F}{\partial p} r - u^2 \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{q} \frac{\partial F}{\partial u} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} q + \frac{\partial F}{\partial p} qu \right\} \\ - \frac{1}{q} \frac{\partial F}{\partial u} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} q + \frac{\partial F}{\partial p} qu \right\} = 0;$$

on en déduit $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, et il reste une seule équation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \left(p + \frac{\partial F}{\partial u}\right) \frac{\partial F}{\partial z} + \left(u \frac{\partial F}{\partial u} - r\right) \frac{\partial F}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial z} + u \frac{\partial F}{\partial p} + u^2\right) \frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

pour déterminer une fonction des quatre variables x, z, p, u . Il y a donc trois invariants distincts du second ordre (n° 92 et 162).

EXEMPLE IX. — Dans les deux exemples précédents, on peut employer aussi la méthode des intégrales intermédiaires du premier ordre pour intégrer l'équation. Il n'en est plus de même pour l'équation suivante

$$r + f(x, p, se^{ks}) = 0.$$

Soit $\alpha = se^{ks}$; un invariant du second ordre de l'un des systèmes doit satisfaire aux deux équations

$$A(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

$$B(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p - \frac{\partial \varphi}{\partial p} r + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \alpha^k \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} q + \frac{\partial \varphi}{\partial p} s + \frac{\partial \varphi}{\partial q} t \right\} \\ - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial p} s + \alpha^k \frac{\partial \varphi}{\partial u} \alpha^k q s \right\} = 0.$$

on en déduit successivement, en supposant que la fonction f contient u ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - K_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

ce qui montre que φ est de la forme $F(x, y, p, u^k)$.

L'équation $B(\varphi) = 0$ devient, en prenant pour variables x, y, p, u ,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} Kpu - \frac{\partial F}{\partial p} f + \frac{\partial f}{\partial u} u^k \frac{\partial F}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial p} - u \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial u} = 0;$$

on en déduit que l'on doit avoir aussi $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, et il reste une seule équation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \left(u \frac{\partial f}{\partial u} - f\right) \frac{\partial F}{\partial p} + \left(Kpu - u \frac{\partial f}{\partial p}\right) \frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

pour déterminer une fonction $F(x, p, u)$ de trois variables. Il y a donc deux invariants distincts du second ordre.

168. Lorsqu'une équation du second ordre ne renferme que la dérivée seconde z , les deux systèmes de caractéristiques admettent respectivement les deux invariants x et y ; il suffira donc qu'il existe une autre combinaison intégrable dans l'un des deux systèmes pour pouvoir appliquer la méthode de M. Darboux. Toute intégrale intermédiaire est de la forme

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right) = \varphi(x),$$

ou d'une forme analogue obtenue en remplaçant x par y (n° 143). On est donc ramené à l'intégration d'une équation différentielle d'ordre n , renfermant une fonction arbitraire $\varphi(x)$.

Considérons, en particulier, une équation linéaire

$$(34) \quad z + ap + bq + cz = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions de x et de y seulement, et le système de caractéristiques défini par les équations

$$dx = 0, dz = q, dy, dq_1 = q_2 dy, \dots, dq_{n-1} = q_n dy, \\ \dots, dp_1 = \frac{\partial p_1}{\partial y} dy, dp_2 = \frac{\partial p_2}{\partial y} dy, \dots, dp_n = \frac{\partial p_n}{\partial y} dy \dots$$

où on a posé

$$p_i = \frac{\mathcal{V}_x}{\lambda x}, \quad q_i = \frac{\mathcal{V}_y}{\lambda y}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial y} &= s = -(ap_1 + bq_1 + cz), \\ \frac{\partial p_2}{\partial y} &= \frac{\partial s}{\partial x} = -\left(ap_2 + bs + cp_1 + \frac{\partial a}{\partial x} p_1 + \frac{\partial b}{\partial x} q_1 + \frac{\partial c}{\partial x} s\right), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

D'une manière générale, $\frac{\partial p_n}{\partial y}$ est une fonction linéaire et homogène de $x, q_1, p_1, p_2, \dots, p_n$; un invariant d'ordre n de ce système de caractéristiques est une fonction de $x, y, z, p_1, p_2, \dots, p_n$ qui doit satisfaire à la condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial y} = 0;$$

en égalant à zéro séparément le coefficient de q_1 et la somme des termes indépendants de q_1 , on a un système de deux équations,

$$(35) \quad \begin{cases} A(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0, \\ B(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \beta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \dots + \beta_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0, \end{cases}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des fonctions de x et de y , et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ des fonctions linéaires et homogènes de z, p_1, p_2, \dots, p_n . Nous supposons que le système de caractéristiques considéré n'admet aucun invariant d'ordre inférieur à n , sauf $\varphi = x$, de sorte que les équations (35) n'admettent, en dehors de l'intégrale évidente $\varphi = x$, qu'une seule intégrale commune (n° 161). On déduira donc des équations (35) un système complet de $n + 1$ équations distinctes.

On a d'abord

$$C(\varphi) = A[B(\varphi)] - B[A(\varphi)] = \sum_{i=1}^n \{A(\beta_i) - B(\alpha_i)\} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = 0;$$

mais $A(\beta_i)$ et $B(\alpha_i)$ sont indépendants de x, p_1, p_2, \dots, p_n , de sorte que la nouvelle équation est de la forme

$$C(\varphi) = \gamma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \gamma_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \dots + \gamma_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ étant des fonctions de x et y seulement. Il vient ensuite

$$A(C(\varphi)) - C(A(\varphi)) = 0,$$

$$C_1(\varphi) = B(C(\varphi)) - C(B(\varphi)) = \sum \{ B(\gamma_i) - C(\beta_i) \} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = 0,$$

et la nouvelle équation $C_1(\varphi) = 0$ est de même forme que $C(\varphi) = 0$. On a de même

$$A(C_1(\varphi)) - C_1(A(\varphi)) = 0, \quad C(C_1(\varphi)) - C_1(C(\varphi)) = 0,$$

tandis que $B(C_1(\varphi)) - C_1(B(\varphi)) = 0$ donne une nouvelle équation de même forme

$$C_2(\varphi) = 0;$$

en continuant ainsi, on arrivera à former $(n - 1)$ équations distinctes

$$(36) \quad C(\varphi) = 0, \quad C_1(\varphi) = 0, \dots, \quad C_{n-1}(\varphi) = 0,$$

de même forme que $C(\varphi) = 0$, formant avec les équations (53) un système complet. Des relations (36) on déduira les valeurs des rapports

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}$$

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}}{P_2} = \dots = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p_n}}{P_n},$$

P_1, P_2, \dots, P_n ne dépendant que de x et de y . On ne peut avoir $P_n = 0$, car on en concluerait $\frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0$, contrairement à l'hypothèse. Cela étant,

faisons $P_n = -1$, ce qui ne diminue pas la généralité, et remplaçons $\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}$,

$\dots, \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}}$ par les valeurs précédentes dans les équations $A(\varphi) = 0$,

$B(\varphi) = 0$; nous obtenons un système équivalent au système formé par les équations (53) et (56)

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + P_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}} + P_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Z \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \{ Kx + K_1 p_1 + \dots + K_n p_n \} \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0 \end{array} \right.$$

K, K_1, \dots, K_n, Z ne dépendant que des variables x et y . Pour que ce

système soit jacobien, il faut que l'on ait

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial y} &= K + ZK_n, \\ \frac{\partial P_1}{\partial y} &= K_1 + P_1 K_n, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} &= K_{n-1} + P_{n-1} K_n;\end{aligned}$$

si ces conditions sont vérifiées, on reconnaît que

$$\varphi = e^{\int -K_n dy} \{ p_n - P_{n-1}, p_{n-1} - \dots - P_1, p_1 - Zx \}$$

est une intégrale du système (37). On peut donc prendre pour invariant d'ordre n une fonction linéaire de x, p_1, p_2, \dots, p_n ,

$$\Lambda p_n + \Lambda_1 p_{n-1} + \dots + \Lambda_{n-1} p_1 + \Lambda_n x,$$

$\Lambda, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ étant des fonctions de x et de y .

L'équation linéaire proposée admet alors l'intégrale intermédiaire

$$(58) \quad \Lambda \frac{\partial^n x}{\partial x^n} + \Lambda_1 \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}} + \dots + \Lambda_{n-1} \frac{\partial x}{\partial x} + \Lambda_n x = \varphi(x),$$

et les équations (34) et (38) forment un système en involution pour toutes les formes possibles de la fonction $\varphi(x)$. Supposons, en particulier, $\varphi(x) = 0$; l'intégrale générale du système des deux équations

$$\begin{aligned}F(x) &= \Lambda \frac{\partial^n x}{\partial x^n} + \Lambda_1 \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}} + \dots + \Lambda_n x = 0, \\ \Phi(x) &= \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial x}{\partial x} + b \frac{\partial x}{\partial y} + cx = 0\end{aligned}$$

dépend donc d'une infinité de constantes arbitraires. On a démontré plus haut (n° 110) que cela ne peut arriver que lorsque la suite de Laplace relative à l'équation $\Phi(x) = 0$ se termine du côté des indices négatifs après $n - 1$ transformations au plus.

Reciproquement, si la suite de Laplace se termine de ce côté après $p - 1$ transformations, le système de caractéristiques correspondant admet un invariant d'ordre p . En effet, l'équation linéaire admet alors

une intégrale de la forme

$$z = BY + B_1 Y' + \dots + B_{p-1} Y^{(p-1)}$$

B, B_1, \dots, B_{p-1} étant des fonctions déterminées de x et de y , et Y une fonction arbitraire de y . Elle a donc une infinité d'intégrales communes, dépendant d'une fonction arbitraire, avec une équation linéaire de même forme que $F(x) = 0$ et d'ordre p .

$$F_1(x) = \frac{\partial^p z}{\partial x^p} + A_1' \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x^{p-1}} + \dots + A_p' z = 0.$$

Il faut pour cela que l'on ait une relation identique de la forme

$$(59) \quad \frac{d^{p-1}\Phi(x)}{dx^{p-1}} + a_1 \frac{d^{p-2}\Phi(x)}{dx^{p-2}} + \dots + a_{p-1}\Phi(x) - \frac{dF_1(x)}{dy} - \beta F_1(x) = 0,$$

a_1, a_2, \dots, β désignant des fonctions de x et de y (n° 110). Le coefficient de $\frac{\partial^p z}{\partial x^p}$ dans cette identité est $\alpha - \beta$; on doit donc avoir $\beta = \alpha$, et la relation (59) peut s'écrire :

$$e^{\int \alpha y} \left\{ \frac{d^{p-1}\Phi(x)}{dx^{p-1}} + a_1 \frac{d^{p-2}\Phi(x)}{dx^{p-2}} + \dots + a_{p-1}\Phi(x) \right\} = \frac{d}{dy} \left(e^{\int \alpha y} F_1(x) \right),$$

identité qui montre que toute intégrale de $\Phi(x) = 0$ satisfait à une équation de la forme

$$e^{\int \alpha y} F_1(x) - \varphi(y) = 0.$$

L'un des systèmes de caractéristiques de l'équation du second ordre admet donc les deux invariants x et $e^{\int \alpha y} F_1(x)$.

En résumé, si l'un des systèmes de caractéristiques admet un invariant d'ordre n , et aucun invariant d'ordre inférieur à n , autre que x , la suite de Laplace se termine d'un côté après $n - 1$ transformations, et inversement. Dans le cas des équations linéaires, la méthode de M. Darboux et la méthode de Laplace réussissent en même temps.

169. On est encore conduit au même résultat en appliquant la méthode générale d'intégration des systèmes en involution exposée plus haut (n° 137). Intégrons pour cela l'équation (59) comme une équation différentielle ordinaire à deux variables x et z , en y considérant y

comme un paramètre ; l'intégrale générale est de la forme

$$(60) \quad z = z_1 \left[\varphi_0(y) + \int_{x_0}^x \beta_1 \varphi(x) dx \right] + z_2 \left[\varphi_1(y) + \int_{x_0}^x \beta_2 \varphi(x) dx \right] \\ + \dots + z_n \left(\varphi_{n-1}(y) + \int_{x_0}^x \beta_n \varphi(x) dx \right),$$

z_1, z_2, \dots, z_n étant n intégrales particulières de l'équation sans second membre, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ des fonctions déterminées de x et de y , et $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \dots, \varphi_{n-1}(y)$ des fonctions arbitraires de y . On peut évidemment supposer que l'on a choisi les intégrales particulières z_1, z_2, \dots, z_n , de façon que $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \dots, \varphi_{n-1}(y)$ représentent respectivement les fonctions de y auxquelles se réduisent, pour $x = x_0$, les fonctions $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}$. Pour que la formule (60) représente une intégrale de l'équation

$$\Phi(z) = z + ap + bq + cx = 0,$$

il faut et il suffit que les n fonctions $\varphi_0(y), \varphi_1(y), \dots, \varphi_{n-1}(y)$ vérifient les relations

$$\Phi(z) = 0, \frac{d\Phi(z)}{dx} = 0, \dots, \frac{d^{n-2}\Phi(z)}{dx^{n-2}} = 0,$$

où on aurait remplacé x par x_0 , z par $\varphi_0(y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ par $\varphi_1(y)$, \dots , $\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}$ par $\varphi_{n-1}(y)$ (n° 137). Nous allons montrer que ces n fonctions $\varphi_0(y), \dots, \varphi_{n-1}(y)$ peuvent s'exprimer, par des formules linéaires et homogènes, au moyen de $q - 1$ constantes arbitraires et d'une fonction arbitraire Y de y et de ses $n - q$ premières dérivées, sans aucun signe de quadrature (!).

Soient a_0, b_0, c_0 les fonctions de y auxquelles se réduisent a, b, c , pour $x = x_0$; l'équation $\Phi(z) = 0$ nous donne d'abord

$$\varphi_1'(y) + a_0 \varphi_1(y) + b_0 \varphi_0'(y) + c_0 \varphi_0(y) = 0,$$

ou, en multipliant par $e^{\int a_0 dy}$,

$$\frac{d}{dy} [\varphi_1(y) e^{\int a_0 dy}] + b_1 \varphi_0'(y) + c_1 \varphi_0(y) = 0,$$

(1) Voir ma *Mémoire Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace* (*American Journal of Mathematics*, t. XVIII; p. 354).

en posant, pour abréger,

$$b_1 = b_0 e^{\int v dy}, \quad c_1 = c_0 e^{\int v dy}.$$

Il vient, en intégrant par parties,

$$\varphi_1(y) e^{\int v dy} + b_1 \varphi_0(y) + \int \left(c_1 - \frac{\partial b_1}{\partial y} \right) \varphi_0(y) dy = C^u.$$

Si $c_1 - \frac{\partial b_1}{\partial y} = 0$, il suffira de poser $\varphi_0(y) = Y$, et $\varphi_1(y)$ s'exprimera aussi linéairement en fonction de Y et d'une constante arbitraire; si $c_1 - \frac{\partial b_1}{\partial y}$ n'est pas nul, il suffira de poser

$$\left(c_1 - \frac{\partial b_1}{\partial y} \right) \varphi_0(y) = Y',$$

et on trouvera pour $\varphi_1(y)$ une fonction linéaire de Y et de Y' . Supposons la loi vraie jusqu'à la dérivée d'ordre p , de telle façon que $\varphi_0(y), \dots, \varphi_p(y)$ s'expriment au moyen d'une fonction arbitraire de y , de ses $(p-r)$ premières dérivées et de r constantes arbitraires C_1, C_2, \dots, C_r , par des formules linéaires et homogènes dont les coefficients sont des fonctions déterminées de y . Pour calculer ensuite $\varphi_{p+1}(y)$, on part de la formule

$$\frac{\partial^{p+2} z}{\partial x^{p+1} \partial y} + a \frac{\partial^{p+1} z}{\partial x^{p+1}} + a_1 \frac{\partial^p z}{\partial x^p} + \dots + a_p \frac{\partial z}{\partial x} + a_{p+1} z + \beta \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

obtenue en différentiant p fois l'équation proposée par rapport à x et tenant compte de l'équation même. Si on fait dans cette relation $x = x_0$, et qu'on remplace ensuite $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^p z}{\partial x^p}$ par les expressions déjà obtenues pour $\varphi_0(y), \dots, \varphi_p(y), \frac{\partial z}{\partial y}$ par la valeur de $\varphi'_0(y)$, puis $\frac{\partial^{p+1} z}{\partial x^{p+1}}$ par $\varphi_{p+1}(y)$, il vient

$$\varphi'_{p+1}(y) + a_0 \varphi_{p+1}(y) + l_0 Y + l_1 Y' + \dots + l_{p-r+1} Y^{p-r+1} + m_1 C_1 + \dots + m_r C_r = 0,$$

$l_0, l_1, \dots, l_{p-r+1}, m_1, \dots, m_r$ étant des fonctions déterminées de y , Y une fonction arbitraire de y , et C_1, \dots, C_r des constantes arbitraires. Multiplions encore par $e^{\int v dy}$, et intégrons par parties autant de fois que possible; on peut écrire la formule

$$\frac{d}{dy} \left(e^{\int v dy} \varphi_{p+1}(y) \right) = \frac{d}{dy} \left\{ L_0 Y + \dots + L_{p-r} Y^{p-r} + M_1 C_1 + \dots + M_r C_r \right\} + N Y,$$

$L_2, \dots, L_{p-r}, M_1, \dots, M_r, N$ étant des fonctions déterminées de y . Si N est nul, on voit que $\varphi_{p+1}(y)$ est une fonction linéaire et homogène de $Y, Y', \dots, Y^{p-r}, C_1, C_2, \dots, C_r$ et d'une nouvelle constante arbitraire C_{r+1} . Si N n'est pas nul, on posera $NY = Y_1$, Y_1 étant une nouvelle fonction arbitraire de y , et on voit que $\varphi_0(y), \dots, \varphi_{p+1}(y)$ seront des fonctions linéaires et homogènes de $Y_1, Y_1', \dots, Y_1^{p-r+1}$ et des r constantes C_1, C_2, \dots, C_r . La loi est donc générale.

En remplaçant $\varphi_0(y), \dots, \varphi_{n-1}(y)$ par leurs expressions dans la formule (60), on trouve que l'intégrale générale de l'équation

$$s + ap + bq + cz = 0$$

est donnée par une formule de la forme

$$s = C_1 v_1 + \dots + C_{q-1} v_{q-1} + \Lambda Y + \Lambda_1 Y' + \dots + \Lambda_{n-q} Y^{(n-q)} \\ + x_1 \int_{x_0}^x \beta_1 \varphi(x) dx + \dots + x_n \int_{x_0}^x \beta_n \varphi(x) dx,$$

$v_1, \dots, v_{q-1}; \Lambda, \dots, \Lambda_{n-q}; x_1, \dots, x_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ étant des fonctions déterminées de x et de y , Y une fonction arbitraire de y , $\varphi(x)$ une fonction arbitraire de x et C_1, \dots, C_{q-1} des constantes arbitraires. En supposant nulles toutes ces constantes, ainsi que la fonction $\varphi(x)$, on a une intégrale particulière de la forme

$$s = \Lambda Y + \Lambda_1 Y' + \dots + \Lambda_{n-q} Y^{(n-q)},$$

ce qui suffit à prouver que la suite de Laplace se termine après $n - q$ transformations au plus. D'autre part, si on suppose que l'invariant d'ordre le moins élevé est d'ordre n , la suite de Laplace ne peut se terminer qu'après $n - 1$ transformations; on a donc nécessairement $q = 1$, et la formule précédente ne renferme pas de constantes arbitraires.

REMARQUE I. — Soit u l'invariant d'ordre minimum obtenu plus haut

$$u = \Lambda p_n + \Lambda_1 p_{n-1} + \dots + \Lambda_n s;$$

tout autre invariant est de la forme

$$F\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \dots, \frac{d^p u}{dx^p}\right)$$

et peut contenir les dérivées d'une façon quelconque.

REMARQUE II. — Lorsqu'il existe une équation

$$F(x) = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + f\left(x, y, z, \frac{\partial x}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}}\right) = 0$$

formant un système en involution avec une équation linéaire

$$s + ap + bq + cz = 0,$$

on peut toujours introduire une constante dans $F(x)$. En effet, si on change x en ax , l'équation linéaire ne change pas; l'équation $F(ax) = 0$ doit donc former aussi un système en involution avec l'équation linéaire proposée. Or l'équation $F(ax) = 0$ dépend effectivement de la constante a , à moins que F ne soit une fonction homogène et du premier degré de $x, \frac{\partial x}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} x}{\partial x^{n-1}}$. S'il en est ainsi, désignons par x_1 une intégrale de

l'équation proposée qui ne vérifie pas l'équation $F(x) = 0$; en changeant x en $x + ax_1$, la nouvelle équation $F(x + ax_1) = 0$ dépend effectivement de a , car le coefficient de a se réduit à $F(x_1)$, pour $x = x_1$.

Il résulte de ces remarques que, lorsque la suite de Laplace relative à une équation linéaire est illimitée dans les deux sens, il ne peut exister d'équation formant avec celle-là un système en involution. Si la suite de Laplace est limitée d'un seul côté, par exemple du côté des indices positifs, il existe une infinité d'équations formant avec la proposée un système en involution; elles ne renferment que les dérivées partielles de x par rapport à la variable y .

REMARQUE III. — Dans le cas de l'équation linéaire la plus générale,

$$Ar + 2Bs + Ct + Dp + Eq + Fz + G = 0,$$

la méthode de M. Darboux conduit aux mêmes résultats que la méthode de Laplace, généralisée par Legendre. (Voir n° 113 et suivants.)

170. EXEMPLE X. — M. Sophus Lie ⁽¹⁾ a donné un procédé élégant pour trouver tous les cas où l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(z)$$

est intégrable par la méthode de M. Darboux. Prenons en particulier

⁽¹⁾ SOPHUS LIE, *Discussion der Differentialgleichung $z = f(z)$* (*Archiv for Mathematik*. Bd. 6, Christiania; 1880).

le système de caractéristiques

$$\begin{aligned} dx &= 0, & dx &= q_1 dy, & dq_1 &= q_2 dy, \dots & dq_{n-1} &= q_n dy, \\ dp_1 &= \frac{\partial p_1}{\partial y} dy, & dp_2 &= \frac{\partial p_2}{\partial y} dy, \dots, & dp_n &= \frac{\partial p_n}{\partial y} dy, \dots; \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial y} &= s = f(x), & \frac{\partial p_2}{\partial y} &= \frac{\partial s}{\partial x} = f'(x) p_1, \\ \frac{\partial p_3}{\partial y} &= \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = f''(x) p_1^2 + f'(x) p_2, \dots \end{aligned}$$

D'une manière générale, appelons poids du produit

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n},$$

la somme $a_1 + 2a_2 + \dots + ia_i$; $\frac{\partial p_k}{\partial y}$ est un polynôme entier P_{k-1} en p_1, p_2, \dots, p_{k-1} dont tous les termes sont de poids $k-1$,

$$\begin{aligned} P_0 &= f(x), & P_1 &= f'(x) p_1, & P_2 &= f''(x) p_1^2 + f'(x) p_2, \dots, \\ P_{k-1} &= f^{(k-1)}(x) p_1^{k-1} + Q_{k-1}, \end{aligned}$$

Q_{k-1} ne renfermant que p_1, p_2, \dots, p_{k-2} . Si le système de caractéristiques considéré admet une combinaison intégrable d'ordre n , $d\varphi = 0$, φ doit être une fonction de $x, y, z, p_1, p_2, \dots, p_n$ satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} f(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} f'(x) p_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} P_{n-1} = 0,$$

et, comme φ ne contient pas q_1 , il faut que l'on ait séparément

$$(61) \quad \begin{cases} A(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ B(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} f(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} f'(x) p_1 + \sum_{i=3}^n P_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = 0. \end{cases}$$

Les équations (61) entraînent la suivante

$$C(\varphi) = A[B(\varphi)] - B[A(\varphi)] = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} f'(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} f''(x) p_1 + \sum_{i=3}^n \frac{\partial P_{i-1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = 0,$$

et les deux équations $B(\varphi) = 0$, $C(\varphi) = 0$ sont équivalentes, en supposant que $f'' - f'''$ n'est pas nul, à celles-ci

$$\begin{aligned} f'(z) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (f'' - f''') p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \sum_{i=3}^n \left\{ f'(z) P_{i-1} - f'(z) \frac{\partial P_{i-1}}{\partial z} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} &= 0, \\ -f''(z) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (f'' - f''') \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \sum_{i=3}^n \left\{ f''(z) \frac{\partial P_{i-1}}{\partial z} - f''(z) P_{i-1} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} &= 0. \end{aligned}$$

On remarquera que le coefficient de $\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}$ dans la première équation est de la forme

$$(f'' - f''') p_{i-1} + R_{i-1},$$

tandis que dans la seconde équation il est de la forme S_{i-1} , en désignant par R_{i-1} et S_{i-1} des polynômes de poids $i - 1$ ne renfermant que p_1, p_2, \dots, p_{i-2} . On peut encore écrire les équations précédentes

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \frac{f'(z)}{f'' - f'''} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \sum_{i=3}^n [p_{i-1} + \alpha_{i-1}] \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = 0, \\ M(\varphi) &= -\frac{f''(z)}{f'' - f'''} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \sum_{i=3}^n \beta_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = 0, \end{aligned}$$

α_{i-1} et β_{i-1} étant des polynômes en p_1, p_2, \dots, p_{i-2} de poids $i - 1$. Formons la combinaison

$$L[M(\varphi)] - M[L(\varphi)] = 0,$$

nous obtenons une nouvelle équation

$$M_1(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \sum_{i=3}^n \beta_{i-1}^{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = 0,$$

où $\beta_{i-1}^{(1)}$ est un polynôme de poids $i - 2$. On aura de même

$$M_2(\varphi) = L[M_1(\varphi)] - M_1[L(\varphi)] = \sum_{i=3}^n \beta_{i-1}^{(2)} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = 0,$$

$\varphi^{(3)}$, étant de poids $i - 3$, et d'une manière générale

$$M_K(\varphi) = L[M_{K-1}(\varphi)] - M_{K-1}[L(\varphi)] = \sum \beta_{i,K}^{(K)} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = 0,$$

$\beta_{i,K}^{(K)}$, étant de poids $i - K - 1$. Il s'ensuit que $M_K(\varphi)$ est de la forme

$$M_K(\varphi) = a_K \frac{\partial \varphi}{\partial p_{K+1}} + b_K p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_{K+2}} + \dots,$$

a_K et b_K étant des constantes. Pour avoir la valeur du coefficient a_K , remarquons que l'on a :

$$a_{K+1} = L(b_K p_1) - M_K(p_K + a_K) = -a_K,$$

et comme $a_1 = 1$, il s'ensuit que l'on a $a_K = (-1)^{K+1}$. Au bout de $n - 1$ opérations, on arrivera donc à l'équation

$$M_{n-1}(\varphi) = (-1)^n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = 0;$$

en remontant de proche en proche, on en conclura successivement que l'on doit avoir aussi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Il n'y a donc pas d'autre solution pour le système (61) que $\varphi = x$.

Par suite, l'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = f(x)$$

ne peut être intégrée par la méthode de M. Darboux, lorsque $f^2(x) - f(x)f''(x)$ est différent de zéro.

Lorsque $f^2 - ff''$ est nul, on a $f(x) = Ae^{Kx}$, A et K étant des constantes. Si K est nul, l'intégration est immédiate; si K n'est pas nul, on est ramené à l'équation de Liouville (n° 47). Pour toute autre forme de la fonction $f(x)$, l'intégration est impossible par cette voie; on en conclut, en particulier, que l'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = \sin x,$$

à laquelle se ramène la détermination des surfaces à courbure constante, n'est pas intégrable par la méthode de M. Darboux ⁽¹⁾.

171. Exemple XI. — Appliquons encore la méthode à l'équation

$$s(x+y) = 2\sqrt{pq};$$

on trouve deux intégrales intermédiaires du second ordre

$$\frac{r}{2\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{x+y} = \varphi(x),$$

$$\frac{t}{2\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{x+y} = \psi(y).$$

Poseons $p = u^2$, $q = v^2$; u et v s'obtiennent par l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales

$$du = \left[\varphi(x) - \frac{u}{x+y} \right] dx + \frac{v}{x+y} dy,$$

$$dv = \frac{u}{x+y} dx + \left[\psi(y) - \frac{v}{x+y} \right] dy,$$

dont l'intégrale générale est, en remplaçant $\varphi(x)$ par X'' , et $\psi(y)$ par Y'' ,

$$u = X' + \frac{Y-X}{x+y}, \quad v = Y' + \frac{X-Y}{x+y},$$

X désignant une fonction arbitraire de x , et Y une fonction arbitraire de y ; on a ensuite s par des quadratures

$$s = \int \left\{ X' + \frac{Y-X}{x+y} \right\}^2 dx + \int \left\{ Y' + \frac{X-Y}{x+y} \right\}^2 dy,$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$s = \int X'^2 dx + \int Y'^2 dy - \frac{(X-Y)^2}{x+y}.$$

⁽¹⁾ M. Sophus Lie a démontré aussi qu'il en est de même de l'équation

$$s^2(s^2 - rt) = (1 + p^2 + q^2)^2,$$

qui définit les surfaces à courbure constante en coordonnées cartésiennes (*Zur Theorie der Flächen constanten Krümmung*).

Pour faire disparaître tout signe d'intégration, il suffira d'exprimer x et X en fonction d'une variable auxiliaire α , de telle façon que $\int X^2 dx$ s'exprime aussi explicitement, et de même pour y et Y . Nous n'avons pour cela qu'à poser

$$X' = \alpha, \quad x = \varphi'(\alpha),$$

ce qui donne

$$X = \int X' dx = \int \alpha \varphi''(\alpha) d\alpha = \alpha \varphi'(\alpha) - \varphi(\alpha),$$

$$\int X^2 dx = \int \alpha^2 \varphi''(\alpha) d\alpha = \alpha^2 \varphi'(\alpha) - 2\alpha \varphi(\alpha) + 2\varphi(\alpha);$$

de même, en posant $Y' = \beta$, $y = \psi'(\beta)$, on aura

$$Y = \beta \psi'(\beta) - \psi(\beta)$$

$$\int Y^2 dy = \beta^2 \psi'(\beta) - 2\beta \psi(\beta) + 2\psi(\beta).$$

En définitive, l'intégrale générale de l'équation $s(x+y) = 2\sqrt{pq}$ est représentée par les formules suivantes, où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires, α et β deux paramètres variables,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \varphi'(\alpha), \\ y = \psi'(\beta), \\ s = \frac{\alpha^2 \varphi''(\alpha) - 2\alpha \varphi'(\alpha) + 2\varphi(\alpha) + \beta^2 \psi''(\beta) - 2\beta \psi'(\beta) + 2\psi(\beta)}{\varphi''(\alpha) + \psi''(\beta)} \\ \quad - \frac{[\alpha \varphi'(\alpha) - \varphi(\alpha) - \beta \psi'(\beta) + \psi(\beta)]^2}{\varphi''(\alpha) + \psi''(\beta)}. \end{array} \right.$$

172. Dans ce qui précède, nous avons supposé l'équation du second ordre ramenée à la forme $r + f = 0$, ou $s + f(x, y, x, p, q) = 0$. Théoriquement, on a toujours le droit de faire cette hypothèse, et les théorèmes établis plus haut sont vrais, quelle que soit la forme de l'équation à intégrer. Mais, dans la pratique, il peut arriver qu'il soit impossible d'effectuer la résolution indiquée; on peut alors diriger les calculs comme il suit. Soit $F = 0$ l'équation du second ordre; en ajoutant toutes les relations que l'on obtient par des différentiations successives jusqu'à l'ordre $n - 2$, on a en tout $\frac{n(n-1)}{2}$ relations entre les variables x , y , s et les dérivées de s jusqu'à celles d'ordre n , c'est-à-dire entre

$\frac{n^2 + 3n + 6}{2}$ variables; on pourra donc les exprimer toutes au moyen de $\frac{n^2 + 3n + 6}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n + 3$ paramètres. En portant ces expressions dans les $2n + 1$ équations différentielles des caractéristiques d'ordre n , il restera un système de $2n + 1$ équations entre $2n + 3$ variables; il y aura toujours deux équations de moins que de variables.

Prenons, par exemple, une équation de la forme

$$s + f(x, y, z, p, q, t) = 0,$$

f ne contenant pas r . On reconnaît aisément que toutes les dérivées partielles de la fonction inconnue peuvent s'exprimer au moyen des dérivées $p_{k,0}$ et $p_{k,1}$; on pourra donc ne laisser que ces dérivées dans les équations différentielles des caractéristiques. Prenons en particulier le système qui correspond à la racine

$$m = \frac{\partial f}{\partial x}$$

de l'équation caractéristique; l'équation proposée différentiée $n - 1$ fois par rapport à y donne

$$p_{1,n} + \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) + \frac{\partial f}{\partial x} p_{n,n+1} = 0,$$

ou, en multipliant par dx ,

$$dp_{1,n} + \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}} \right) dx = 0.$$

C'est la dernière équation des caractéristiques d'ordre n de ce système; les autres s'écrivent immédiatement.

Exemple XII. — Appliquons cette méthode à l'équation (*)

$$s - qz - q^2 f\left(y, \frac{t}{q}\right) = 0;$$

un des systèmes de caractéristiques est défini, en posant $u = \frac{t}{q}$ et

(*) BORDU, *Comptes Rendus*, t. CXX, p. 902; 1893.

poussant jusqu'aux dérivées du troisième ordre, par les relations

$$dy = -q \frac{\partial f}{\partial u} dx, \quad dz = \left(p - q^2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) dx, \quad dp = \left\{ r - q \frac{\partial f}{\partial u} (qz + q^2 f) \right\} dx,$$

$$dq = \left(qz + q^2 f - lq \frac{\partial f}{\partial u} \right) dx,$$

$$dr = p_{21} dx + p_{12} dy, \quad dt = p_{11} dx + p_{01} dy,$$

$$dp_{00} = \left\{ \frac{d^2 \{ qz + q^2 f(y, u) \}}{dy^2} \right\} dx,$$

où on a

$$p_{12} = q^2 + lz + 2qlf + q^2 \frac{\partial f}{\partial y} - l^2 \frac{\partial f}{\partial u} + q \frac{\partial f}{\partial u} p_{21}$$

$$p_{21} = pq + \left(z + 2qlf - \frac{\partial f}{\partial u} l \right) (qz + q^2 f) + q \frac{\partial f}{\partial u} p_{11}$$

$$\left\{ \frac{d^2 \{ qz + q^2 f(y, u) \}}{dy^2} \right\} = 3ql + zp_{21} + 2l^2 f + 2qlp_{01} + 4ql \frac{\partial f}{\partial y} + q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - lp_{01} \frac{\partial f}{\partial u} \\ + \left(\frac{p_{21}}{q} - \frac{l^2}{q^2} \right) \left\{ 2q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u} + 2ql \frac{\partial f}{\partial u} + (qp_{00} - l^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right\}.$$

Tout invariant du troisième ordre $\varphi(x, y, z, p, q, r, l, p_{21}, p_{01}, p_{00})$ doit donc satisfaire aux deux équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{00}} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - q \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(p - q^2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \left\{ r - q \frac{\partial f}{\partial u} (qz + q^2 f) \right\} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \left\{ qz + q^2 f - q l \frac{\partial f}{\partial u} \right\} \\ + \left\{ p_{00} - p_{21} q \frac{\partial f}{\partial u} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left\{ p_{12} - q p_{01} \frac{\partial f}{\partial u} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \left(\frac{d^2 (qz + q^2 f)}{dy^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial p_{00}} = 0.$$

Des combinaisons faciles donnent successivement, en remplaçant p_{11} et p_{21} par leurs valeurs,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad q \frac{\partial \varphi}{\partial q} + l \frac{\partial \varphi}{\partial l} + p_{00} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{00}} = 0,$$

ce qui montre que φ est de la forme

$$\varphi = F(x, y, u, v), \quad u = \frac{l}{q}, \quad v = \frac{p_{00}}{q};$$

il reste ensuite les deux équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \\ \left(1 + uf + \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial y} \\ + (3u + 2f + f^2 + 4u \frac{\partial f}{\partial y} + 2u \frac{\partial f}{\partial u} (1 - u^2) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u} (1 - u^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} (1 - u^2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) \frac{\partial F}{\partial v} &= 0, \end{aligned}$$

pour déterminer la fonction F . Si on suppose cette fonction indépendante de v , il reste la condition

$$\left(1 + uf + \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

il y a donc un invariant du second ordre et un invariant du troisième ordre.

178. Une équation du second ordre intégrable par la méthode de M. Darboux est caractérisée par la propriété suivante : *Toute intégrale de cette équation appartient à une autre équation aux dérivées partielles qui a une infinité d'intégrales communes avec la proposée, dépendant d'une fonction arbitraire, sans les admettre toutes.* Pour qu'il en soit ainsi, il faut en effet qu'il existe une équation $\varphi = 0$, dépendant d'une fonction arbitraire, et formant avec la proposée $F = 0$ un système en involution; ce qui ne peut arriver que si l'une des familles de caractéristiques admet deux invariants distincts. Lorsque chacune d'elles admet un invariant au plus, on ne peut obtenir par cette méthode que des intégrales dépendant d'une seule fonction arbitraire, mais non l'intégrale générale. Il peut arriver aussi qu'il existe des équations formant avec $F = 0$ un système en involution, sans qu'il existe aucune combinaison intégrable pour les équations différentielles des caractéristiques. Nous en avons vu un exemple plus haut avec l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante (n° 126). Ces équations ne peuvent dépendre d'aucune constante arbitraire.

La théorie des groupes d'ordre infini de transformations permet de former des équations aux dérivées partielles du second ordre, intégrables par la méthode de M. Darboux⁽¹⁾. Nous considérerons seulement, pour fixer les idées, des transformations ponctuelles.

(1) SORNET LIZ, « Zur allgemeinen Theorie... » (*Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft*, 1893, Kapitel II).

BARBON, *Comptes Rendus* (1894-1895).

Les formules

$$(62) \quad \begin{cases} x' = P(x, y, z), \\ y' = Q(x, y, z), \\ z' = R(x, y, z), \end{cases}$$

qui font correspondre au point (x, y, z) le point (x', y', z') définissent une transformation ponctuelle dans l'espace à trois dimensions. Lorsque les fonctions P, Q, R dépendent en outre d'un nombre fini de constantes arbitraires, ou d'une ou plusieurs fonctions arbitraires, on a ainsi un ensemble de transformations. Cet ensemble de transformations forme un *groupe*, si la suite de deux transformations quelconques de cet ensemble donne une nouvelle transformation appartenant au même ensemble. Nous ne nous occuperons que du cas où on a un groupe d'ordre infini, c'est-à-dire dépendant d'une ou plusieurs fonctions arbitraires.

Par exemple, les formules

$$(I) \quad x' = X(x), \quad y' = Y(y), \quad z' = z$$

définissent un groupe infini dépendant de deux fonctions arbitraires X et Y ; il en est de même des formules

$$(II) \quad x' = X(x), \quad y' = Y(y), \quad z' = z - \log X' - \log Y'.$$

Les systèmes de formules ci-dessous définissent des groupes infinis dépendant d'une seule fonction arbitraire $Z(z)$ ou $X(x)$,

$$(III) \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = Z(z),$$

$$(IV) \quad x' = X(x), \quad y' = y, \quad z' = zX'(x),$$

$$(V) \quad x' = X(x), \quad y' = y, \quad z' = z - \log X'$$

$$(VI) \quad x' = X(x), \quad y' = y, \quad z' = \frac{z}{X'(x)} - \frac{X''(x)}{\{X'(x)\}^2}.$$

Quand on applique une transformation définie par les formules (62) à tous les points d'une surface (S) , le point correspondant décrit en général une surface (S') . Si on désigne par $p', q', r', s', t', \dots$, les dérivées successives de z' par rapport à x' et à y' , on tire des formules (62) des relations qui expriment $p', q', r', s', t', \dots$, au moyen de $x, y, z, p, q, r, s, t,$

$$(63) \quad \begin{cases} p' = f_1(x, y, z, p, q), \\ q' = f_2(x, y, z, p, q), \\ r' = \varphi_1(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ s' = \varphi_2(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ t' = \varphi_3(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ \dots \end{cases}$$

Lorsque les formules (62) définissent un groupe, les formules (62) et (63) définissent également un groupe, qui est dit le *groupe prolongé* du premier. Cela posé, on dit, pour abréger, qu'une équation du second ordre $F = 0$ admet le groupe de transformations ponctuelles (62), lorsque cette équation ne change pas par toutes les transformations définies par les formules (62) et (63).

Par exemple, le groupe prolongé du groupe (I) est donné par les formules

$$x' = X, y' = Y, z' = z, p' = \frac{p}{X'}, q' = \frac{q}{Y'}, r' = \frac{rX' - pX''}{X'^3}, s' = \frac{s}{X'Y'}, t' = \frac{tY' - qY''}{Y'^3},$$

on en déduit l'égalité $\frac{s'}{p'q'} = \frac{s}{pq}$, qui montre que toute équation de la forme

$$(64) \quad \frac{s}{pq} = \varphi(z)$$

admet le groupe (I) de transformations. Des formules (II) on tire de même, en posant $X = X(x)$, $Y = Y(y)$,

$$p' = \frac{p}{X'} - \frac{X''}{X'^3}, q' = \frac{q}{Y'} - \frac{Y''}{Y'^3},$$

$$r' = \frac{rX' - pX''}{X'^3} - \frac{X''X' - 2X'^2}{X'^4}, s' = \frac{s}{X'Y'}, t' = \frac{tY' - qY''}{Y'^3} - \frac{Y''Y' - 2Y'^2}{Y'^4};$$

on a $\frac{s'}{p'q'} = \frac{s}{pq}$ et, par suite, l'équation

$$(65) \quad s = \lambda s^2$$

admet le groupe (II) de transformations. Prenons encore le groupe (III); on a

$$p' = Z'p, q' = Z'q, r' = Z'r + Z'p^2, s' = Z's + Z'pq, t' = Z't + Z'q^2 \dots$$

l'élimination de Z' et Z'' nous donne

$$\frac{q'}{p'} = \frac{q}{p}, \quad \frac{q'r' - p's'}{q'^2} = \frac{qr - ps}{q^2}, \quad \frac{q's' - p't'}{q'^2} = \frac{qs - pt}{q^2},$$

ce qui montre que toute équation de la forme

$$(66) \quad F\left(x, y, \frac{p}{q}, \frac{qr - ps}{q^2}, \frac{qs - pt}{q^2}\right) = 0$$

admet le groupe (III) de transformations. On verra de même que les équations

$$(67) \quad F\left(y, \frac{q}{x}, \frac{t}{x}, \frac{zs - pq}{x}\right) = 0,$$

$$(68) \quad F\left(y, q, t, \frac{s}{q^2}\right) = 0,$$

$$(69) \quad F\left(y, \frac{t}{q}, \frac{s - qz}{q^2}\right) = 0,$$

admettent les groupes de transformations (IV), (V) et (VI) respectivement.

Lorsqu'une équation aux dérivées partielles admet un groupe de transformations, toute transformation de ce groupe, appliquée à une intégrale, la change évidemment en une nouvelle intégrale. En particulier, lorsqu'une équation du second ordre admet un groupe connu de transformations ponctuelles dépendant de deux fonctions arbitraires, on pourra déduire d'une intégrale particulière une intégrale dépendant de deux fonctions arbitraires, c'est-à-dire l'intégrale générale. Prenons, par exemple, l'équation (64), qui admet le groupe (I) de transformations ponctuelles; en cherchant une intégrale de cette équation qui soit de la forme $f(x + y)$, on trouve que la formule

$$\int e^{-\int \varphi(z) dz} dz = x + y$$

définit une intégrale de cette espèce; l'intégrale générale s'obtiendra en appliquant à celle-là toutes les transformations du groupe (I). Elle est, par conséquent, donnée par la formule

$$\int e^{-\int \varphi(z) dz} dz = X(x) + Y(y).$$

L'équation (65) admet de même l'intégrale particulière

$$e^z = \frac{2}{h(x + y)^2};$$

l'intégrale générale est, par suite,

$$e^z = \frac{2X'Y'}{h(X + Y)^2}.$$

Considérons maintenant une équation du second ordre admettant un

invariant des équations.

groupe infini de transformations dépendant d'une seule fonction arbitraire. Nous supposons que les formules (62) qui définissent ce groupe renferment explicitement une fonction arbitraire et ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé. D'après les théories générales de M. Sophus Lie, il existe pour ce groupe une infinité d'invariants différentiels, c'est-à-dire de fonctions $u(x, y, z, p, q, r, s, t, \dots)$ renfermant les dérivées de z jusqu'à un ordre aussi élevé qu'on le veut, qui se reproduisent par toutes les transformations du groupe prolongé. Soient u, v, w , trois invariants différentiels distincts, tels que l'équation proposée $F = 0$ ne puisse pas être mise sous la forme $\Phi(u, v, w) = 0$. Soit alors (S) une intégrale quelconque de $F = 0$; choisissons la fonction Φ de telle façon que cette intégrale vérifie aussi la relation $\Phi(u, v, w) = 0$. Les deux équations

$$F = 0, \quad \Phi(u, v, w) = 0,$$

admettant toutes les transformations du groupe considéré et ayant déjà une intégrale commune (S), ont une infinité d'intégrales communes dépendant d'une fonction arbitraire, celles que l'on déduit de (S) par toutes les transformations du groupe. Toute intégrale de l'équation du second ordre proposée appartient donc à une autre équation qui a une infinité d'intégrales communes avec $F = 0$, dépendant d'une fonction arbitraire, sans les admettre toutes. L'équation $F = 0$ est donc intégrable par la méthode de M. Darboux.

Prenons, par exemple, l'équation

$$F\left(x, y, \frac{p}{q}, \frac{qr - ps}{q^2}, \frac{qs - pt}{q^2}\right) = 0,$$

qui admet le groupe infini de transformations

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = Z(x);$$

x, y et $\frac{p}{q}$ sont trois invariants différentiels de ce groupe.

Toute intégrale de l'équation du second ordre vérifie donc une équation du premier ordre

$$\Phi\left(x, y, \frac{p}{q}\right) = 0$$

qui admet une infinité d'intégrales communes avec $F = 0$, dépendant d'une fonction arbitraire. Il faut pour cela que l'équation du premier

ordre soit une intégrale intermédiaire de l'équation du second ordre, et celle-ci doit admettre une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire. Il est facile de le vérifier, car, si on pose $u = \frac{p}{q}$, l'équation du second ordre peut s'écrire

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Considérons encore l'équation

$$F\left(y, \frac{q}{x}, \frac{t}{x}, \frac{xs - pq}{x}\right) = 0,$$

qui admet le groupe infini

$$x' = X(x), \quad y' = y, \quad s' = sX'(x);$$

$y, \frac{q}{x}, \frac{t}{x}$ sont trois invariants différentiels de ce groupe. Toute intégrale de l'équation du second ordre appartient donc à une équation de la forme

$$\Phi\left(y, \frac{q}{x}, \frac{t}{x}\right) = 0$$

formant avec la première un système en involution. Pour appliquer la méthode de M. Darboux, il faudra donc chercher une intégrale intermédiaire du second ordre.

Il en est de même de l'équation $F\left(y, q, t, \frac{s}{q^2}\right) = 0$, qui admet le groupe de transformations (V) avec les trois invariants différentiels y, q, t . Pour l'équation

$$F\left(y, \frac{t}{q}, \frac{s - q^2}{q^3}\right) = 0,$$

il suffira de pousser jusqu'aux dérivées du troisième ordre (n°172), car le groupe (VI) admet les invariants différentiels

$$y, \frac{t}{q}, \frac{p_{22}}{q}.$$

Tout ce que nous venons de dire s'applique aussi aux équations admettant un groupe infini de transformations de contact; mais il est essentiel de remarquer que la théorie des groupes ne donne pas toutes

les équations du second ordre intégrables par la méthode de M. Darboux. Ainsi l'équation $(x + y)^2 s^2 - 4pq = 0$ intégrée plus haut (n° 171) n'admet aucun groupe infini de transformations ⁽¹⁾.

(1) On peut déterminer comme il suit toutes les transformations de contact qui ne changent pas la forme de l'équation $(x + y)^2 s^2 = 4pq$. Soient

$$\begin{aligned} x &= X(x', y', z', p', q'), \\ y &= Y(x', y', z', p', q'), \\ z &= Z(x', y', z', p', q'), \\ p &= P(x', y', z', p', q'), \\ q &= Q(x', y', z', p', q'), \end{aligned}$$

les formules qui définissent une de ces transformations. Les deux familles de caractéristiques admettent respectivement une seule combinaison intégrable du premier ordre, $dx = 0$ et $dy = 0$. Les caractéristiques de l'équation transformée admettront donc les deux combinaisons intégrables du premier ordre $dX = 0$, $dY = 0$. Pour que l'équation transformée soit identique à la première, il faudra donc que l'on ait

$$\begin{aligned} x &= X(x'), & y &= Y(y'), \\ \text{ou} & & x &= Y(y'), & y &= X(x'); \end{aligned}$$

la seconde forme se déduisant de la première en échangeant x et y , nous pouvons nous borner à considérer le premier cas. Comme on doit avoir $[X, Z] = 0$, $[Y, Z] = 0$, il s'ensuit que Z ne doit pas contenir p' et q' , et la transformation est une transformation ponctuelle

$$x = X(x'), \quad y = Y(y'), \quad z = Z(x', y', z').$$

Les valeurs de p et de q sont données par les formules

$$p = \frac{\frac{\partial Z}{\partial x'} + \frac{\partial Z}{\partial z'} p'}{\frac{\partial X}{\partial x'}}, \quad q = \frac{\frac{\partial Z}{\partial y'} + \frac{\partial Z}{\partial z'} q'}{\frac{\partial Y}{\partial y'}}$$

et la nouvelle équation du second ordre est

$$\begin{aligned} \frac{(X + Y)^2}{X'Y'} \left\{ \frac{\partial Z}{\partial z'} s' + \frac{\partial^2 Z}{\partial y' \partial z'} p' + \frac{\partial^2 Z}{\partial x' \partial z'} q' + \frac{\partial^2 Z}{\partial z'^2} p'q' + \frac{\partial^2 Z}{\partial x' \partial y'} \right\} \\ = 4 \left(\frac{\partial Z}{\partial x'} + \frac{\partial Z}{\partial z'} p' \right) \left(\frac{\partial Z}{\partial y'} + q' \frac{\partial Z}{\partial z'} \right). \end{aligned}$$

Pour qu'elle soit identique à la première, il faut d'abord qu'elle ne renferme que les deux termes en s'^2 et en $p'q'$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y' \partial z'} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x' \partial z'} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z'^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x' \partial y'} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y'} = 0;$$

Z est donc de la forme $Z = \lambda z' + B$, A et B étant deux constantes arbitraires, et il reste à déterminer les deux fonctions $X(x')$ et $Y(y')$, de telle façon que l'on ait

$$(E) \quad \frac{X'Y'}{(X + Y)^2} = \frac{1}{(x' + y')^2}.$$

En intégrant par rapport à x' , on en conclut que l'on doit avoir

$$\frac{Y'}{X + Y} = \frac{1}{x' + y'} + F(y');$$

si on attribue à y' une valeur déterminée, on voit que X est une fonction de x' de la forme

$$X = \frac{ax' + b}{cx' + d}.$$

De même Y est une fonction de même forme de y' , et, en substituant dans l'équation (E), on trouve qu'il faut prendre

$$Y = -\frac{ay' - b}{cy' - d}.$$

174. Dans un Mémoire déjà cité ⁽¹⁾, M. Julius König, en se plaçant à un point de vue tout différent, a été conduit à une méthode d'intégration qui ne diffère pas essentiellement de la méthode de M. Darboux. L'idée qui sert de point de départ et qui s'était déjà offerte à plusieurs géomètres, consiste à étendre à une équation du second ordre la méthode d'intégration de Lagrange et Charpit pour une équation du premier ordre. Étant donnée une équation du premier ordre $F(x, y, z, p, q) = 0$, cette méthode consiste, comme on sait, à chercher une autre équation $u(x, y, z, p, q) = \alpha$, telle que les valeurs de p et de q tirées des deux relations $F = 0$, $u = \alpha$, vérifient la condition d'intégrabilité

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right).$$

De même, étant donnée une équation du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

il paraît naturel, pour intégrer cette équation, de chercher deux autres relations $F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, $F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, telles que les valeurs de r, s, t , déduites de ces trois équations rendent complètement intégrable le système d'équations aux différentielles totales

$$(70) \quad \begin{cases} dz = p dx + q dy, \\ dp = r dx + s dy, \\ dq = s dx + t dy. \end{cases}$$

Avant de développer les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions F_1 et F_2 , nous présenterons quelques remarques sur les systèmes de la forme précédente. Supposons qu'on ait trois équations du second ordre résolues par rapport à r, s, t ,

$$(71) \quad r = \varphi(x, y, z, p, q), \quad s = \psi(x, y, z, p, q), \quad t = \chi(x, y, z, p, q);$$

r, s, t étant supposées remplacées par les valeurs précédentes dans les équations (70), les conditions d'intégrabilité se réduisent à deux

$$(72) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \chi = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} p + \frac{\partial \psi}{\partial p} \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial q} \chi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q + \frac{\partial \psi}{\partial p} \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial q} \chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z} p + \frac{\partial \chi}{\partial p} \varphi + \frac{\partial \chi}{\partial q} \psi. \end{cases}$$

(1) *Mathematische Annalen*, t. XXIV.

Si ces conditions sont vérifiées identiquement, par tout élément du premier ordre $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, il passe une intégrale du système (71), pourvu que les fonctions φ, ψ, χ soient régulières dans le voisinage des valeurs $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$; x_0 et y_0 étant regardées comme des constantes numériques, l'intégrale générale de ce système dépend de trois constantes arbitraires z_0, p_0, q_0 . Il est évident qu'on ne peut pas se proposer de déterminer une intégrale passant par une courbe donnée, lorsque la courbe est quelconque; mais on peut signaler la propriété suivante, qui sera invoquée un peu plus loin. Imaginons que l'on ait une courbe (C) et une surface développable (D) passant par cette courbe, en d'autres termes que x, y, z, p, q , soient des fonctions d'un paramètre θ satisfaisant à l'équation

$$\frac{dz}{d\theta} = p \frac{dx}{d\theta} + q \frac{dy}{d\theta}.$$

Les deux conditions

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\theta} &= \varphi(x, y, z, p, q) \frac{dx}{d\theta} + \psi(x, y, z, p, q) \frac{dy}{d\theta}, \\ \frac{dq}{d\theta} &= \psi(x, y, z, p, q) \frac{dx}{d\theta} + \chi(x, y, z, p, q) \frac{dy}{d\theta}, \end{aligned}$$

ne seront pas en général vérifiées; mais, si elles sont satisfaites par ces cinq fonctions x, y, z, p, q , le système (71) admet une intégrale renfermant tous les éléments de la multiplicité M précédente, c'est-à-dire tangente à la développable (D) en tous les points de la courbe (C). Soit, en effet $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ un élément de M, tel que φ, χ, ψ soient des fonctions régulières dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 . Cet élément appartient à une intégrale (S) du système (71), et il suffit de montrer que (S) renferme tous les autres éléments de M. En effet, établissons entre x et y une relation de forme quelconque $y = \pi(x)$, telle que $y_0 = \pi(x_0)$; les équations (71) deviennent

$$\begin{aligned} y &= \pi(x), & dx &= \{ p + q\pi'(x) \} dx, \\ dp &= \{ \varphi + \psi\pi'(x) \} dx, & dq &= \{ \psi + \chi\pi'(x) \} dx, \end{aligned}$$

et elles déterminent une multiplicité simplement infinie d'éléments M_1 , issue de l'élément $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$.

L'intégrale (S) est le lieu de ces multiplicités M_1 , quand on fait varier la fonction $\pi(x)$ de toutes les manières possibles. Si l'on choisit la fonction $\pi(x)$ de telle façon que la relation $y = \pi(x)$ soit identique à

celle qui existe entre x et y le long de la courbe donnée (C) les équations différentielles de la multiplicité M_1 deviennent identiques à celles de M et, comme ces deux multiplicités ont un élément commun, il s'ensuit qu'elles sont identiques.

Prenons maintenant trois équations du second ordre de forme quelconque

$$(73) \quad \begin{cases} F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \\ F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \\ F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \end{cases}$$

telles que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(F, F_1, F_2)}{D(r, s, t)}$$

ne soit pas nul identiquement, ni en tenant compte des équations elles-mêmes. On peut alors en déduire les valeurs de

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial s}{\partial y}, \quad \frac{\partial t}{\partial y},$$

par un calcul régulier, et, en égalant les valeurs de $\frac{\partial r}{\partial y}$ et de $\frac{\partial s}{\partial x}$, et celles de $\frac{\partial s}{\partial y}$ et de $\frac{\partial t}{\partial x}$, on obtient les deux conditions pour que le système (73) soit complètement intégrable sous la forme suivante

$$(74) \quad \begin{vmatrix} \left(\frac{dF}{dy}\right) & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \left(\frac{dF_1}{dy}\right) & \frac{\partial F_1}{\partial s} & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \left(\frac{dF_2}{dy}\right) & \frac{\partial F_2}{\partial s} & \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \left(\frac{dF}{dx}\right) & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial F_1}{\partial r} & \left(\frac{dF_1}{dx}\right) & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \left(\frac{dF_2}{dx}\right) & \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$(75) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \left(\frac{dF}{dy}\right) & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial F_1}{\partial r} & \left(\frac{dF_1}{dy}\right) & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \left(\frac{dF_2}{dy}\right) & \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} & \left(\frac{dF}{dx}\right) \\ \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial s} & \left(\frac{dF_1}{dx}\right) \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial s} & \left(\frac{dF_2}{dx}\right) \end{vmatrix}.$$

Il suffira que les relations (74) et (75) soient des conséquences des équations (73) pour que le système proposé soit complètement intégrable;

si elles sont vérifiées identiquement, le système $F = C$, $F = C_1$, $F = C_2$ sera lui-même complètement intégrable, pour toutes les valeurs possibles des constantes C , C_1 , C_2 .

175. Cela posé, supposons qu'il s'agisse d'intégrer une équation du second ordre de la forme

$$(76) \quad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

et qu'on cherche pour cela à lui adjoindre deux autres équations

$$(77) \quad \begin{cases} u(x, y, z, p, q, s, t) = a_1, \\ v(x, y, z, p, q, s, t) = a_2, \end{cases}$$

avec deux constantes arbitraires a_1 et a_2 , telles que le système formé par les équations (76) et (77) soit complètement intégrable pour toutes les valeurs des constantes a_1 et a_2 . Les conditions d'intégrabilité deviennent ici, en développant les déterminants (74) et (75) et remplaçant F , F_1 , F_2 par $r + f$, u , v respectivement,

$$(78) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{dv}{dx} \right) - \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{du}{dx} \right) + \frac{\partial f}{\partial s} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{dv}{dy} \right) - \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{du}{dy} \right) \right\} \\ + \frac{\partial f}{\partial t} \left\{ \frac{\partial v}{\partial s} \left(\frac{du}{dy} \right) - \frac{\partial u}{\partial s} \left(\frac{dv}{dy} \right) \right\} + \left(\frac{df}{dy} \right) \left\{ \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} \right\} = 0, \end{cases}$$

$$(79) \quad \frac{\partial u}{\partial s} \left(\frac{dv}{dx} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{dv}{dy} \right) - \left(\frac{du}{dx} \right) \frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{du}{dy} \right) \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Ces deux équations doivent être vérifiées identiquement, quand on remplace r par $-f(x, y, z, p, q, s, t)$, puisqu'elles ne contiennent pas les constantes a_1 et a_2 . Inversement, tout système d'intégrales (u, v) des équations (78) et (79), pour lesquelles le déterminant $\frac{D(u, v)}{D(s, t)}$ ne sera pas nul identiquement, permettra de déterminer une intégrale complète de l'équation proposée; car, si on tire s et t des deux relations $u = a_1$, $v = a_2$,

$$s = \varphi(x, y, z, p, q, a_1, a_2), \quad t = \psi(x, y, z, p, q, a_1, a_2),$$

le système

$$\begin{aligned} dz &= p dx + q dy, \\ dp &= -f dx + \varphi dy, \\ dq &= \varphi dx + \psi dy, \end{aligned}$$

est complètement intégrable, et l'intégration introduira trois nouvelles constantes arbitraires a_2, a_1, a_3 .

M. König discute en détail, dans son Mémoire, le système d'équations simultanées (78) et (79); si l'on élimine l'une des inconnues, v par exemple, on est conduit à une seule équation de condition pour u . Il est aisé de s'en rendre compte *a priori*. En effet, si la fonction u est telle que les équations (78) et (79) admettent une intégrale commune v pour laquelle le déterminant $\frac{D(u, v)}{D(s, t)}$ n'est pas nul identiquement, les trois équations

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2$$

admettent une intégrale commune

$$s = F(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5),$$

et on peut choisir a_2, a_3, a_4, a_5 , de telle façon que, pour $x = x_0, y = y_0$, s, p, q et une des dérivées s ou t prennent des valeurs données à l'avance. Les deux équations

$$r + f = 0, \quad u = a_1,$$

forment donc aussi un système complètement intégrable, ce qui exige (n° 149) que u vérifie une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(80) \quad R = 0,$$

linéaire par rapport aux dérivées du second ordre de u . Réciproquement, si u satisfait à la condition $R = 0$, les deux équations $r + f = 0$, $u = a_1$, admettent une intégrale commune dépendant de quatre constantes arbitraires

$$s = \Phi(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5),$$

et les relations

$$s = \Phi, \quad p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

peuvent être résolues par rapport à a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et r , ce qui donne

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2, \quad v_1 = a_3, \quad v_2 = a_4, \quad v_3 = a_5,$$

v, v_1, v_2, v_3 étant des fonctions de x, y, s, p, q, s, t ; en particulier, les

trois équations

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2,$$

forment un système complètement intégrable, puisqu'elles admettent une intégrale commune dépendant des trois constantes a_1, a_2, a_3 . L'équation $R = 0$ est donc la résultante des équations (78) et (79), lorsqu'on élimine v (1).

L'intégration de l'équation $r + f = 0$ est donc ramenée en définitive

(1) On peut obtenir cette résultante comme il suit. Si u ne vérifie pas la relation

$$(a) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 = 0,$$

on peut résoudre les deux équations (78) et (79) par rapport à $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dv}{dy}\right)$, ce qui donne le système d'équations

$$(b) \quad \begin{cases} X(v) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p - \frac{\partial v}{\partial p} f + \frac{\partial v}{\partial q} s + A \frac{\partial v}{\partial s} + B \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ Y(v) = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q + \frac{\partial v}{\partial p} s + \frac{\partial v}{\partial q} t + B \frac{\partial v}{\partial s} + C \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

A, B, C étant des fonctions de x, y, z, p, q, s, t , et des dérivées partielles du premier ordre de u , qui satisfont à la condition

$$A + \left(\frac{df}{dy}\right) + B \frac{\partial f}{\partial s} + C \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

La combinaison $X[Y(v)] - Y[X(v)] = 0$ se réduit donc à une équation de la forme

$$H \frac{\partial v}{\partial s} + K \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

H et K renfermant les dérivées du premier et du second ordre de u et étant linéaires par rapport aux dérivées du second ordre. Comme les équations (78) et (79) et, par suite, les équations (b) admettent l'intégrale $v = u$, il s'ensuit que l'on doit avoir aussi

$$H \frac{\partial u}{\partial s} + K \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Pour que le déterminant $\frac{D(u, v)}{D(s, t)}$ ne soit pas nul, il faut donc que l'on ait $H = 0$,

$K = 0$; ces deux équations admettent un facteur commun qui, égalé à zéro, donne la condition cherchée $R = 0$. On voit de plus que, si u satisfait à cette relation, les équations (78) et (79) forment un système complet, quand on y considère v comme la fonction inconnue.

Lorsque u vérifie l'équation (a), un raisonnement analogue au précédent montre que l'on doit avoir aussi

$$\left(\frac{du}{dx}\right) \frac{\partial u}{\partial s} + \left(\frac{du}{dy}\right) \left\{ \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial t} \right\} - \left(\frac{df}{dy}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 = 0$$

pour que les équations (78) et (79) admettent une intégrale commune v telle que $\frac{D(u, v)}{D(s, t)}$ ne soit pas nul identiquement. C'est le cas qui va être discuté dans le texte.

à celle de l'équation $R = 0$. Il ne semble pas qu'il y ait là un progrès réel, puisque la nouvelle équation est, en général, tout aussi difficile à intégrer que la première. Mais l'étude d'un cas singulier a conduit M. König à une nouvelle méthode d'intégration, identique en réalité à celle de M. Darboux.

Les deux équations (78) et (79), considérées comme déterminant v , sont en général distinctes. Pour que ces deux équations se réduisent à une seule, il faut et il suffit que la fonction u vérifie les relations suivantes

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\left(\frac{df}{dy}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dx}\right)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right) \frac{\partial u}{\partial s} + \left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}$$

Soient m_1, m_2 , les deux racines de l'équation caractéristique

$$m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial x} = 0;$$

on voit d'abord que l'on doit avoir

$$\frac{\partial u}{\partial x} - m_1 \frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x} - m_2 \frac{\partial u}{\partial s} = 0.$$

Prenons, par exemple, la première hypothèse; les deux dernières conditions précédentes se réduisent alors à une seule

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{du}{dy}\right) - \frac{\partial u}{\partial s} \left(\frac{df}{dy}\right) = 0.$$

On voit donc que la fonction u doit satisfaire à l'un des deux systèmes d'équations

$$(81) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - m_1 \frac{\partial u}{\partial s} = 0, \\ \left(\frac{du}{dx}\right) + m_2 \left(\frac{du}{dy}\right) - \frac{\partial u}{\partial s} \left(\frac{df}{dy}\right) = 0, \end{cases}$$

$$(82) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - m_2 \frac{\partial u}{\partial s} = 0, \\ \left(\frac{du}{dx}\right) + m_1 \left(\frac{du}{dy}\right) - \frac{\partial u}{\partial s} \left(\frac{df}{dy}\right) = 0. \end{cases}$$

Ce sont précisément les conditions pour que les deux équations

$r + f = 0$, $u = a_1$, forment un système en involution (n° 134). Ce résultat s'explique tout naturellement, si l'on remarque que les relations (78) et (79) expriment que les 6 équations obtenues en différentiant $r + f = 0$, $u = a_1$, $v = a_2$ par rapport à x et par rapport à y se réduisent à quatre. Or, les quatre premières de ces relations se réduisent à trois lorsque $r + f = 0$, $u = a_1$, forment un système en involution ; il suffira donc d'une nouvelle condition pour que ces six relations se réduisent à quatre.

Lorsque l'un des systèmes (81) ou (82) admet deux intégrales distinctes, M. König démontre comme il suit que l'on peut obtenir l'intégrale générale de l'équation $r + f = 0$. Considérons d'abord une intégrale u , du système (81) par exemple, et proposons-nous de trouver une intégrale de $r + f = 0$ se réduisant pour $x = x_0$ à une fonction donnée de y , $\zeta(y)$, tandis que p se réduit à une autre fonction $\pi(y)$, les deux fonctions ζ et π vérifiant la relation

$$u(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi') = a_1.$$

Soit

$$v_0(y, \zeta, \pi, \zeta', \pi') = 0$$

une autre relation à laquelle satisfont les fonctions ζ et π , telle que $\frac{D(u, v_0)}{D(\pi', \zeta')}$ ne soit pas nul. On peut trouver une intégrale $v(x, y, z, p, q, r, s, t)$ de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial s} \left(\frac{dv}{dx} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{dv}{dy} \right) - \left(\frac{du}{dx} \right) \frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{du}{dy} \right) \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

se réduisant, pour $x = x_0$, à $v_0(y, \zeta, \pi, \zeta', \pi')$, pourvu que x_0 n'ait pas été pris d'une façon particulière, et les trois équations

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = 0,$$

dont les deux dernières peuvent être résolues par rapport à s et t , forment un système complètement intégrable. D'après la remarque faite plus haut (n° 174), l'intégrale de ce système qui passe par l'élément

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0 = \zeta(y_0), \quad p_0 = \pi(y_0), \quad q_0 = \zeta'(y_0)$$

se réduit, pour $x = x_0$, à $\zeta(y)$, tandis que sa dérivée première p se réduit à $\pi(y)$.

Lorsque le système (81) admet deux intégrales distinctes u_1 et u_2 , on peut déterminer une fonction $\varphi(u_1, u_2)$, telle que l'on ait identiquement $\varphi(u_1, u_2) = 0$, quand on remplace x par x_0 , et x, p, q, s, t par $\zeta(y), \pi(y), \zeta'(y), \pi'(y), \zeta''(y)$ respectivement, et l'application de la méthode précédente permettra d'obtenir une intégrale de $r + f = 0$ se réduisant à $\zeta(y)$ pour $x = x_0$, tandis que p se réduit à $\pi(y)$, quelles que soient les fonctions ζ et π . Il serait facile d'obtenir de la même façon la solution du problème de Cauchy sous sa forme générale.

176. Il semble que la méthode de M. König exige plus d'intégrations que celle qui a été développée plus haut; mais, en tenant compte des résultats déjà obtenus, il est possible de la simplifier. Rappelons d'abord qu'étant donnée une équation du premier ordre $f(x, y, z, p, q) = 0$, l'intégration de cette équation est ramenée à celle de l'équation linéaire $[f, \varphi] = 0$, φ étant regardée comme une fonction inconnue de x, y, z, p, q , si l'on emploie la méthode de Cauchy. Lorsqu'on emploie la méthode de Lagrange, il suffit d'obtenir une intégrale de $[f, \varphi] = 0$, telle que $\frac{D(f, \varphi)}{D(p, q)}$ ne soit pas nul; tirant ensuite p et q des deux équations $f = 0$, $\varphi = a_1$, on a une équation complètement intégrable $dz = p dx + q dy$, dont l'intégration donnera une intégrale complète et, par suite, les caractéristiques de l'équation proposée. Ces deux méthodes se retrouvent dans l'intégration d'un système en involution

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0, \quad u(x, y, z, p, q, s, t) = C,$$

ou dans la détermination des caractéristiques de ce système, ce qui est le point essentiel. La méthode développée précédemment (n° 136), et qui est l'analogue de celle de Cauchy pour une équation du premier ordre, ramène le problème à l'intégration du système d'équations différentielles

$$dy = m_1 dx, \quad dz = p dx + q dy, \quad dp = -f dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{ds}{dx} = 0, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{dt}{dy} = 0, \quad \text{où} \quad m_1 = \frac{\frac{\partial u}{\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial t}},$$

ou, ce qui revient au même, à l'intégration de l'équation linéaire et du premier ordre

$$(83) \quad \frac{\partial u}{\partial s} \left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right) \frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{du}{dy}\right) \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

v étant une fonction inconnue de x, y, z, p, q, s, t .

Des idées de M. König on peut déduire une autre méthode, qui est analogue à celle de Lagrange pour les équations du premier ordre. En effet, pour que les équations

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2$$

forment un système complètement intégrable, il suffit, d'après le précédent paragraphe, que v satisfasse à une seule relation, qui est précisément l'équation (83). Si donc on a obtenu une intégrale particulière de cette équation, telle que $\frac{D(u, v)}{D(s, t)}$ ne soit pas identiquement nul, en tirant r, s, t des formules $r + f = 0, u = a_1, v = a_2$, on pourra former un système complètement intégrable

$$dz = p dx + q dy, \quad dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy,$$

dont l'intégration introduira trois nouvelles constantes arbitraires a_3, a_4, a_5 , et on obtiendra ainsi une intégrale complète

$$z = \Phi(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5),$$

du système en involution proposé, d'où on pourra déduire les caractéristiques par des différentiations et des éliminations.

Lorsque l'un des systèmes (81) et (82) admet deux intégrales distinctes, la solution du problème de Cauchy se ramenant à la détermination des caractéristiques d'un système en involution, on pourra employer l'une ou l'autre des méthodes précédentes. Remarquons que, quelle que soit la méthode choisie, il faut toujours commencer par obtenir une intégrale, autre que u , de l'équation (83) ou de l'équation qui joue le même rôle.

177. M. König a généralisé sa méthode en adjoignant à une équation du second ordre une ou deux équations d'ordre quelconque. Nous nous bornerons à quelques courtes indications. On démontre d'abord que, pour que les trois équations

$$(84) \quad \begin{cases} r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0, \\ u(x, y, z, p, q, s, t, \dots, p_{1, n-1}, p_{nn}) = a_1, \\ v(x, y, z, \dots, p_{1, n-1}, p_{nn}) = a_2, \end{cases}$$

où ne figurent que les dérivées $p_{1, n-1}$ et p_{nn} , forment un système complètement intégrable, il faut et il suffit que u et v vérifient les

équations simultanées

$$(85) \left\{ \frac{\partial u}{\partial p_m} \left(\frac{dv}{dx} \right) - \frac{\partial v}{\partial p_m} \left(\frac{du}{dx} \right) + \frac{\partial f}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u}{\partial p_m} \left(\frac{dv}{dy} \right) - \frac{\partial v}{\partial p_m} \left(\frac{du}{dy} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial x} \left\{ \frac{\partial v}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{du}{dy} \right) - \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{dv}{dy} \right) \right\} + \left(\frac{d^n - 1}{dy^{n-1}} \right) \frac{D(u, v)}{D(p_{1,n-1}, p_m)} \right\} = 0,$$

$$(86) \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{dv}{dx} \right) + \frac{\partial u}{\partial p_{a,n}} \left(\frac{dv}{dy} \right) - \frac{\partial v}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{du}{dx} \right) - \frac{\partial v}{\partial p_m} \left(\frac{du}{dy} \right) = 0,$$

avec la condition accessoire que $\frac{D(u, v)}{D(p_{1,n-1}, p_m)}$ ne soit pas nul identiquement. L'élimination de v entre les deux relations (83) et (86) conduit encore à une seule équation de condition qui est du second ordre en u et qui exprime que le système des deux équations $r + f = 0$, $u = a$, est complètement intégrable (n° 149).

Pour que les deux relations (83) et (86), où on regarde v comme inconnue, se réduisent à une seule, il faut et il suffit que u vérifie un des deux systèmes d'équations

$$(87) \frac{\partial u}{\partial p_{a,n}} - m_1 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \left(\frac{du}{dx} \right) + m_2 \left(\frac{du}{dy} \right) - \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^n - 1}{dy^{n-1}} \right) = 0,$$

$$(88) \frac{\partial u}{\partial p_{a,n}} - m_2 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} = 0, \left(\frac{du}{dx} \right) + m_1 \left(\frac{du}{dy} \right) - \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^n - 1}{dy^{n-1}} \right) = 0,$$

c'est-à-dire que le système $r + f = 0$, $u = C$ soit en involution. M. König en déduit, comme plus haut, que l'on peut intégrer l'équation $r + f = 0$, toutes les fois que l'un de ces systèmes admet deux intégrales distinctes.

De ces recherches de M. König on déduit encore un nouveau procédé pour intégrer le système en involution

$$r + f = 0, \quad u = C,$$

quel que soit l'ordre des dérivées qui figurent dans u . Les équations (83) et (86) se réduisant alors à une seule, soit v une intégrale de l'équation (86), telle que $\frac{D(u, v)}{D(p_{1,n-1}, p_m)}$ ne soit pas identiquement nul. Les trois relations

$$r + f = 0, \quad u = C, \quad v = a_1,$$

et celles qu'on déduit de la première par des différentiations succes-

sives permettent d'exprimer toutes les dérivées partielles de x jusqu'à l'ordre n , au moyen de

$$x, y, z, p_{1,1}, \dots, p_{1,n-1}, p_{2,1}, p_{2,2}, \dots, p_{2,n-1}$$

et on peut former un système complètement intégrable où les inconnues sont $x, p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{1,n-1}, p_{2,1}, p_{2,2}, \dots, p_{2,n-1}$. L'intégration de ce système introduit $2n - 1$ constantes nouvelles $a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$, et on obtient ainsi une intégrale complète

$$x = F(x, y, C, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1})$$

du système en involution proposé. Les caractéristiques s'en déduiront comme on l'a expliqué au chapitre précédent (n° 140) ⁽¹⁾.

(1) Parmi les travaux dont les résultats n'ont pu trouver place dans l'exposition précédente, je dois citer une note de G. Minardi : « Conseguenze a cui conduce il metodo di Charpit e Lagrange applicato alle equazioni differenziali parziali di 2° ordine » (*Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti* t. IX, p. 94-102; 1856), qui, vu la date de sa publication, offre un certain intérêt historique. En dépit de son titre, cette note paraît bien plutôt un essai d'extension de la méthode de Cauchy. Après avoir établi exactement les équations différentielles des caractéristiques du second ordre, l'auteur recherche comment on doit associer ces caractéristiques pour obtenir une intégrale et fait l'application à plusieurs exemples.

CHAPITRE VII

LES ÉQUATIONS DE LA PREMIÈRE CLASSE

Définition de l'intégrale générale, d'après Ampère. — Examen de cette définition. — Équations de la première classe. — Proposition de M. Darboux. — Énoncés de différents problèmes auxquels conduit la méthode de M. Darboux. — Recherches de M. Moutard. — Théorème de M. Maurice Lévy.

178. Au début de son grand mémoire : *Considérations générales sur les intégrales des équations aux différentielles partielles* ⁽¹⁾, Ampère adopte la définition suivante de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles d'ordre quelconque : *Pour qu'une intégrale soit générale, il faut qu'il n'en résulte, entre les variables que l'on considère et leurs dérivées à l'infini, que les relations exprimées par l'équation donnée et par les équations qu'on en déduit en la différentiant.* Il est relativement facile de voir que la condition énoncée par Ampère est nécessaire pour qu'une intégrale soit générale, au sens que nous avons adopté antérieurement (I, n° 18), mais il faut un examen plus approfondi pour reconnaître si cette condition est suffisante. Afin de fixer les idées, nous nous bornerons à une équation du second ordre :

$$(1) \quad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0;$$

et, pour plus de précision encore, nous ne considérerons que les intégrales qui sont holomorphes dans le voisinage d'un point (x_0, y_0) , et qui sont telles que la fonction f soit elle-même holomorphe pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$, $s = s_0$, $t = t_0$, en désignant par x_0 , p_0 , q_0 , s_0 , t_0 les valeurs que prennent x , p , q , s , t , respectivement pour $x = x_0$, $y = y_0$. En d'autres termes, les intégrales ont un élément du

(1) *Journal de l'École polytechnique*, 17^e cahier.
INTÉGRATION DES ÉQUATIONS.

second ordre appartenant à un certain domaine, à l'intérieur duquel la fonction $f(x, y, z, p, q, s, t)$ est régulière.

Si l'on différentie l'équation (1) un nombre quelconque de fois par rapport à x et à y , on obtient deux équations contenant les dérivées du troisième ordre, trois équations contenant les dérivées du quatrième ordre, ... et, en général, $(n - 1)$ équations renfermant les dérivées d'ordre n ; ces relations permettent d'exprimer toutes les dérivées partielles de la fonction inconnue z au moyen de x, y, z , et des dérivées $p_{1,k-1}, p_{2,k}$, l'indice k variant de 1 à $+\infty$. Mais de l'équation (1) on ne peut déduire aucune relation ne renfermant que les dérivées partielles $p_{1,k-1}$ et $p_{2,k}$. La condition d'Ampère est donc équivalente à celle-ci : *pour qu'une intégrale de l'équation (1) soit générale, il faut que, de la définition de cette intégrale, on ne puisse déduire aucune relation d'ÉGALITÉ entre les variables $(x, y, z, p_{1,0}, p_{1,1}, \dots, p_{1,k-1}; p_{2,1}, \dots, p_{2,k})$, aussi grand que soit le nombre entier k . Il est bien entendu qu'il s'agit de relations ne renfermant aucune des quantités arbitraires qui figurent dans l'intégrale considérée. Réciproquement, toute intégrale de l'équation (1), qui satisfait à la condition précédente, est générale au sens d'Ampère.*

Rappelons maintenant qu'une intégrale, holomorphe dans le domaine du point (x_0, y_0) , est générale, au sens que nous avons adopté, si on peut disposer des arbitraires qu'elle contient, de façon que, pour $x = x_0$, elle se réduise à une fonction donnée $\varphi(y)$, tandis que $\frac{\partial z}{\partial x}$ se réduit, pour la même valeur de x , à une autre fonction donnée $\psi(y)$, les deux fonctions arbitraires $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ étant seulement assujetties à être holomorphes dans le domaine du point $y = y_0$. Cela revient à dire que l'on peut choisir arbitrairement, pour $x = x_0, y = y_0$, les valeurs initiales de z et de toutes les dérivées partielles $(p_{1,k-1})_0, (p_{2,k})_0$, ces valeurs étant assujetties à la seule condition de rendre convergentes les deux séries :

$$(2) \quad \sum \frac{(p_{2,k})_0}{k!} (y - y_0)^k, \quad \sum \frac{(p_{1,k-1})_0}{(k-1)!} (y - y_0)^{k-1},$$

pour des valeurs de $y - y_0$ dont le module ne dépasse pas une certaine limite. Nous dirons, pour abréger, qu'une intégrale est générale au sens de Cauchy, si elle satisfait à la condition précédente, le point (x_0, y_0) étant absolument quelconque ou pouvant varier arbitrairement à l'intérieur d'un domaine limité. Il est clair, d'après cela, que toute intégrale, qui est générale au sens de Cauchy, est nécessairement générale au sens d'Ampère, car la condition de rendre convergentes les séries (2) ne

peut entraîner aucune relation d'égalité entre un nombre quelconque des coefficients $(p_{1,k-1})_0$, et $(p_{0,k})_0$, aussi grand que l'on suppose l'ordre des dérivées qui figureraient dans cette relation.

Mais la réciproque est loin d'être évidente. On peut concevoir, en effet, l'existence d'intégrales de l'équation (1) contenant assez d'arbitraires pour qu'il n'existe, entre x , y , z , et les dérivées $p_{1,k-1}$ et $p_{0,k}$, aucune relation d'égalité indépendante de ces arbitraires, sans que, pour cela, les dérivées $p_{1,k-1}$ et $p_{0,k}$ puissent prendre tous les systèmes de valeurs rendant convergentes les séries (2) pour des valeurs données de x_0 et de y_0 . C'est ce qui arriverait, par exemple, si quelques-unes de ces dérivées étaient assujetties à rester comprises entre certaines limites, ou à ne prendre que des valeurs d'une forme déterminée. Il pourrait se faire aussi que, quoiqu'il n'existe aucune relation de la forme

$$F(x, p_0, \dots, p_{1,k-1}, p_{0,1}, \dots, p_{0,k}) = 0,$$

quand les variables x et y sont quelconques, il se présente cependant de telles relations quand on attribue aux variables x et y des valeurs particulières. De telles intégrales, s'il en existe, sont générales au sens d'Ampère, sans être générales au sens de Cauchy.

De même, étant donnée une équation de la forme

$$(3) \quad s + f(x, y, z, p, q) = 0,$$

une intégrale est générale au sens d'Ampère, si, de la définition de cette intégrale, il ne résulte aucune relation d'égalité entre les variables $(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}; \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n})$, aussi grand que soit n . Une intégrale est générale au sens de Cauchy, si on peut disposer des arbitraires qu'elle contient, de façon que, pour $x = x_0$, elle se réduise à une fonction donnée de y , et, pour $y = y_0$, à une autre fonction donnée de x , sous certaines conditions de continuité.

Quelques exemples montreront mieux que toutes les considérations générales qu'une intégrale peut être générale au sens d'Ampère, sans être générale au sens de Cauchy.

EXEMPLE I. — Prenons l'équation élémentaire $s = 0$; toutes les équations qui en résultent par la différentiation sont de la forme

$$\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n; \dots$$

Soit $G(x)$ une de ces fonctions analytiques, auxquelles a conduit

l'étude des équations différentielles linéaires, et dont le module reste toujours plus petit que l'unité, quelle que soit la valeur attribuée à la variable x . Les formules :

$$(4) \quad x = \varphi(\alpha), \quad y = \psi(\beta), \quad z = G(\alpha) + G(\beta),$$

où $\varphi(\alpha)$ est une fonction arbitraire de α , $\psi(\beta)$ une fonction arbitraire de β , représentent une intégrale de l'équation $s = 0$, qui est générale au sens d'Ampère. On déduit en effet des formules (4) les valeurs suivantes des dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{G'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{G'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \right)}{\varphi'(\alpha)}, \dots;$$

d'une manière générale $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ s'exprime au moyen de $\varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha), \dots, \varphi^{(n)}(\alpha)$, et de fonctions connues de α , et $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ s'exprime au moyen de $\psi'(\beta), \psi''(\beta), \dots, \psi^{(n)}(\beta)$, et de fonctions connues de β . Les fonctions φ et ψ étant arbitraires, il ne peut évidemment exister aucune relation d'égalité entre x, y, z et les dérivées précédentes ; ce qui suffit pour prouver que l'intégrale est générale au sens d'Ampère. D'ailleurs, il est clair que cette intégrale ne peut être l'intégrale générale au sens habituel, dans un domaine aussi restreint qu'on le voudra, puisque le module de z est toujours inférieur à 2.

Exemple II. — L'équation linéaire

$$(5) \quad z - qy = 0$$

a un invariant nul, et l'intégrale générale est représentée par la formule

$$(6) \quad z = X + \int_0^y Y e^{xy} dy,$$

X étant une fonction arbitraire de x , et Y une fonction arbitraire de y . La suite de Laplace relative à l'équation (5) est terminée, d'une part, à l'équation elle-même, mais elle est illimitée dans l'autre sens, comme on s'en assure en calculant les invariants successifs. Il résulte des propositions établies précédemment (n° 169) que toute équation aux dérivées partielles formant avec l'équation (5) un système en involution est néces-

sairement de la forme

$$(7) \quad F\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0.$$

Cela posé, considérons l'intégrale

$$(8) \quad z = \int_0^y Y e^{xy} dy,$$

qui se réduit à zéro pour $y = 0$, et à une fonction arbitraire de y , $\int_0^y Y dy$,

pour $x = 0$. Cette intégrale satisfait à la condition d'Ampère; en effet, si elle vérifiait une équation, qui ne serait pas une conséquence de l'équation (3), cette équation, formant avec la proposée un système en involution, serait de la forme (7), et, en attribuant à la variable x une valeur déterminée, on aurait une équation différentielle à laquelle devrait satisfaire la fonction arbitraire Y .

Plus généralement, soit

$$(9) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

une équation du second ordre, telle qu'il n'existe aucune équation aux dérivées partielles formant avec elle un système en involution. Toute intégrale de l'équation (9), dépendant d'une fonction arbitraire ou d'une infinité de constantes arbitraires, satisfait à la condition d'Ampère; car, si elle vérifiait une équation aux dérivées partielles $\Phi = 0$, autre que celles qu'on peut déduire de $F = 0$ par des différentiations, l'équation $\Phi = 0$ aurait en commun avec la proposée une intégrale commune dépendant d'une infinité de constantes arbitraires, sans les admettre toutes. Il existerait donc une équation formant avec $F = 0$ un système en involution, contrairement à l'hypothèse. Par exemple, si la suite de Laplace relative à l'équation linéaire :

$$(10) \quad z + ap + bq + cz = 0$$

est illimitée dans les deux sens, il n'existe, nous l'avons vu, aucune équation formant avec l'équation (10) un système en involution (n° 169). Toute intégrale de l'équation (10), dépendant d'une fonction arbitraire, satisfait donc à la condition d'Ampère. On obtient de telles intégrales si l'on a obtenu, par un procédé quelconque, une intégrale de l'équation (10) dépendant d'un paramètre arbitraire $\phi(x, y, z)$, en multipliant

par une fonction arbitraire $f(\alpha)$ et en intégrant le produit $f(\alpha) \phi(x, y, \alpha)$ entre des limites déterminées :

$$z = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(x, y, \alpha) f(\alpha) d\alpha;$$

or cette intégrale, si la fonction ϕ ne satisfait pas à des conditions particulières, n'est pas nécessairement l'intégrale générale au sens de Cauchy ⁽¹⁾.

Les exemples précédents montrent bien qu'il est nécessaire, pour donner une base solide à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre, d'adopter la définition de l'intégrale générale que M. Darboux a déduite des travaux de Cauchy et que nous avons prise pour point de départ ⁽²⁾.

179. Le *critérium* énoncé par Ampère pour qu'une intégrale soit générale étant une condition nécessaire, les conclusions qu'il en a déduites sont à l'abri de toute objection. Ainsi, pour qu'une intégrale soit générale, il faut qu'elle renferme des arbitraires dont le nombre croît à l'infini par des différentiations.

En effet, si les formules qui donnent x, y, z , et les dérivées successives de z ne contenaient jamais qu'un nombre fini K d'arbitraires, quel que soit l'ordre n des dérivées considérées, à partir d'une valeur de n assez grande, on aurait

$$2 + \frac{(n+2)(n+1)}{2} - K > \frac{n(n-1)}{2},$$

et l'élimination des K arbitraires conduirait certainement à plus de $\frac{n(n-1)}{2}$

relations distinctes entre x, y, z , et les dérivées de z jusqu'à l'ordre n . Une au moins de ces relations ne serait pas une conséquence de l'équation $F = 0$ proposée et de celles qu'on en déduit en la différentiant ; car on n'obtient ainsi que $\frac{n(n-1)}{2}$, relations distinctes ne renfermant aucune dérivée d'ordre supérieur à n .

⁽¹⁾ On pourra consulter sur ce sujet un article de M. Delassus : *Quelques remarques sur les intégrales partielles* (Bulletin des Sciences mathématiques, t. XIX, p. 31-36).

⁽²⁾ On doit remarquer que, dans le passage cité plus haut, Ampère dit simplement *il faut*, mais qu'il n'ajoute pas *il suffit*. Il semble résulter cependant de la suite de son mémoire qu'il considère la condition énoncée comme suffisante pour la généralité d'une intégrale.

Il faut donc, pour qu'une intégrale ne renfermant qu'un nombre fini d'arbitraires soit générale, qu'en calculant les dérivées successives de la fonction z représentée par cette intégrale, à partir d'un certain moment, il s'introduise de nouvelles arbitraires. Le même raisonnement prouve que, si, en passant des dérivées d'ordre p aux dérivées d'ordre $p+1$, il ne s'introduit qu'une nouvelle arbitraire, l'intégrale considérée ne peut être générale. Supposons, pour fixer les idées, que les dérivées du premier et du second ordre soient homogènes à l'intégrale, mais qu'à partir du troisième ordre il s'introduise une nouvelle arbitraire à chaque différentiation, l'intégrale considérée, que l'on suppose renfermer k arbitraires, satisfera alors à

$$4 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - n - K,$$

relations distinctes au moins, renfermant les dérivées d'ordre n . Or, si on prend n assez grand, on aura encore

$$4 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - n - K > \frac{n(n-1)}{2},$$

ou $n > K - 5$, et la conclusion est la même que tout à l'heure.

On voit donc, par exemple, que des formules de la forme

$$(11) \quad \begin{cases} x = F_1(x, \beta, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^p(x)), \\ y = F_2(x, \beta, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^p(x)), \\ z = F_3(x, \beta, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^p(x)), \end{cases}$$

renfermant une seule fonction arbitraire $\varphi(x)$ et ses dérivées en nombre fini, ne peuvent représenter l'intégrale générale d'une équation du second ordre. En effet, lorsque l'on sera arrivé à des dérivées dépendant de $\varphi^{(p+1)}(x)$, les dérivées suivantes dépendront de $\varphi^{(p+2)}(x)$, ..., etc., et il s'introduira une seule arbitraire nouvelle quand on passera des dérivées d'un certain ordre aux dérivées de l'ordre suivant. Ainsi, quand une équation du second ordre est susceptible d'une intégrale générale explicite, cette intégrale doit contenir au moins deux fonctions arbitraires. Il en est de même toutes les fois que l'intégrale générale appartient à la première classe, comme cela résultera facilement des considérations développées un peu plus loin. Mais on ne peut pas en conclure que l'intégrale générale d'une équation du second ordre dépend nécessairement de deux fonctions arbitraires, si cette intégrale n'appartient pas à la première classe.

Prenez, par exemple, une intégrale où la fonction arbitraire figure sous un signe d'intégration partielle :

$$(12) \quad z = \int_{a_1}^{a_2} \varphi(x, y, z) f(z) dz,$$

où z désigne un paramètre variable, $\varphi(x, y, z)$ une fonction déterminée, $f(z)$ une fonction arbitraire, et a_1, a_2 deux constantes. Si la fonction $\varphi(x, y, z)$ satisfait, quel que soit le paramètre z , à une équation linéaire

$$(13) \quad Ar + 2Bs + C + Dp + Eq + Fs = 0,$$

où les coefficients A, B, C, D, E, F , sont des fonctions des variables x et y , indépendantes de z , on voit immédiatement qu'il en est de même de la fonction (12), quelle que soit la fonction arbitraire $f(z)$. On a, pour cette intégrale,

$$p = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(z) dz, \quad q = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} f(z) dz,$$

$$r = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} f(z) dz, \quad s = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} f(z) dz, \quad t = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} f(z) dz,$$

et, d'une manière générale,

$$\frac{\partial^{j+k} \varphi}{\partial x^j \partial y^k} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial^{j+k} \varphi}{\partial x^j \partial y^k} f(z) dz.$$

Mais la fonction φ , satisfaisant à l'équation (13), toutes les dérivées partielles $\frac{\partial^{j+k} \varphi}{\partial x^j \partial y^k}$ sont des fonctions linéaires de quelques-unes d'entre elles ; par exemple, si A et C sont nuls, elles s'expriment toutes au moyen des dérivées $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$. Il en résulte que toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre n sont alors des fonctions linéaires des intégrales

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi f dz, \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} f dz, \dots, \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} f(z) dz, \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} f(z) dz, \dots, \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} f(z) dz,$$

dont les coefficients sont des fonctions déterminées de x et de y . Quand on passe des dérivées d'ordre n aux dérivées d'ordre $n + 1$, on voit qu'il s'introduit deux arbitraires nouvelles

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial x^{n+1}} f(x) dx, \quad \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}} f(y) dy.$$

Il peut donc se faire qu'une intégrale de la forme (12) vérifie le critérium d'Ampère ; nous avons vu plus haut qu'il en est bien ainsi toutes les fois que l'équation (13) n'est pas intégrable par la méthode de Laplace, généralisée par Legendre, et que l'intégrale (12) dépend effectivement d'une fonction arbitraire.

Il n'est pas permis de conclure de ce qui précède que l'intégrale générale, au sens que nous avons adopté, d'une équation linéaire, peut être représentée par une formule de la forme (12). Dans un travail intéressant ⁽¹⁾, M. Borel a démontré qu'il en est ainsi, mais l'intégrale $\varphi(x, y, z)$ doit être choisie d'une façon particulière.

180. Il a été déjà question, à diverses reprises, des équations qui admettent une intégrale générale de la première classe, suivant une expression adoptée par Ampère. L'illustre auteur n'explique pas, il est vrai, d'une façon bien claire ce qu'il entend par là, et il se borne à dire que, dans les intégrales en question, les fonctions arbitraires ne doivent pas figurer dans une intégrale partielle. Mais il est possible de déduire de ses travaux une définition précise, en tenant compte de la propriété fondamentale sur laquelle sont basés les raisonnements. Nous dirons qu'une équation du second ordre :

$$(14) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

admet une intégrale générale de la première classe, ou, plus simplement, que cette équation appartient à la première classe, s'il est possible d'obtenir, pour représenter l'intégrale générale de cette équation, des formules de la forme suivante

$$(15) \quad \begin{cases} x = V_1[\alpha, \beta, f_1(\alpha), f'_1(\alpha), \dots, f_2(\alpha), f'_2(\alpha), \dots, \varphi_1(\beta), \varphi'_1(\beta) \dots], \\ y = V_2[\alpha, \beta, f_1(\alpha), f'_1(\alpha), \dots, f_2(\alpha), f'_2(\alpha), \dots, \varphi_1(\beta), \varphi'_1(\beta) \dots], \\ z = V_3[\alpha, \beta, f_1(\alpha), f'_1(\alpha), \dots, f_2(\alpha), f'_2(\alpha), \dots, \varphi_1(\beta), \varphi'_1(\beta) \dots], \end{cases}$$

⁽¹⁾ E. Borel, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles* (Comptes Rendus, 25 mars 1893); *Remarques sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles* (Bulletin des Sciences mathématiques, 1895).

où V_1, V_2, V_3 sont des fonctions déterminées des deux variables auxiliaires α et β , de p fonctions de α , $f_1(\alpha), f_2(\alpha), \dots, f_p(\alpha)$, de q fonctions de β , $\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_q(\beta)$, et de leurs dérivées en nombre fini, les p fonctions de α , f_1, f_2, \dots, f_p étant assujetties à vérifier $p - 1$ équations différentielles d'ordre quelconque, et les q fonctions de β devant vérifier de même $q - 1$ équations différentielles d'ordre quelconque; les formules (13) ne renferment donc, en réalité, que deux fonctions arbitraires, une fonction arbitraire de α et une fonction arbitraire de β .

Il est évident que les équations précédentes comprennent, comme cas particulier, les équations qui admettent une intégrale générale explicite; il suffit de supposer $p = q = 1$. On peut aussi ramener à la forme (13) les intégrales où les fonctions arbitraires et leurs dérivées figureraient sous certains signes de quadrature, chacune de ces fonctions n'étant engagée sous un pareil signe qu'avec la variable dont elle dépend, ou d'autres fonctions de cette variable. Par exemple, si les fonctions V_1, V_2, V_3 renfermaient une intégrale telle que

$$\int \pi [\alpha, f_1(\alpha), f'_1(\alpha), \dots, f_2(\alpha), f'_2(\alpha), \dots] d\alpha,$$

il suffirait d'introduire une nouvelle fonction $f_{p+1}(\alpha)$ égale à cette intégrale et d'ajouter aux équations différentielles qui lient les fonctions f_1, f_2, \dots, f_p la nouvelle relation

$$f'_{p+1} \doteq \pi [\alpha, f_1(\alpha), f'_1(\alpha), \dots].$$

On peut aussi faire rentrer dans la définition précédente les intégrales où les fonctions arbitraires figureraient, avec la même restriction, sous plusieurs signes de quadrature superposés. Si, par exemple, les seconds membres des formules (13) renfermaient une expression telle que

$$\int \psi [\alpha, f_1(\alpha), f'_1(\alpha), \dots, f_2(\alpha), f'_2(\alpha), \dots] d\alpha \int \pi [\alpha, f_1(\alpha), f'_1(\alpha), \dots] d\alpha,$$

en posant :

$$f_{p+1}(\alpha) = \int \pi [\alpha, f_1(\alpha), f'_1(\alpha), \dots] d\alpha,$$

$$f_{p+2}(\alpha) = \int \psi [\alpha, f_1(\alpha), f'_1(\alpha), \dots, f_2(\alpha), f'_2(\alpha), \dots] f_{p+1}(\alpha) d\alpha,$$

on ajouterait aux équations différentielles qui ont lieu entre les

fonctions f_1, \dots, f_p , les deux suivantes

$$f_{p+1}(x) = x, \quad f_{p+2}(x) = \frac{1}{2}f_{p+1}(x),$$

et les formules (13) renfermeraient une nouvelle fonction de x , $f_{p+2}(x)$.

D'après une remarque de M. Maurice Lévy (*Comptes Rendus*, t. 73, 1872) on peut ne laisser, dans les formules (13), que deux fonctions de x , et leurs dérivées, ces deux fonctions étant liées par une équation différentielle, et deux fonctions de β , et leurs dérivées, ces deux fonctions étant liées par une autre équation différentielle. Ceci tient à ce que, d'une manière générale, l'intégration d'un système de n équations différentielles à une seule variable indépendante et à n fonctions inconnues peut se ramener à l'intégration d'une équation différentielle d'ordre plus élevé à une seule inconnue ⁽¹⁾.

(1) Soient, en effet, x la variable indépendante et y_1, y_2, \dots, y_n les fonctions inconnues. On peut supposer que les n équations $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_n = 0$, ne renferment aucune dérivée d'ordre supérieur au premier, car, s'il en était autrement, il suffirait de prendre, pour inconnues auxiliaires, un certain nombre de ces dérivées pour être ramené à ce cas. Cela posé, si les équations proposées ne peuvent pas être résolues par rapport aux dérivées des fonctions inconnues y'_1, y'_2, \dots, y'_n , on en déduira un certain nombre de relations entre x, y_1, y_2, \dots, y_n . Si ces relations ne sont pas incompatibles, elles permettront d'exprimer quelques-unes des inconnues en fonction de x et des autres inconnues, et on diminuera l'ordre du système. En continuant de la sorte, si le système proposé n'est pas incompatible, on finira par arriver à un système que l'on pourra résoudre par rapport aux dérivées des fonctions inconnues.

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_m), \quad \frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, \dots, y_m),$$

où $m \leq n$. Prenons comme inconnue auxiliaire une certaine fonction

$$U = F(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

et soit $X(\) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial y_m} f_m$. On aura successivement

$$\frac{dU}{dx} = X(F), \quad \frac{d^2U}{dx^2} = X(X(F)), \dots, \frac{d^p U}{dx^p} = X^{(p)}(F), \dots$$

$X^{(p)}$ étant le résultat de l'opération $X(\)$ répétée p fois de suite. Cette inconnue auxiliaire U satisfait à une équation différentielle d'ordre m et ne satisfait à aucune équation d'ordre inférieur, si la fonction F n'a pas été prise d'une façon particulière. Ayant obtenu l'intégrale générale de cette équation, les m équations

$$U = F, \quad \frac{dU}{dx} = X(F), \dots, \frac{d^{m-1}U}{dx^{m-1}} = X^{(m-1)}(F),$$

permettent d'exprimer y_1, y_2, \dots, y_m en fonction de $x, U, \frac{dU}{dx}, \dots, \frac{d^{m-1}U}{dx^{m-1}}$.

Si nous appliquons ceci aux $p - 1$ équations différentielles entre les p fonctions $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$, on voit qu'en considérant l'une d'elles, $f_1(x)$ par exemple, comme donnée, les $p - 1$ autres s'exprimeront au moyen d'une fonction auxiliaire $U(x)$ et de ses dérivées, cette fonction $U(x)$ étant liée à la fonction $f_1(x)$ par une équation différentielle.

181. A la fin de son mémoire (voir p. 121), M. Darboux annonce que sa méthode permet d'intégrer toutes les équations du second ordre qui admettent une intégrale générale de la première classe. La démonstration que nous allons donner s'étend à des équations possédant une intégrale d'une forme encore plus générale que celle qui est donnée par les formules (15). Soit $f(\alpha)$ une fonction arbitraire de α , et $\varphi(\beta)$ une fonction arbitraire de β ; soient ensuite F_1, F_2, \dots, F_k un système de k fonctions de α et de β , définies par un système d'équations aux différentielles totales :

$$(16) \quad dF_i = \Phi_i[\alpha, \beta, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), \varphi(\beta), \varphi'(\beta), \dots, \varphi^{(n)}(\beta), F_1, F_2, \dots, F_k] d\alpha \\ + \Pi_i[\alpha, \beta, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), \varphi(\beta), \varphi'(\beta), \dots, \varphi^{(n)}(\beta), F_1, F_2, \dots, F_k] d\beta \\ (i = 1, 2, \dots, k),$$

que nous supposons complètement intégrable, quelles que soient les fonctions arbitraires $f(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$. Nous considérons les équations du second ordre dont l'intégrale générale est représentée par des formules telles que

$$(17) \quad \begin{cases} x = V_1[\alpha, \beta, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), \varphi(\beta), \varphi'(\beta), \dots, \varphi^{(n)}(\beta), F_1, F_2, \dots, F_k], \\ y = V_2[\alpha, \beta, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), \varphi(\beta), \varphi'(\beta), \dots, \varphi^{(n)}(\beta), F_1, F_2, \dots, F_k], \\ z = V_3[\alpha, \beta, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), \varphi(\beta), \varphi'(\beta), \dots, \varphi^{(n)}(\beta), F_1, F_2, \dots, F_k], \end{cases}$$

où V_1, V_2, V_3 sont des fonctions déterminées de $\alpha, \beta, F_1, \dots, F_k$, de $f(\alpha), \varphi(\beta)$, et de leurs dérivées jusqu'à un ordre fini. Pour retrouver les équations de la première classe, il suffit de supposer que les fonctions F_1, F_2, \dots, F_k se partagent en deux groupes, les unes ne dépendant que de la variable α , les autres ne dépendant que de la variable β . On peut, en effet, supposer que, dans les formules (15), les fonctions $f_2(\alpha), \dots, f_p(\alpha)$ figurent seules, sans leurs dérivées; il suffit d'introduire ces dérivées comme nouvelles fonctions pour être ramenées à ce cas.

Pour des formes déterminées des fonctions $f(\alpha), \varphi(\beta), F_1, F_2, \dots, F_k$, vérifiant les relations (16), les formules (17) représentent, par hypothèse, une surface intégrale (S) de l'équation du second ordre proposée. Les considérations dont on s'est servi précédemment (t. I, n° 98) s'étendent sans difficulté à cette nouvelle forme de l'intégrale, et nous montrent que, sur la surface (S), les deux familles de caractéristiques sont précisément les courbes $\alpha = C^u$, et $\beta = C^v$. Proposons-nous, en effet, de calculer les dérivées successives de z par rapport à x et à y . Les dérivées du premier ordre p et q se déduisent de l'identité $dz = p dx + q dy$; or, si on remplace dans dx, dy, dz les différentielles dF_i par leurs valeurs (16), on voit que les coefficients de $d\alpha$ et de $d\beta$, renfermeront,

outre les fonctions qui figurent dans V_1, V_2, V_3 , les deux dérivées nouvelles $f^{(n+1)}(x)$ et $\varphi^{(n+1)}(\beta)$. Les expressions de p et de q contiendront donc en général $\alpha, \beta, F_1, F_2, \dots, F_k, f(\alpha), \dots, f^{(n+1)}(x), \varphi(\beta), \dots, \varphi^{(n+1)}(\beta)$; si elles contiennent effectivement $f^{(n+1)}(x)$ et $\varphi^{(n+1)}(\beta)$, elles sont *hétérogènes* à l'intégrale, sinon elles sont *homogènes* à l'intégrale. Connaissant p et q , on obtiendra les dérivées du second ordre au moyen des deux relations

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy$$

et ainsi de suite. Si, à un moment, la dérivée $f^{(n+1)}(x)$ apparaît dans les dérivées d'un certain ordre, les dérivées de l'ordre suivant contiendront $f^{(n+2)}(x)$, ..., etc., chaque différentiation nouvelle fera apparaître une nouvelle dérivée de $f(x)$. De même, à partir du moment où la dérivée $\varphi^{(n+1)}(\beta)$ fera son apparition dans les dérivées d'un certain ordre, chaque différentiation nouvelle amènera une nouvelle dérivée de $\varphi(\beta)$. Il peut d'ailleurs se faire que les dérivées $f^{(n+1)}(x)$ et $\varphi^{(n+1)}(\beta)$ n'apparaissent pas simultanément; c'est ce qui arrivera, par exemple, si les dérivées du second ordre sont homogènes à l'intégrale relativement à α et hétérogènes à l'intégrale relativement à β . Quoiqu'il en soit, à partir des dérivées d'un certain ordre, quand on passera des dérivées d'ordre r aux dérivées d'ordre $r+1$, on introduira deux nouvelles arbitraires, une dérivée de la fonction $f(x)$ et une dérivée de la fonction $\varphi(\beta)$. Les conséquences sont analogues à celles qui ont été déduites plus haut (n° 98).

Nous considérons $\alpha, \beta, F_1, \dots, F_k, f(\alpha), \dots, f^{(n)}(x), \dots, \varphi(\beta), \dots, \varphi^{(n)}(\beta), \dots$, comme autant d'arbitraires distinctes, quoique ces fonctions ne soient pas indépendantes. Cela veut dire uniquement que, lorsqu'on a choisi pour un système particulier $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$ les valeurs de F_1, \dots, F_k , des fonctions f et φ et de leurs dérivées, jusqu'à un ordre déterminé, on peut encore choisir arbitrairement les valeurs des dérivées suivantes pour $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$, jusqu'à un ordre aussi élevé qu'on le veut. Imaginons que l'on ait écrit les formules qui donnent les valeurs successives des dérivées du premier ordre, du second ordre, etc. Si on élimine $\alpha, \beta, F_1, \dots, F_k, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, \varphi(\beta), \varphi'(\beta), \dots$, on est conduit à une infinité de relations entre $x, y, z, p, q, r, s, t, \dots$. La suite de ces relations est identique à celle qu'on obtiendrait en ajoutant à l'équation du second ordre proposée toutes celles qu'on en déduit par des différentiations à l'infini, puisque, par hypothèse, les formules (17) représentent l'intégrale générale de cette équation du second ordre.

Supposons maintenant que l'on prenne pour l'une des fonctions, $\varphi(\beta)$ par exemple, une forme bien déterminée et qu'on laisse arbitraire la

l'étude des équations différentielles linéaires, et dont le module reste toujours plus petit que l'unité, quelle que soit la valeur attribuée à la variable x . Les formules :

$$(4) \quad x = \varphi(\alpha), \quad y = \psi(\beta), \quad z = G(\alpha) + G(\beta),$$

où $\varphi(\alpha)$ est une fonction arbitraire de α , $\psi(\beta)$ une fonction arbitraire de β , représentent une intégrale de l'équation $z = 0$, qui est générale au sens d'Ampère. On déduit en effet des formules (4) les valeurs suivantes des dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{G'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{G'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \right)}{\varphi'(\alpha)}, \dots;$$

d'une manière générale $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ s'exprime au moyen de $\varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha), \dots, \varphi^{(n)}(\alpha)$, et de fonctions connues de α , et $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ s'exprime au moyen de $\psi'(\beta), \psi''(\beta), \dots, \psi^{(n)}(\beta)$, et de fonctions connues de β . Les fonctions φ et ψ étant arbitraires, il ne peut évidemment exister aucune relation d'égalité entre x, y, z et les dérivées précédentes; ce qui suffit pour prouver que l'intégrale est générale au sens d'Ampère. D'ailleurs, il est clair que cette intégrale ne peut être l'intégrale générale au sens habituel, dans un domaine aussi restreint qu'on le voudra, puisque le module de z est toujours inférieur à 2.

Exemple II. — L'équation linéaire

$$(5) \quad z - qy = 0$$

a un invariant nul, et l'intégrale générale est représentée par la formule

$$(6) \quad z = X + \int_0^y Y e^{xy} dy,$$

X étant une fonction arbitraire de x , et Y une fonction arbitraire de y . La suite de Laplace relative à l'équation (5) est terminée, d'une part, à l'équation elle-même, mais elle est illimitée dans l'autre sens, comme on s'en assure en calculant les invariants successifs. Il résulte des propositions établies précédemment (n° 169) que toute équation aux dérivées partielles formant avec l'équation (5) un système en involution est néces-

Toutes les fois qu'une équation du second ordre $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ admet une intégrale générale de la forme (17), toute intégrale de cette équation vérifie une autre équation aux dérivées partielles qui a une infinité d'intégrales communes avec la proposée, dépendant d'une fonction arbitraire, sans les admettre toutes.

On conclut de là (n° 173) qu'il existe deux combinaisons intégrables pour l'un des systèmes de caractéristiques de l'équation $F = 0$, et on peut reconnaître quel est celui de ces deux systèmes, de la façon suivante : ayant attribué à la fonction $\varphi(\beta)$ une forme déterminée, et laissant arbitraire la fonction $f(x)$, toutes les surfaces représentées par les formules (17) vérifient, d'après ce qui précède, l'équation $F = 0$ et une autre équation $\Phi = 0$, dont l'ordre peut être aussi élevé qu'on le veut, formant avec $F = 0$ un système en involution. Les courbes $\alpha = C^u$ sont les caractéristiques de ce système ; en effet, si on attribue à la fonction $f(x)$ une forme particulière et qu'on pose ensuite $\alpha = \alpha_0$, en faisant varier β , on obtient sur la surface intégrale une certaine courbe. Si l'on remplace maintenant $f(x)$ par une autre fonction de α prenant la même valeur que la première, ainsi que ses dérivées jusqu'à un certain ordre, pour $\alpha = \alpha_0$, on obtiendra une nouvelle surface intégrale qui aura avec la première un contact d'un ordre aussi élevé qu'on le voudra tout le long de la courbe $\alpha = \alpha_0$. La démonstration est la même que celle qui a été donnée antérieurement (t. I, n° 98). Il faut remarquer seulement que le long de la courbe $\alpha = \alpha_0$, F_1, F_2, \dots, F_k sont des fonctions de la seule variable β définies par les équations différentielles

$$\frac{dF_i}{d\beta} = \Pi_i(\alpha_0, \beta, f(\alpha_0), f'(\alpha_0), \dots, f^{(n)}(\alpha_0), \varphi(\beta), \dots, \varphi^{(n)}(\beta), F_1, \dots, F_k);$$

elles ne dépendent donc que de α_0 et des valeurs initiales de ces fonctions pour une valeur particulière β_0 de β , et, par suite, restent les mêmes pour toutes les fonctions $f(x)$, qui prennent les mêmes valeurs, ainsi que leurs n premières dérivées, pour $\alpha = \alpha_0$.

En se reportant aux résultats établis dans le Chapitre VI, on conclut de là qu'il existe deux combinaisons intégrables pour les caractéristiques de la famille $\beta = C^u$. Si, au lieu d'attribuer à la fonction $\varphi(\beta)$ une forme déterminée, on laissait cette fonction arbitraire en prenant pour $f(x)$ une fonction déterminée, on démontrerait de la même façon qu'il existe deux combinaisons intégrables pour les caractéristiques de la seconde famille $\alpha = C^u$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Toutes les fois qu'une équation du second ordre admet une intégrale

générale de la forme (17), il existe deux combinaisons intégrables distinctes pour les équations différentielles de chaque système de caractéristiques.

La proposition réciproque a déjà été établie (n° 155). On peut déduire de là de nombreuses conséquences. Ainsi nous avons vu que la méthode de M. Darboux, appliquée aux équations linéaires :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = a,$$

conduit aux mêmes résultats que la méthode de Laplace. Une équation linéaire de cette forme ne peut donc appartenir à la première classe que si la suite de Laplace, relative à cette équation, est limitée dans les deux sens. D'une manière générale, une équation linéaire de forme quelconque ne peut appartenir à la première classe que si l'application du procédé de Legendre conduit à une suite d'équations linéaires qui se termine dans les deux sens.

On a vu aussi (n° 170) que l'équation $s = \sin z$ n'était pas intégrable par la méthode de M. Darboux; cette équation, dont dépend la détermination des surfaces à courbure constante, ne peut donc appartenir à la première classe. Il en est de même, ainsi que l'a montré M. Sophus Lie, pour l'équation aux dérivées partielles en coordonnées cartésiennes des surfaces à courbure constante. Les deux faits peuvent du reste être rattachés l'un à l'autre au moyen d'une remarque générale. Supposons que deux équations du second ordre (E), (E') soient liées l'une à l'autre de telle façon que toute intégrale de l'équation (E') puisse se déduire d'une intégrale de l'équation (E) par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. On peut concevoir analytiquement cette dépendance comme il suit : x, y, z désignant les coordonnées d'un point d'une surface intégrale de l'équation (E) exprimées au moyen de deux variables auxiliaires α, β , soient H_1, H_2, \dots, H_i i fonctions de α, β définies par un système d'équations aux différentielles totales complètement intégrable :

$$(18) \quad dH_j = R_j(x, y, z, p, q, \dots, H_1, H_2, \dots, H_i) dx + S_j(x, y, z, p, q, \dots, H_1, \dots, H_i) dy, \\ (j = 1, 2, \dots, i),$$

les coordonnées d'un point d'une surface intégrale de l'équation (E') s'expriment par des fonctions déterminées de x, y, z, p, q, \dots et de H_1, H_2, \dots, H_i .

Lorsqu'il en est ainsi, si l'équation (E) admet une intégrale générale de la forme (17), il en sera de même pour l'équation (E'), car, en rem-

plaçant x, y, z, p, q, \dots , par leurs expressions tirées des formules (17), on aura des formules de même forme pour représenter l'intégrale générale de l'équation (E') avec des fonctions intermédiaires nouvelles H_1, \dots, H_k , qu'il faudra ajouter aux anciennes F_1, \dots, F_k .

Il y a précisément une liaison de cette nature entre les deux équations

$$(E) \quad r^2 - s^2 + a^2 (1 + p^2 + q^2)^2 = 0, \quad (E') \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega.$$

Supposons, par exemple, qu'on ait obtenu une intégrale de l'équation (E), c'est-à-dire que l'on connaisse les coordonnées (x, y, z) d'un point d'une surface à courbure constante en fonction de deux variables auxiliaires quelconques α et β ; d'après M. Lie, on obtiendra, par de simples quadratures, les lignes de courbure de cette surface, et on en déduira ensuite une solution de l'équation (E'). De même, connaissant une solution de l'équation (E'), on obtiendra une solution de l'équation (E) par l'intégration d'un système d'équations différentielles (1).

182. Plus généralement, supposons qu'une équation du second ordre admette une intégrale représentée par des formules de la forme (17), mais ne dépendant que d'une fonction arbitraire $f(\alpha)$,

$$(19) \quad \begin{cases} x = V_1(\alpha, \beta, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), F_1, F_2, \dots, F_k), \\ y = V_2(\alpha, \beta, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), F_1, F_2, \dots, F_k), \\ z = V_3(\alpha, \beta, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), F_1, F_2, \dots, F_k), \end{cases}$$

où les fonctions F_1, F_2, \dots, F_k sont définies par un système complètement intégrable de la forme (16), où les seconds membres ne renferment qu'une fonction arbitraire $f(\alpha)$. Les raisonnements employés plus haut prouvent que cette intégrale vérifie, quelle que soit la fonction $f(\alpha)$, une équation aux dérivées partielles qui n'admet pas toutes les intégrales de l'équation du second ordre proposée. Il existe donc au moins une autre équation aux dérivées partielles formant avec celle-là un système en involution. Réciproquement, si l'équation du second ordre forme avec une autre équation d'ordre quelconque un système en involution, l'intégrale générale de ce système est représentée par deux relations de la forme

$$\Phi(x, y, z, \alpha, f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0 \quad \frac{d\Phi}{d\alpha} = 0,$$

(1) Darboux, *Théorie générale des Surfaces*. Livre VII.
INTÉGRATION DES ÉQUATIONS.

les n fonctions $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$ étant assujetties à vérifier $n - 1$ équations différentielles. Il est clair que ces formules peuvent être ramenées à la forme (19), en prenant pour la variable β une des coordonnées x, y, z .

On voit donc que, si une intégrale quelconque d'une équation du second ordre appartient à un groupe d'intégrales dépendant d'une fonction arbitraire et représentées par des formules de la forme (19), l'un des systèmes de caractéristiques de cette équation présente deux combinaisons intégrables, et réciproquement. Si deux équations du second ordre $(E), (E')$ sont liées de telle façon que toute intégrale de l'équation (E') se déduise d'une intégrale de l'équation (E) par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires, comme on l'a expliqué tout à l'heure, et, s'il existe deux combinaisons intégrables pour l'un des systèmes de caractéristiques de l'équation (E) , il en sera de même pour l'équation (E') . Lorsque la liaison entre ces deux équations est réciproque, on voit donc que, si l'une des deux équations est intégrable par la méthode de M. Darboux, il en est de même de l'autre.

188. L'étude de la méthode de M. Darboux suggère un grand nombre de sujets de recherches. Ainsi, il serait intéressant de connaître toutes les équations du second ordre auxquelles s'applique avec succès la méthode de M. Darboux, soit pour les deux systèmes de caractéristiques, soit pour un seul système, ou du moins d'avoir des types de plus en plus étendus d'équations auxquelles s'applique cette méthode. Lorsque les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, le problème a été complètement résolu (n° 166); mais, dans le cas général, les solutions que l'on possède paraissent extrêmement particulières. Il y aurait aussi intérêt, en prenant un problème plus particulier, à former toutes les équations pour lesquelles il existe une *intégrale générale explicite*, c'est-à-dire telles que x, y, z puissent s'exprimer par des fonctions déterminées de deux variables auxiliaires α, β , d'une fonction arbitraire de α et d'une fonction arbitraire de β , et de leurs dérivées en nombre fini (t. I, n° 98).

Pour bien préciser l'état de la question, nous rappellerons les résultats connus, relatifs au seul type un peu général d'équations de cette espèce qui ait été étudié jusqu'ici. Soient

$$(20) \quad \begin{cases} x = V_1[\alpha, \beta; \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \dots, \varphi^{(n)}(\alpha); \psi(\beta), \psi'(\beta), \dots, \psi^{(n)}(\beta)], \\ y = V_2[\alpha, \beta; \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \dots, \varphi^{(n)}(\alpha); \psi(\beta), \psi'(\beta), \dots, \psi^{(n)}(\beta)], \\ z = V_3[\alpha, \beta; \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \dots, \varphi^{(n)}(\alpha); \psi(\beta), \psi'(\beta), \dots, \psi^{(n)}(\beta)], \end{cases}$$

les formules qui représentent l'intégrale générale d'une équation du second ordre $F = 0$; on en déduira de proche en proche les expressions des

dérivées successives p, q, r, s, t, \dots , au moyen de α, β , des fonctions $\varphi(\alpha)$, $\psi(\beta)$ et de leurs dérivées successives. Cela posé, puisque l'intégrale générale de l'équation considérée appartient à la première classe, chacun des systèmes de caractéristiques doit admettre une infinité d'invariants distincts. Soient, par exemple, u et v les deux invariants les plus simples du système de caractéristiques $\alpha = C^u$, ceux au moyen desquels s'expriment tous les autres (n° 163). Si on remplace, dans l'un de ces invariants, x, y, z, p, q, \dots , par leurs valeurs, le résultat doit être indépendant de β ; on a donc, après cette substitution,

$$\begin{aligned} u(x, y, z, p, q, \dots) &= F[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \dots], \\ v(x, y, z, p, q, \dots) &= \Phi[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \dots]; \end{aligned}$$

u_1 et v_1 étant les invariants qui jouent le même rôle pour le second système de caractéristiques $\beta = C^{u_1}$, on aura de même

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, p, q, \dots) &= F_1[\beta, \psi(\beta), \psi'(\beta), \dots], \\ v_1(x, y, z, p, q, \dots) &= \Phi_1[\beta, \psi(\beta), \psi'(\beta), \dots]. \end{aligned}$$

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire est évidemment la suivante; chacun des systèmes admet un invariant du premier ordre et, en appelant u et u_1 ces deux invariants, on a

$$\begin{aligned} u(x, y, z, p, q) &= F(\alpha), \\ u_1(x, y, z, p, q) &= F_1(\beta); \end{aligned}$$

comme on peut d'ailleurs remplacer u par une fonction quelconque de u , et u_1 par une fonction quelconque de u_1 , il est permis de remplacer ces égalités par les suivantes:

$$u(x, y, z, p, q) = \alpha, \quad u_1(x, y, z, p, q) = \beta.$$

L'hypothèse que nous faisons revient donc à celle-ci: des formules (20) et de celles qui donnent les dérivées du premier ordre p et q , on peut tirer les valeurs de α et de β en fonction de x, y, z, p, q .

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que chacun des systèmes de caractéristiques de l'équation du second ordre admette un invariant du premier ordre. On démontre aisément que cela ne peut avoir lieu que si l'équation considérée est une équation de Monge-Ampère, et ces deux invariants u et u_1 doivent être en involution, $[u, u_1] = 0$. Si on fait une transformation de contact, de façon à ce que les nouvelles variables indé-

pendantes soient précisément u et u_1 , l'équation prendra la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial u_1} = f\left(u, u_1, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u_1}\right),$$

et on aura pour l'intégrale générale de cette équation une fonction renfermant explicitement deux fonctions arbitraires de u et de u_1 , respectivement, avec leurs dérivées jusqu'à un ordre fini. On est donc ramené au problème suivant, qui a fait l'objet des recherches de M. Moutard ⁽¹⁾ :

Trouver toutes les équations du second ordre admettant une intégrale générale de la forme

$$(21) \quad z = f(x, y, X, X', \dots, X^{(m)}; Y, Y', \dots, Y^{(n)})$$

X désignant une fonction arbitraire de x , et $X', \dots, X^{(m)}$ ses dérivées, Y désignant une fonction arbitraire de y , et $Y', \dots, Y^{(n)}$ ses dérivées.

Les théorèmes énoncés par M. Moutard ont été démontrés par M. E. Cosserat dans une note élégante ⁽²⁾, à laquelle nous renverrons le lecteur en résumant seulement les résultats. On voit directement qu'une équation qui admet une intégrale générale de cette espèce est nécessairement de la forme

$$z = f(x, y, z, p, q),$$

ce qui résulte aussi des raisonnements précédents. Mais le calcul direct montre de plus que la fonction f doit être linéaire par rapport à p et par rapport à q séparément, c'est-à-dire que l'équation précédente doit être de la forme

$$(22) \quad z + \rho q + ap + bq + c = 0,$$

ρ, a, b, c désignant des fonctions de x, y, z . Si l'on prend comme nouvelle inconnue, au lieu de z , une fonction θ de x, y, z , assujettie uniquement à vérifier la relation

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = e f \rho z,$$

l'équation définissant θ sera encore de la forme (22), mais ne contiendra

⁽¹⁾ *Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes (Comptes Rendus, t. LXX, p. 834).*

⁽²⁾ Note ajoutée au tome IV de la *Théorie générale des Surfaces* de M. Darboux, p. 403-422.

pas de terme en pq , et admettra une solution de même forme que l'équation (22). Il suffit donc de traiter le problème pour une équation de la forme

$$(23) \quad s + ap + bq + c = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions de x, y, z .

Cela posé, pour que l'équation (23) admette une solution de la forme (21), il faut, abstraction faite de deux cas particuliers dont il sera question tout à l'heure, que l'équation soit linéaire, ou bien qu'elle soit de la forme

$$(24) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (me^{\omega z} + n) \frac{\partial z}{\partial x} + (m_1 e^{-\omega z} + n_1) \frac{\partial z}{\partial y} + c = 0,$$

m, n, m_1, n_1, ω étant des fonctions de x et de y , et c une fonction de x, y, z . Si l'équation (23) est linéaire, pour qu'elle admette une intégrale générale de la forme (21), il faut et il suffit que la suite de Laplace relative à cette équation soit terminée dans les deux sens, et nous retombons sur une question déjà traitée. Si l'équation est de la forme (24), en prenant pour nouvelle inconnue $z\omega$, il faudra qu'elle appartienne au type suivant :

$$(25) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (Ae^z) + \frac{\partial}{\partial y} (Be^{-z}) + C = 0,$$

A, B, C étant des fonctions de x et de y . Nous verrons au chapitre suivant comment une transformation simple permet de ramener l'intégration de cette équation à celle d'une équation linéaire. Pour que l'équation (23) admette une intégrale générale de la forme (21), il faut et il suffit qu'il en soit de même de l'équation linéaire correspondante, et on est ramené au même problème.

Si l'équation (23) n'est ni linéaire, ni du type (24), elle doit être de l'une des trois formes suivantes, dont la seconde se déduit de la première en échangeant le rôle des variables x, y ,

$$(26) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (mx + n) \frac{\partial z}{\partial x} + n_1 \frac{\partial z}{\partial y} + c = 0,$$

$$(27) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + n \frac{\partial z}{\partial x} + (m_1 y + n_1) \frac{\partial z}{\partial y} + c = 0,$$

$$(28) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + n \frac{\partial z}{\partial x} + n_1 \frac{\partial z}{\partial y} + c = 0,$$

m, n, m_1, n_1 désignant des fonctions de x, y et c une fonction de x, y, z . Pour que l'équation (26) admette une intégrale de la forme (21), il faut

qu'en prenant pour nouvelle inconnue une expression linéaire par rapport à z , et remplaçant y par une fonction choisie convenablement de y , on retombe sur l'équation intégrée déjà (n° 47) :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

On a une conclusion analogue pour l'équation (27). Enfin, pour que l'équation (28) admette une intégrale de la forme (21), il faut qu'on puisse la ramener à l'équation de Liouville en prenant pour nouvelle inconnue une fonction linéaire de z . En définitive, la solution du problème de M. Moutard est ramenée à la formation de toutes les équations linéaires pour lesquelles la suite de Laplace est terminée dans les deux sens.

Considérons l'ensemble des équations qui admettent une intégrale générale de la forme (21) et de toutes celles que l'on en déduit par toutes les transformations de contact possibles. Nous avons ainsi une famille d'équations du second ordre admettant une intégrale générale explicite, qui sont caractérisées par la propriété énoncée plus haut : les variables auxiliaires α et β sont des fonctions déterminées de x, y, z, p, q . La plupart des équations dont nous avons obtenu l'intégrale générale sous forme explicite appartiennent à cette famille, mais ce ne sont point les seules. Par exemple, l'équation $(x + y)z = 2\sqrt{pq}$ intégrée au n° 171 ne peut être ramenée à la forme (23) par une transformation de contact, comme on le démontre facilement, en remarquant que cette transformation serait forcément de la forme

$$x' = X(x), \quad y' = Y(y), \quad z' = Z(x, y, z),$$

ou de la forme

$$x' = Y(y), \quad x' = X(x), \quad z' = Z(x, y, z).$$

Cependant cette équation admet, comme on l'a vu, une intégrale générale explicite; mais on a, dans ce cas,

$$x = \varphi''(\alpha), \quad y = \psi''(\beta),$$

de sorte que α et β , tout en ne dépendant que de x et de y respectivement, sont des fonctions dont l'expression varie avec l'intégrale considérée. Cette remarque conduit à poser un problème plus général que celui de M. Moutard et dont voici l'énoncé : *Trouver toutes les équations d'un*

second ordre qui admettent une intégrale générale de la forme

$$(29) \quad \begin{cases} x = V_1[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \dots, \varphi^{(m)}(\alpha)], \\ y = V_2[\beta, \psi(\beta), \psi'(\beta), \dots, \psi^{(n)}(\beta)], \\ z = V_3[\alpha, \beta; \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{(m)}(\alpha); \psi(\beta), \dots, \psi^{(n)}(\beta)], \end{cases}$$

x ne dépendant que de $\alpha, \varphi(\alpha), \dots, \varphi^{(m)}(\alpha)$, et y ne dépendant que de $\beta, \psi(\beta), \psi'(\beta), \dots, \psi^{(n)}(\beta)$. Il est clair que l'équation doit être de la forme $s + f(x, y, z, p, q) = 0$.

Il peut aussi arriver qu'une équation du second ordre admette une intégrale générale explicite, sans que les deux systèmes de caractéristiques admettent une combinaison intégrable du premier ordre. Prenons, par exemple, l'équation

$$(30) \quad s + px^2 + 2q^2z = 0;$$

il existe, pour l'un des systèmes de caractéristiques du premier ordre, deux combinaisons intégrables distinctes :

$$dx = 0, \quad d(p + qx^2) = 0,$$

tandis qu'il n'en existe aucune pour le second système. L'équation (30) admet l'intégrale intermédiaire

$$p + qx^2 = \Phi(x),$$

dont l'intégration se ramène à celle du système

$$(31) \quad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{x^2} = \frac{dz}{\Phi(x)};$$

si on pose $\Phi(x) = X'$, l'intégrale générale du système (31) est donnée par les formules

$$(32) \quad \begin{cases} z - X' = C_1, \\ y - \int X'^2 dx - 2X(z - X') - x(z - X')^2 = C_2. \end{cases}$$

On fera disparaître tout signe de quadrature en posant $X' = \alpha, x = \varphi(\alpha)$, ce qui donne

$$X = \int X' d\alpha = \alpha\varphi'(\alpha) - \varphi(\alpha), \quad \int X'^2 dx = \alpha^2\varphi'(\alpha) - 2\alpha\varphi(\alpha) + 2\varphi(\alpha).$$

Pour obtenir l'intégrale générale de l'équation du second ordre, il

fait établir une relation arbitraire entre C_1 et C_2 ou, ce qui revient au même, poser $C_1 = \beta$, $C_2 = \phi(\beta)$; finalement, on trouve que l'intégrale générale est donnée par les formules

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta, & \alpha &= \varphi''(\alpha), \\ y &= \alpha^2 \varphi''(\alpha) - 2\alpha \varphi'(\alpha) + 2\varphi(\alpha) + 2(\alpha \varphi''(\alpha) - \varphi'(\alpha))\beta + \varphi''(\alpha)\beta^2 + \phi(\beta). \end{aligned}$$

Il est facile de trouver, d'après ces formules, les invariants du second système de caractéristiques. On a, en effet,

$$q \frac{\partial y}{\partial \beta} = 1,$$

et, en différentiant plusieurs fois de suite par rapport à β , on a successivement

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + q \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} &= 0, \\ p_{22} \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^3 + 3i \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} + q \frac{\partial^3 y}{\partial \beta^3} &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

de sorte qu'inversement $\frac{\partial y}{\partial \beta}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial \beta^3}$, ..., s'expriment au moyen de q , i , p_{22} , ... Mais, à partir de la dérivée troisième $\frac{\partial^3 y}{\partial \beta^3}$, ces dérivées ne dépendent que de β . On a donc un invariant du troisième ordre et un du quatrième ordre pour le second système de caractéristiques.

184. Lorsque la méthode de M. Darboux réussit pour les deux familles de caractéristiques d'une équation du second ordre, l'intégration est ramenée à celle d'un système d'équations aux différentielles totales de la forme

$$(33) \begin{cases} dx_i = \varphi_i(x, y, X, X', \dots, X^{(n)}; Y, Y', \dots, Y^{(n)}; x_1, x_2, \dots, x_m) dx \\ \quad + \psi_i(x, y, X, X', \dots, X^{(n)}; Y, Y', \dots, Y^{(n)}; x_1, x_2, \dots, x_m) dy, \\ (i = 1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

qui ne diffère que par les notations du système (16); X désigne une fonction arbitraire de x , Y une fonction arbitraire de y , et le système est complètement intégrable pour toutes les formes possibles de ces fonctions arbitraires. Le système le plus simple de cette espèce, où n'entre qu'une seule fonction inconnue x , et où ne figure aucune dérivée des deux fonctions X et Y ,

$$dx = \varphi(x, y, x, X, Y) dx + \psi(x, y, x, X, Y) dy,$$

a déjà été étudié au n° 42, sous une forme un peu différente. On a vu qu'en prenant pour nouvelle inconnue une fonction convenablement choisie de x, y, z , on pouvait ramener cette équation à la forme canonique

$$dZ = X_0(x) dx + Y_0(y) dy.$$

Nous ne connaissons aucun travail sur les systèmes les plus généraux de la forme (33). Lorsque les fonctions inconnues x_1, x_2, \dots, x_m ne figurent pas dans les seconds membres, la proposition suivante permet de ramener les équations à une forme simple ⁽¹⁾.

Si l'expression

$$(34) \quad \begin{cases} \varphi(x, y, X, X', \dots, X^{(p)}, Y, Y', \dots, Y^{(p)}) dx \\ + \psi(x, y, X, X', \dots, X^{(p)}, Y, Y', \dots, Y^{(p)}) dy, \end{cases}$$

où X est une fonction arbitraire de x , Y une fonction arbitraire de y , et où φ et ψ renferment X et Y et leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé, est une différentielle exacte pour toutes les formes possibles des fonctions X et Y , on a

$$\int \varphi dx + \psi dy = \int F(x, X, X', \dots, X^{(p)}) dx + \int F_1(y, Y, Y', \dots, Y^{(p)}) dy + F_2(x, y, X, \dots, X^{(p-1)}, Y, Y', \dots, Y^{(p-1)}),$$

F ne renfermant que $x, X, X', \dots, X^{(p)}$; F_1 ne renfermant que $y, Y, Y', \dots, Y^{(p)}$, et F_2 étant une fonction déterminée des variables qui y figurent ⁽²⁾.

Supposons, pour fixer les idées, que les dérivées de l'ordre le plus élevé des fonctions X, Y , qui figurent dans φ et ψ , sont celles d'ordre p , de telle sorte que l'une des dérivées $X^{(p)}, Y^{(p)}$ entre dans l'une au moins des fonctions φ et ψ , mais qu'il n'y entre aucune dérivée d'ordre supérieur à p . Par hypothèse, on doit avoir, pour toutes les formes possibles des fonctions X et Y ,

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx},$$

⁽¹⁾ Bulletin de la Société mathématique, t. XXV, p. 39; 1897.

⁽²⁾ La proposition s'étend sans difficulté aux expressions

$$\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \dots + \varphi_n dx_n$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, renferment n fonctions arbitraires X_1, X_2, \dots, X_n de x_1, x_2, \dots, x_n respectivement, et leurs dérivées en nombre fini, qui sont des différentielles totales exactes pour toutes les formes possibles des fonctions arbitraires.

on posant

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dy} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} Y' + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial Y^{(p-1)}} Y^{(p)} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y^{(p)}} Y^{(p+1)}, \\ \frac{d\psi}{dx} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial X} X' + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial X^{(p-1)}} X^{(p)} + \frac{\partial \psi}{\partial X^{(p)}} X^{(p+1)};\end{aligned}$$

on voit que $\frac{d\psi}{dx}$ ne contient pas $Y^{(p+1)}$ et que $\frac{d\varphi}{dy}$ ne contient pas $X^{(p+1)}$.

Il faudra donc que l'on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Y^{(p)}} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial X^{(p)}} = 0,$$

c'est-à-dire que φ ne contiendra les dérivées de la fonction Y que jusqu'à celle d'ordre $p-1$ au plus, et de même ψ ne contiendra les dérivées de X que jusqu'à celle d'ordre $p-1$ au plus. Alors $\frac{d\psi}{dx}$, et par suite $\frac{d\varphi}{dy}$, doit être une fonction linéaire de $X^{(p)}$. On doit donc avoir

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)}{[\partial X^{(p)}]^2} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial X^{(p)})^2} \right] = 0,$$

ce qui montre que $\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial X^{(p)})^2}$ est indépendant de $y, Y, Y', \dots, Y^{(p-1)}$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial X^{(p)})^2} = v(x, X, X', X'', \dots, X^{(p)}).$$

On en déduit que φ est de la forme

$$\varphi = \Phi(x, X, X', \dots, X^{(p)}) + \Phi_1(x, y, X, X', \dots, X^{(p-1)}, Y, Y', \dots, Y^{(p-1)}) X^{(p)} + \Phi_2(x, y, X, X', \dots, X^{(p-1)}, Y, \dots, Y^{(p-1)}),$$

et l'on démontrera de la même façon que ψ doit être de la forme

$$\psi = \Psi(y, Y, Y', \dots, Y^{(p)}) + \Psi_1(x, y, X, X', \dots, X^{(p-1)}, Y, Y', \dots, Y^{(p-1)}) Y^{(p)} + \Psi_2(x, y, X, X', \dots, X^{(p-1)}, Y, \dots, Y^{(p-1)}).$$

Le coefficient de $X^{(p)} Y^{(p)}$ est $\frac{\partial \Phi_1}{\partial Y^{(p-1)}}$ dans $\frac{d\varphi}{dy}$, et $\frac{\partial \Psi_1}{\partial X^{(p-1)}}$ dans $\frac{d\psi}{dx}$; on

doit donc avoir

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial Y^{(p-1)}} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial X^{(p-1)}}$$

ce qui montre que Φ_1 et Ψ_1 sont les dérivées partielles par rapport à $X^{(p-1)}$ et $Y^{(p-1)}$ respectivement d'une fonction

$$U(x, y, X, X', \dots, X^{(p-1)}, Y, Y', \dots, Y^{(p-1)}) = \int \Phi_1 dX^{(p-1)} + \Psi_1 dY^{(p-1)}.$$

La différentielle totale de cette fonction U a pour expression

$$\begin{aligned} dU = & \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial X} X' + \dots + \frac{\partial U}{\partial X^{(p-2)}} X^{(p-1)} \right) dx \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial Y} Y' + \dots + \frac{\partial U}{\partial Y^{(p-2)}} Y^{(p-1)} \right) dy \\ & + \Phi_1 X^{(p)} dx + \Psi_1 Y^{(p)} dy, \end{aligned}$$

et l'on peut écrire

$$\int \varphi_1 dx + \psi_1 dy = \int \Phi_1 dx + \int \Psi_1 dy + U + \int \varphi_1 dx + \psi_1 dy,$$

en posant

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \Phi_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial X} X' + \dots + \frac{\partial U}{\partial X^{(p-2)}} X^{(p-1)} \right), \\ \psi_1 &= \Psi_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial Y} Y' + \dots + \frac{\partial U}{\partial Y^{(p-2)}} Y^{(p-1)} \right). \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que $\varphi_1 dx + \psi_1 dy$ doit être une différentielle exacte pour toutes les formes possibles des fonctions arbitraires X et Y , et que φ_1 et ψ_1 ne renferment les dérivées de ces fonctions que jusqu'à l'ordre $p-1$ au plus. En répétant les mêmes opérations sur $\int \varphi_1 dx + \psi_1 dy$, et poursuivant l'application du procédé autant de fois qu'il est possible, on finira par arriver à une intégrale de la forme

$$\int \varphi_p(x, y, X) dx + \psi_p(x, y, Y) dy,$$

où l'expression $\varphi_p dx + \psi_p dy$ doit être une différentielle exacte pour toutes les formes possibles de X et de Y . On doit donc avoir

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial y} = \frac{\partial \psi_p}{\partial x};$$

or, φ_p ne contient pas Y , il doit donc en être de même de $\frac{\partial \varphi_p}{\partial x}$, c'est-à-dire que φ_p est de la forme $P(y, Y) + Q(x, y)$.

On voit de même que φ_p doit être de la forme $M(x, X) + N(x, y)$, et la condition d'intégrabilité devient $\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

L'intégrale en question peut donc s'écrire

$$\int \varphi_p dx + \psi_p dy = \int M(x, X) dx + \int P(y, Y) dy + \int N dx + Q dy.$$

En réunissant tous les résultats obtenus, on obtient bien pour l'intégrale $\int \varphi dx + \psi dy$ une expression de la forme annoncée.

On voit de même que, si les fonctions φ et ψ renferment une seule fonction arbitraire, X par exemple, on peut écrire

$$\int \varphi dx + \psi dy = \int F(x, X, \dots, X^{(p)}) dx + F_2(x, y, X, \dots, X^{(p-1)}).$$

Remarque. — Si l'on suppose que les fonctions φ et ψ soient linéaires par rapport aux fonctions X, Y , et à leurs dérivées, on retrouve le théorème démontré par M. Darboux ⁽¹⁾, et qui est d'un grand usage dans l'étude des équations linéaires. En effet, les fonctions φ et ψ sont alors de la forme

$$\begin{aligned} \varphi &= A_0 X + A_1 X' + \dots + A_{p-1} X^{(p-1)} + B_0 Y + B_1 Y' + \dots + B_{p-1} Y^{(p-1)}, \\ \psi &= C_0 X + C_1 X' + \dots + C_{p-1} X^{(p-1)} + D_0 Y + D_1 Y' + \dots + D_{p-1} Y^{(p-1)}, \end{aligned}$$

A_i, B_i, C_i, D_i étant des fonctions déterminées de x et de y ; si l'on pose

$$U = A_{p-1} X^{(p-1)} + D_{p-1} Y^{(p-1)},$$

on peut écrire

$$\int \varphi dx + \psi dy = \int \tilde{\varphi}_1 dx + \tilde{\psi}_1 dy,$$

φ_1 et ψ_1 étant des expressions de même forme que φ et ψ , qui ne renferment plus que les dérivées de X et de Y , jusqu'à l'ordre $p - 1$ au plus. En continuant ainsi, on arrivera à une expression

$$aXdx + bYdy,$$

qui devra être une différentielle exacte pour toutes les formes possibles des fonctions X et Y , ce qui exige que a ne dépende que de la variable

⁽¹⁾ *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*, t. II, p. 151.

x , et que δ ne dépende que de la variable y . Si ces fonctions ne sont pas nulles, on fera disparaître tous les signes de quadrature, en remplaçant X par $\frac{X'}{a}$ et Y par $\frac{Y'}{b}$, X , et Y , désignant deux nouvelles fonctions arbitraires de x et de y respectivement.

La proposition est encore vraie si les fonctions φ et ψ ne renferment qu'une seule fonction arbitraire, car cela revient à supposer que tous les coefficients A_i et C_i , ou tous les coefficients B_i et D_i , sont nuls simultanément.

185. On a vu, d'après l'exposition précédente, que la méthode d'intégration de Monge, celle de Laplace et les méthodes plus ou moins particulières proposées pour des équations spéciales, sont comprises comme cas particuliers dans la méthode d'intégration de M. Darboux, qui nous apparaît ainsi comme le moyen le plus puissant pour intégrer une équation aux dérivées partielles du second ordre, ou, d'une façon plus précise, pour ramener le problème à l'intégration d'un ou plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires. Dans la note citée plus haut ⁽¹⁾, M. Maurice Lévy énonce sans démonstration une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse obtenir l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, moyennant l'intégration de k systèmes successifs d'équations différentielles ordinaires, comprenant chacun un nombre quelconque d'équations avec un pareil nombre d'inconnues; et il est facile de voir que le critère de M. Maurice Lévy est identique à celui que l'on déduit de l'application de la méthode de M. Darboux. Cette proposition est restée longtemps sans démonstration, et ce n'est que dans ces derniers temps que M. E. von Weber ⁽²⁾ a donné du théorème de M. Maurice Lévy une démonstration que nous allons reproduire, en la modifiant sur quelques points.

D'après une remarque déjà faite (n° 173), pour qu'une équation du second ordre $F = 0$ soit intégrable par la méthode de M. Darboux, il faut et il suffit que toute intégrale de cette équation appartienne à une autre équation $\Phi = 0$, dont l'ordre peut être quelconque, qui a une infinité d'intégrales communes avec la proposée, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires, sans les admettre toutes. On peut remplacer ce critère par le suivant, dont l'énoncé a un caractère plus géométrique. Prenons d'abord une équation ayant ses deux systèmes de

⁽¹⁾ *Comptes Rendus*, t. 73. p. 1094.

⁽²⁾ E. von Weber, Ueber partielle Differentialgleichungen. II Ordnung, die sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen integrieren lassen (*Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wissenschaften*. Bd. XXVI, 1896, p. 425-437).

caractéristiques distincts, et admettant deux invariants u et v , pour l'un des systèmes de caractéristiques d'ordre n (C_1^n). Soit (C_1^n) une caractéristique d'ordre n de l'autre système; le long de (C_1^n), u et v sont des fonctions d'une seule variable indépendante, et la relation $u = \varphi(v)$ détermine la forme de la fonction φ . Toutes les surfaces intégrales de l'équation du second ordre, qui admettent tous les éléments de la caractéristique (C_1^n), sont donc des intégrales du système en involution

$$F = 0, \quad u = \varphi(v),$$

dont les caractéristiques ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres. Or, ces caractéristiques sont précisément les caractéristiques de $F = 0$ du même système que (C_1^n), qui appartiennent aux intégrales passant par (C_1^n). On voit donc que, si une équation du second ordre $F = 0$ est intégrable par la méthode de M. Darboux, il existe au moins un des systèmes de caractéristiques d'ordre n , tel que, si l'on considère une quelconque des caractéristiques de ce système (C_1^n), toutes les autres caractéristiques du même système, qui appartiennent à une même surface intégrale que (C_1^n), ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres.

Comme les caractéristiques d'ordre n qui renferment une caractéristique du second ordre ne dépendent elles-mêmes que d'un nombre fini de paramètres, et qu'une caractéristique d'ordre n contient une seule caractéristique du second ordre, il s'ensuit que la propriété précédente s'applique aussi à l'une des familles de caractéristiques du second ordre d'une équation intégrable par la méthode de M. Darboux. Il en est encore de même pour une équation dont les deux systèmes de caractéristiques seraient confondus; en effet, si cette équation est intégrable par la méthode de M. Darboux, il résulte des résultats obtenus (n° 166) que les caractéristiques qui engendrent les surfaces intégrales ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres.

La condition qui précède est *suffisante* pour qu'une équation du second ordre soit intégrable par la méthode de M. Darboux. Soit (C_1^n) une caractéristique du second ordre de la famille qui jouit de cette propriété; considérons toutes les surfaces intégrales (S) qui admettent tous les éléments du second ordre de (C_1^n). Ces surfaces dépendent d'une infinité de constantes arbitraires, et, par hypothèse, toutes les caractéristiques du second ordre de la même famille que (C_1^n), qui sont situées sur ces surfaces, ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres. On peut donc les regarder comme engendrées par des courbes (Γ), qui ne dépendent que de k paramètres, associées suivant une loi convenable,

$$(33) \quad \begin{cases} f(x, y, z, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0, \\ \varphi(x, y, z, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0; \end{cases}$$

or, si l'on considère toutes les surfaces engendrées par les courbes (Γ) , associées d'une façon absolument arbitraire, ces surfaces vérifient une équation aux dérivées partielles d'ordre $k - 1$,

$$(36) \quad \Phi = 0,$$

qui a ainsi une infinité d'intégrales communes avec l'équation proposée, dépendant d'une fonction arbitraire. D'ailleurs, l'équation (36) ne peut admettre toutes les intégrales de l'équation du second ordre; s'il en était ainsi, les caractéristiques de l'un des systèmes, se composant des courbes (Γ) , ne dépendraient que d'un nombre fini de paramètres, ce qui est impossible si les deux systèmes de caractéristiques sont distincts. Lorsque les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, il pourrait se faire que l'équation (36) admette toutes les intégrales de l'équation du second ordre, mais la conclusion serait encore la même. En effet, l'équation d'une surface intégrale s'obtiendrait en éliminant le paramètre x entre les deux relations

$$(37) \quad \begin{cases} f[x, y, z, \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_k(x)] = 0, \\ \varphi[x, y, z, \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_k(x)] = 0, \end{cases}$$

$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_k(x)$ étant des fonctions convenablement choisies de x ; en écrivant que la surface ainsi obtenue est une intégrale de l'équation du second ordre proposée, on trouvera évidemment un certain nombre de relations entre les fonctions $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x)$, et leurs dérivées, de sorte que l'intégrale générale de l'équation du second ordre serait de la première classe. On peut donc remplacer le critère du n° 173 par le suivant : Pour qu'une équation du second ordre soit intégrable par la méthode de M. Darboux, il faut et il suffit que, (C_i) étant une caractéristique quelconque de l'un des systèmes (convenablement choisi), toutes les autres caractéristiques du même système, qui peuvent être situées sur une même surface intégrale que (C_i) , ne dépendent que d'un nombre fixe de paramètres.

Lorsque la propriété appartient aux deux familles de caractéristiques, la méthode de M. Darboux réussit des deux côtés.

186. — Revenons maintenant à la proposition de M. Maurice Lévy. Étant donnée une équation du second ordre $F = 0$, intégrer cette équation revient à trouver toutes les multiplicités composées de ∞^2 éléments du second ordre vérifiant $F = 0$ et les relations

$$(38) \quad dx = p dx + q dy, \quad dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy.$$

Si toutes ces multiplicités peuvent être obtenues par l'intégration de plusieurs systèmes successifs d'équations différentielles ordinaires, mal-

gré l'énoncé un peu vague du problème, on ne peut guère concevoir la marche des opérations à effectuer que de la manière suivante. Après l'intégration d'un ou plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires, on sera conduit à un système définissant des multiplicités simplement infinies d'éléments du second ordre vérifiant les relations (38) et l'équation $F = 0$; soient

$$(39) \quad \varphi_i \left(x, y, \dots, t, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{dt}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \right) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots)$$

ces équations différentielles. Les fonctions φ_i dépendent de constantes arbitraires ou de fonctions arbitraires introduites par l'intégration des systèmes rencontrés antérieurement, et les multiplicités à une dimension obtenues par l'intégration du système (39), en les associant convenablement, donnent une surface intégrale. De plus, toutes les intégrales, sauf les intégrales singulières, peuvent être obtenues de cette façon.

Si l'on a fixé la valeur des constantes arbitraires ou la forme des fonctions arbitraires qui figurent dans les fonctions φ_i , l'intégration du système (39) nous donnera, par hypothèse, des intégrales de l'équation $F = 0$. M. E. von Weber admet, et c'est là le point le plus délicat de sa démonstration, que les intégrales S_i que l'on peut déduire d'un même système (39) forment un ensemble dépendant d'un nombre infini de paramètres ⁽¹⁾. Si l'on admet ce point, la démonstration est immédiate. En effet, les intégrales S_i appartiennent à une famille de surfaces engendrées par des courbes qui dépendent d'un nombre fini de paramètres, et vérifient, par conséquent, une équation aux dérivées partielles qui n'est pas une conséquence de l'équation $F = 0$. Comme ces intégrales dépendent d'une infinité de constantes, il s'ensuit que le critère pour que la méthode de M. Darboux soit applicable est toujours satisfait. On voit de plus que les multiplicités à une dimension définies par les équations (39) sont précisément les caractéristiques du second ordre de l'un des systèmes.

(1) Voici textuellement le passage du mémoire de M. E. von Weber :

• Je ∞^1 Integralstreifen dieses Systems lassen sich zu einer Integralmannigfaltigkeit von (1) zusammenordnen und die Gleichungen (3) müssen allgemein genug sein, um alle (nicht singulären) Integrale von (1) in dieser Weise zu liefern. Damit aber durch Einführung des Systems (3) in die Rechnung eine wirkliche Vereinfachung des Integrationsgeschäfts erzielt werde, d. h. damit die Ermittlung des Systems 3) nicht ein Problem von ebenso höher Ordnung sei als die Herstellung des (von zwei arbiträren Funktionen eines Arguments abhängenden, allgemeinen Integrals von (1), werden wir verlangen, dass in die linken Seiten von (3) ausser einer endlichen Zahl von Parametern nur noch die Coefficienten höchstens einer arbiträren Funktion eines Arguments eingehen. Aus der endlichgliedrigen Schaar von Integralstreifen des einzelnen Systems (3a) muss sich somit eine unendlichgliedrige Schaar zweifach ausgedehnter Integralmannigfaltigkeiten von (1) aufbauen lassen, da sonst die Gesamtheit der Systeme (3a) nicht hinreichen würde, um das allgemeine Integral von (1) in dieser Weise entstehen zu lassen.

CHAPITRE IX

TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE

Recherche des équations du second ordre, telles que l'une des dérivées premières de la fonction inconnue vérifie une seule équation du second ordre. — Application à divers exemples. — Généralités sur les systèmes de deux équations du premier ordre à deux fonctions inconnues. — Cas où l'élimination de l'une des inconnues conduit à une équation du second ordre. — Exemples de transformations. — Cas des équations linéaires. — Équation adjointe. — Transformation de M. Moutard. — Transformations de M. Bäcklund. — Exemple de M. E. Cosserat. — Comparaison avec la méthode de M. Darboux. — Généralités sur les transformations des équations du second ordre.

187. On a vu, dans l'étude des équations aux dérivées partielles du premier ordre, le rôle important que joue la théorie des transformations de contact ; intégrer une équation du premier ordre, à une seule fonction inconnue et à un nombre quelconque de variables indépendantes, revient au fond à déterminer une transformation de contact permettant de ramener cette équation à une forme immédiatement intégrable, par exemple $p_1 = 0$. Cette théorie ne permet point une étude aussi complète des équations du second ordre ; nous avons déjà rappelé (I, chapitre II) que dans certains cas, étudiés par Ampère et, après lui, par Imschenetsky, une transformation de contact permet de ramener une équation du second ordre à une autre équation du second ordre d'une forme plus simple, mais on ne peut jamais passer ainsi d'une équation non intégrable par la méthode de M. Darboux à une équation intégrable. D'une façon plus précise, lorsque deux équations du second ordre se déduisent l'une de l'autre par une transformation de contact, si l'une d'elles est intégrable par la méthode de M. Darboux, la même méthode réussira pour la seconde après le même nombre d'opérations. Car une transformation de contact change évidemment les caractéristiques en caractéristiques et conserve l'ordre du contact.

Nous avons déjà eu l'occasion, dans le courant de ces Leçons, d'ap-
plication des équations. — T. II.

plier d'autres transformations, qui ne réussissent que grâce à la forme particulière des équations auxquelles on les applique. Telle est la transformation de Laplace ; telle est aussi la transformation qui permet d'intégrer l'équation de Liouville (t. I, n° 47). Nous allons passer en revue, dans ce chapitre, quelques-unes des transformations les plus employées, en essayant de les ramener à quelques types généraux.

Proposons-nous d'abord de trouver toutes les équations du second ordre $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ auxquelles s'applique la transformation $u = \frac{\partial z}{\partial y}$, c'est-à-dire telles qu'on puisse en déduire une relation entre $x, y, q, s, t, p_{21}, p_{12}, p_{03}$ et une seule, s'appliquant à toutes les intégrales de cette équation. Si l'équation proposée renferme la dérivée seconde r , on peut l'écrire

$$(E) \quad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0;$$

en prenant la dérivée par rapport à y , il vient

$$(1) \quad p_{21} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} t + \frac{\partial f}{\partial s} p_{12} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{03} = 0.$$

Comme il ne peut y avoir deux relations distinctes entre $x, y, z, p, q, s, t, p_{12}, p_{21}, p_{03}$, puisque les valeurs initiales des variables $x, y, z, p, q, s, t, p_{12}, p_{03}$ doivent rester arbitraires, il s'ensuit que la relation (1) ne doit renfermer ni z ni p et être identique à la relation cherchée, ne renfermant que les quantités $x, y, q, s, t, p_{12}, p_{21}, p_{03}$. Autrement l'élimination de p_{21} entre ces deux relations conduirait à une équation de condition entre $x, y, z, p, q, s, t, p_{12}, p_{03}$, ce qui est impossible. Pour que l'équation (1) ne renferme ni p , ni z , il faut d'abord que l'on ait

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial p} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial p} = 0,$$

c'est-à-dire que f soit de la forme

$$f = \varphi(x, y, z, p, q) + \psi(x, y, q, s, t);$$

en remplaçant f par cette expression, on trouve ensuite que l'on doit avoir

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial z} = 0,$$

et φ est de la forme

$$\varphi = \varphi_1(x, y, z) + \Lambda(x, y)p + \varphi_2(x, y, q).$$

Il faut enfin que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} q + \frac{\partial A}{\partial y} p$ soit indépendant de p et de x , c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0,$$

de sorte que le coefficient de p doit être indépendant de y , et que φ_1 doit être de la forme $B(x)x + C(x, y)$. En définitive, l'équation (E) doit appartenir au type suivant

$$(2) \quad r + X_1 p + X_2 x + F(x, y, q, s, t) = 0,$$

X et X_1 étant deux fonctions quelconques de x et F une fonction de x, y, q, s, t , de forme arbitraire.

Le raisonnement ne s'applique plus aux équations qui ne renferment pas la dérivée seconde r . Étant donnée une équation de cette espèce, supposons d'abord qu'elle dépende de p , on peut alors l'écrire

$$(3) \quad p + f(x, y, x, q, s, t) = 0$$

et, en différentiant par rapport à x et par rapport à y , il vient

$$(4) \quad r + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} p + \frac{\partial f}{\partial q} s + \frac{\partial f}{\partial s} p_{21} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{12} = 0,$$

$$(5) \quad s + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} q + \frac{\partial f}{\partial q} t + \frac{\partial f}{\partial s} p_{12} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{21} = 0.$$

Ces deux équations, jointes à la relation

$$(6) \quad \Phi(x, y, q, s, t, p_{21}, p_{12}, p_{22}) = 0$$

que nous supposons exister, forment un système de trois équations renfermant les dérivées partielles du troisième ordre. Ces trois équations doivent se réduire à deux, puisque deux des quatre dérivées du troisième ordre peuvent toujours être prises arbitrairement. Comme r ne figure que dans la première relation (4), cela ne peut arriver que si les équations (5) et (6) ne diffèrent pas l'une de l'autre, ce qui exige que l'équation (5) ne renferme pas x . On en déduit, comme tout à l'heure, que l'équation (3) doit être de la forme

$$(7) \quad p + X_2 x + F(x, y, q, s, t) = 0,$$

X_2 étant une fonction de x seulement.

Enfin, si une équation du second ordre ne renferme ni r , ni p , en éliminant x entre cette équation et sa dérivée par rapport à y , on obtient bien une relation entre $x, y, q, s, t, p_{21}, p_{12}, p_{22}$. Si l'équation ne renferme aucune des quantités x, p, r , elle est de la forme $f(x, y, q, s, t) = 0$ et la dérivée q satisfait à une équation du premier ordre.

$$f\left(x, y, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}\right) = 0.$$

En résumé, toute équation du second ordre, telle qu'en prenant pour nouvelle inconnue la dérivée $\frac{\partial x}{\partial y}$ on soit conduit à une nouvelle équation du second ordre, peut être ramenée à la forme

$$(8) \quad Xr + X_1p + X_2x + F(x, y, q, s, t) = 0,$$

X, X_1, X_2 désignant trois fonctions quelconques de x ⁽¹⁾.

En d'autres termes, les variables x, p, r ne doivent figurer dans cette équation que dans une combinaison linéaire où les rapports des coefficients ne dépendent que de la variable x . Toutes les équations qui ne renferment qu'une des trois lettres r, p, x , satisfont évidemment à cette condition, quelle que soit la façon dont y entrent les autres lettres x, y, q, s, t . On verrait de même que toute équation du second ordre, telle que la transformation $v = \frac{\partial x}{\partial x}$ conduise à une nouvelle équation du second ordre, peut être ramenée à la forme

$$Yt + Y_1q + Y_2x + F(x, y, p, s, r) = 0,$$

Y, Y_1, Y_2 désignant trois fonctions quelconques de y .

188. Étant donnée une équation quelconque de la forme (8), il vient, en différentiant par rapport à y et remplaçant $\frac{\partial x}{\partial y}$ par u , s par $\frac{\partial u}{\partial x}$, t par $\frac{\partial u}{\partial y}$,

$$(9) \quad X \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + X_2 u + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

c'est une équation linéaire du second ordre à laquelle satisfait la fonction u . A toute intégrale de l'équation (8) correspond évidemment

(1) La proposition s'étend aisément aux équations d'ordre quelconque.

une seule intégrale de l'équation (9). Inversement, soit u une intégrale de l'équation (9) ; proposons-nous d'examiner s'il lui correspond une intégrale de l'équation (8). Une telle intégrale devant satisfaire à la relation

$$\frac{\partial x}{\partial y} = u$$

est nécessairement de la forme

$$(10) \quad x = \int_{y_0}^y u dy + \Phi(x),$$

$\Phi(x)$ désignant une fonction de x , et y_0 une constante que l'on choisira de telle façon que u soit holomorphe dans le voisinage. Si on remplace x par l'expression (10) dans le premier membre de l'équation (8), le résultat de la substitution est indépendant de y , puisque la dérivée de ce premier membre par rapport à y est identiquement nulle, d'après la façon même dont on a obtenu l'équation en u . Pour que ce résultat soit identiquement nul, il suffira donc qu'il soit nul quand on y remplace y par y_0 , c'est-à-dire que l'on ait

$$(11) \quad X \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + X_1 \frac{d\Phi}{dx} + X_2 \Phi + F \left[x, y_0, u_0, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0, \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \right] = 0,$$

$u_0, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0, \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0$ désignant les fonctions de x auxquelles se réduisent respectivement $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ pour $y = y_0$. En définitive, si $u(x, y)$ est une intégrale de l'équation (9), la formule

$$x = \int_{y_0}^y u dy + \Phi(x),$$

représente une intégrale de l'équation (8), pourvu que $\Phi(x)$ soit une intégrale de l'équation (11).

Si X n'est pas nul, à toute intégrale de l'équation en u correspondent une infinité d'intégrales de l'équation en x , dépendant de deux constantes arbitraires, qui s'obtiennent par une quadrature et par l'intégration d'une équation différentielle linéaire du second ordre, où le second membre seul est variable avec u . Si X est nul et X_1 différent de zéro, à toute intégrale de l'équation en u correspondent une infinité d'inté-

grales de l'équation en s , dépendant d'une constante arbitraire, qui s'obtiennent par des quadratures. Si X et X_1 sont nuls et X_2 différent de zéro, les intégrales des deux équations (8) et (9) se correspondent une à une ; à toute intégrale de l'équation en u correspond une seule intégrale de l'équation proposée qui s'obtient sans aucune quadrature, car cette équation nous donne

$$s = - \frac{F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)}{X_2}.$$

Enfin, si l'équation (8) ne renfermait ni r , ni p , ni s , la dérivée $u = \frac{\partial z}{\partial y}$ vérifierait une équation du premier ordre et à toute intégrale de cette équation en u correspondraient une infinité d'intégrales de l'équation en s , représentées par la formule (10), où $\Phi(x)$ est une fonction arbitraire de x .

189. Un grand nombre de transformations connues se ramènent à la précédente. Prenons, par exemple, une équation de la forme

$$r + f(s, t) = 0;$$

en prenant pour nouvelle inconnue $u = \frac{\partial z}{\partial y}$, la méthode conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

où on suppose s et t remplacés par $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. Cette équation peut elle-même se ramener à une équation linéaire par la transformation de Legendre. L'ensemble de ces deux transformations revient à prendre pour nouvelles variables s , t et $v = q - sx - ty$, ce qui ramène l'intégration de l'équation proposée à celle de l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

c'est précisément la méthode employée par Legendre (1).

Étant donnée une équation linéaire

$$(12) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

(1) *Histoire de l'Académie des Sciences*; 1787.

pour pouvoir appliquer l'une des transformations précédentes, il suffira de faire disparaître l'un des trois coefficients a , b , c , en changeant d'abord x en $\lambda(x, y)x$, la fonction $\lambda(x, y)$ étant choisie convenablement. Par exemple, en remplaçant x par $x_1 e^{\int \lambda dy}$ et prenant pour nouvelle inconnue $\frac{\partial x_1}{\partial y} e^{\int \lambda dy}$, on retrouve précisément une des transformations de Laplace. Pour pouvoir faire disparaître le terme en x de l'équation (12), il suffit de connaître une intégrale particulière x_1 . En effet, si on pose d'abord $x = x_1 Z$, la nouvelle équation en Z , devant admettre la solution $Z = 1$, est de la forme

$$(13) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + A \frac{\partial Z}{\partial x} + B \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$

et on peut prendre pour nouvelle inconnue $\frac{\partial Z}{\partial x}$ ou $\frac{\partial Z}{\partial y}$.

Si, par exemple, on prend pour nouvelle inconnue $\frac{\partial Z}{\partial y}$, on sera conduit à une nouvelle équation linéaire de même forme que l'équation (12), pourvu que A ne soit pas nul. Pour l'obtenir facilement, il suffit d'éliminer $\frac{\partial Z}{\partial x}$ entre la relation (13) et sa dérivée par rapport à y . Mais on peut aussi se dispenser de former l'équation (13); on a, en effet,

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{x_1 \frac{\partial x}{\partial y} - x \frac{\partial x_1}{\partial y}}{x_1^2}$$

et, comme on peut toujours multiplier la fonction inconnue par une fonction déterminée de x et de y , on en conclut que le produit

$$x_1^2 \frac{\partial Z}{\partial y} = x_1 \frac{\partial x}{\partial y} - x \frac{\partial x_1}{\partial y}$$

satisfait aussi à une équation linéaire du second ordre. Par conséquent, si x_1 est une intégrale particulière de l'équation (12), l'expression

$$u = x_1 \frac{\partial x}{\partial y} - x \frac{\partial x_1}{\partial y},$$

où x est l'intégrale générale de l'équation (12), représente l'intégrale

générale d'une équation linéaire de même forme ⁽¹⁾

$$(14) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 u = 0;$$

à toute intégrale de l'équation en u correspondent une infinité d'intégrales de l'équation en x , dépendant d'une constante arbitraire, qui s'obtiendraient par une quadrature. On serait conduit à une autre équation du second ordre en prenant pour nouvelle inconnue

$$v = x_1 \frac{\partial x}{\partial x} - x \frac{\partial x_1}{\partial x}.$$

Si l'on connaît plusieurs intégrales particulières x_1, x_2, \dots, x_r de l'équation (12), on peut appliquer plusieurs fois de suite des transformations analogues, et les combiner avec des transformations de Laplace. En partant d'une équation linéaire telle que (12), on peut donc former une infinité d'équations linéaires de même forme dont l'intégrale générale a pour expression

$$0 = Ax + B_1 \frac{\partial x}{\partial x} + \dots + B_m \frac{\partial^m x}{\partial x^m} + C_1 \frac{\partial x}{\partial y} + \dots + C_n \frac{\partial^n x}{\partial y^n},$$

$A, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_n$ étant des fonctions déterminées de x et de y , et x l'intégrale générale de l'équation (12). Une étude très complète de ces transformations a été faite par M. Darboux ⁽²⁾.

La transformation par laquelle on ramène l'équation de Liouville $s = e^{4z}$ à l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = ku \frac{\partial u}{\partial x}$, ainsi que la transformation de Laplace, se rattachent au cas où les intégrales des deux équations se correspondent une à une. Ainsi, dans le cas de l'équation de Liouville, on a les deux relations

$$\frac{\partial x}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = e^{4z},$$

qui donnent u en fonction de x et inversement.

190. La transformation précédente conduit, dans certains cas, d'une équation linéaire à une équation non linéaire ou inversement. Reprenons

⁽¹⁾ LÉVY (Lucien), « Sur quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre » (*Journal de l'École polytechnique*, LVI^e cahier, 1886).

⁽²⁾ *Théorie générale des Surfaces*, t. II, chap. VIII.

une équation linéaire :

$$(15) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial s}{\partial x} + b \frac{\partial s}{\partial y} + cs = 0,$$

et prenons pour nouvelle inconnue v le logarithme de s ; il vient, en divisant par e^v ,

$$(16) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c = 0.$$

La nouvelle équation ne contenant ni v , ni $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, ni $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, on peut prendre pour inconnue une des dérivées $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Posons, par exemple, $v_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$; on tire de l'équation (16)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial v_1}{\partial y} + av_1 + c}{v_1 + b},$$

et l'élimination de v conduit à une équation du second ordre en v_1 ; cette équation prend une forme plus simple si on pose encore $v_1 + b = e^{-u}$, u étant la nouvelle inconnue, et il reste, toutes réductions faites :

$$(17) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (ke^u) - \frac{\partial(e^{-u})}{\partial y} + k - k = 0,$$

k et k étant les invariants de l'équation (15)

$$k = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$$

La correspondance entre les intégrales des deux équations (15) et (17) est résumée par les formules

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log s}{\partial x} = e^{-u} - b, \\ \frac{\partial \log s}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + ke^u - a; \end{cases}$$

à toute intégrale de l'équation en s correspond une intégrale et une seule de l'équation en u , tandis qu'à une intégrale de l'équation en u

correspondent une infinité d'intégrales de l'équation en x , qui s'obtiennent par une quadrature.

On peut ramener à la forme (17) toutes les équations

$$(19) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (Ae^u) - \frac{\partial}{\partial y} (Be^{-u}) + C = 0,$$

A, B, C étant trois fonctions quelconques des variables x, y . Si, en effet, on remplace dans cette dernière équation u par $u + \log B$, elle devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (ABe^u) - \frac{\partial}{\partial y} (e^{-u}) + \frac{\partial^2 \log B}{\partial x \partial y} + C = 0;$$

c'est une équation de la forme (17) où on aurait

$$k = AB, \quad k - h = \frac{\partial^2 \log B}{\partial x \partial y} + C.$$

L'intégration de l'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (Ae^u) - \frac{\partial}{\partial y} (Be^{-u}) + C = 0,$$

où A, B, C sont trois fonctions quelconques de x et de y , se ramène donc à l'intégration d'une équation linéaire dont les invariants h et k ont pour valeurs

$$h = AB - C - \frac{\partial^2 \log B}{\partial x \partial y}, \quad k = AB.$$

Les caractéristiques des deux équations (15) et (17) se correspondent et chacun des systèmes admet une combinaison intégrable. Si la méthode de M. Darboux réussit pour l'une des deux équations, elle s'applique aussi à l'autre. Supposons d'abord qu'il existe deux combinaisons intégrables pour l'une des familles de caractéristiques de l'équation en u

$$dx = 0, \quad d\varphi \left\{ x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\} = 0;$$

d'après les formules (18), u s'exprime au moyen de $x, y, x, \frac{\partial x}{\partial x}$, et on déduira de $\varphi(x, y, u, \dots)$ un invariant d'ordre $n + 1$ pour les caractéristiques du même système de l'équation en x . Réciproquement, si la

méthode de M. Darboux s'applique à l'équation en x , c'est que la suite de Laplace, relative à cette équation, est terminée d'un côté, et l'intégrale générale de cette équation contient une fonction arbitraire et ses dérivées débarrassées de tout signe de quadrature, tandis que l'autre fonction arbitraire figure en général sous de pareils signes. Il en est de même, d'après les formules (18), pour l'intégrale générale de l'équation en y , ce qui suffit à prouver que cette équation peut être intégrée par la méthode de M. Darboux (n° 181).

On voit de même que, si la suite de Laplace relative à l'équation linéaire est terminée dans les deux sens, la méthode de M. Darboux s'applique aux deux familles de caractéristiques de l'équation en x , et réciproquement. Dans ce cas, l'intégrale générale de l'équation (17) est de la forme

$$u = F(x, y, X, X', \dots, X^{(n)}; Y, Y', \dots, Y^{(n)}),$$

X étant une fonction arbitraire de x , et Y une fonction arbitraire de y (n° 183).

REMARQUE. — On peut ramener facilement l'équation (19) à la forme canonique indiquée par M. Moutard. Si on change d'abord u en $u + f(x, y)$, on fera disparaître le terme $C(x, y)$ en prenant pour $f(x, y)$ une solution de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C(x, y) = 0$. En changeant ensuite A en $-A$ et B en $-B$, on pourra écrire l'équation

$$(20) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (Ae^u) + \frac{\partial}{\partial y} (Be^{-u}) = 0.$$

Les invariants de l'équation linéaire correspondante ont pour valeurs :

$$k = AB - \frac{\partial^2 \log B}{\partial x \partial y}, \quad k = AB;$$

l'équation linéaire

$$(21) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \log B}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - ABz = 0$$

a précisément ces invariants, et la correspondance entre les intégrales des deux équations est définie par les formules

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = Ae^u + \frac{\partial \log z}{\partial y}, \\ Be^{-u} = -\frac{\partial \log z}{\partial x}. \end{cases}$$

On pourrait aussi ramener l'équation (20) à l'équation linéaire

$$(23) \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \log A}{\partial x} \frac{\partial x_1}{\partial y} - A B x_1 = 0;$$

on passe du reste de l'équation (21) à l'équation (23) par les formules

$$\frac{\partial x}{\partial x} = -B x_1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = -A x.$$

191. Considérons encore l'équation ⁽¹⁾

$$(24) \quad s^2 - 4\lambda(x, y) pq = 0,$$

où $\lambda(x, y)$ est une fonction quelconque de x, y ; on pourrait prendre pour nouvelle inconnue p ou q , mais, pour arriver à une équation plus simple, nous poserons $p = u^2, q = v^2$, ce qui nous donne

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v \sqrt{\lambda}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = u \sqrt{\lambda}.$$

L'élimination de v conduit à l'équation linéaire

$$(25) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda u = 0,$$

et celle de u à une autre équation linéaire

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \lambda v = 0.$$

Considérons, par exemple, l'équation (25); si $u(x, y)$ est l'intégrale générale de cette équation, l'intégrale générale de l'équation proposée est donnée par une quadrature

$$(26) \quad z = \int u^2 dx + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy.$$

Les invariants de l'équation (25) ont pour valeurs

$$h = \lambda, \quad k = \lambda - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y};$$

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV, p. 36-43.

ceux que l'on en déduit par l'application de la première transformation de Laplace, et qui sont les mêmes que ceux de l'équation en v , ont pour valeurs

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y} = k, \quad k_1 = k;$$

on voit qu'ils sont identiques à ceux de l'équation (23) pris dans l'ordre inverse. La suite de Laplace relative à cette équation linéaire ne peut donc se terminer dans un sens sans se terminer dans l'autre sens, d'après les formules de récurrence qui donnent les invariants des équations de la suite (n° 104). Lorsqu'il en est ainsi, l'équation proposée (24) appartient à la première classe (n° 184). Reprenons, par exemple, l'équation intégrée plus haut

$$s = \frac{2 \sqrt{pq}}{x + y};$$

on a ici $\lambda(x, y) = \frac{1}{(x + y)^2}$, et l'intégrale générale de l'équation (23) est

$$u = X' + \frac{Y - X}{x + y},$$

X et Y étant deux fonctions arbitraires de x et de y respectivement. On en tire

$$v = Y' + \frac{X - Y}{x + y},$$

$$s = \int \left\{ X' + \frac{Y - X}{x + y} \right\}^2 dx + \left\{ Y' + \frac{X - Y}{x + y} \right\}^2 dy,$$

comme on l'a déjà obtenu directement.

192. Il peut arriver, dans certains cas, que la transformation qui consiste à prendre pour nouvelle inconnue une des dérivées partielles du premier ordre de la fonction inconnue primitive réussisse plusieurs fois successivement. Ainsi, dans l'équation de M. Boudon (n° 172),

$$s - qs = q^2 f\left(y, \frac{t}{q}\right),$$

qui ne contient ni p , ni r , on peut poser $q = e^v$, v étant la nouvelle inconnue, ce qui nous donne $s = e^v \frac{\partial v}{\partial x}$, $t = e^v \frac{\partial v}{\partial y}$. L'équation propo-

sée peut s'écrire, en divisant par σ' ,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = x + \sigma' f\left(y, \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

et en différentiant par rapport à y on a une équation du second ordre en v qui est de la forme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \sigma' \varphi\left(y, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),$$

étudiée également au n° 167. On peut appliquer la même transformation à la nouvelle équation en posant $\frac{\partial v}{\partial y} = u$; l'équation s'écrit en effet

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma' \varphi\left(y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

et, en éliminant σ' entre cette équation et sa dérivée par rapport à y , il reste une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \left(y, u, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant de deux constantes arbitraires (t. I, n° 92).

198. En combinant la transformation qui vient d'être étudiée avec une transformation de contact, on est conduit à des transformations d'apparence beaucoup plus générale. Pour en donner un exemple, considérons une équation linéaire quelconque

$$(27) \quad Ax + By + Cz + Dp + Eq + Fz = 0,$$

où A, B, C, \dots, F sont des fonctions de x, y , et proposons-nous de trouver tous les systèmes de trois fonctions α, β, γ de x, y , telles qu'en prenant une nouvelle inconnue

$$(28) \quad u = \alpha p + \beta q + \gamma z,$$

u vérifie une équation du second ordre. On peut d'abord, en changeant x en λx , supposer qu'on a ramené u à la forme

$$(28)' \quad u = \alpha p + \beta q;$$

si on choisit ensuite deux nouvelles variables indépendantes η , ξ , telles que ξ vérifie la relation

$$\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0,$$

l'équation (27) se change en une autre équation linéaire

$$(27)' \quad A_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \dots = 0,$$

et l'on a (L, n° 51)

$$A_1 = A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2,$$

tandis que la formule (28)' prend la forme

$$u = K(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

On peut évidemment négliger le facteur $K(\xi, \eta)$, et tout revient à chercher dans quel cas la transformation $v = \frac{\partial z}{\partial \eta}$, appliquée à l'équation

(27)', conduit à une nouvelle équation du second ordre. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit (n° 187) que les rapports des coefficients de $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, z soient indépendants de η . Supposons d'abord que A_1 ne soit

pas nul; en cherchant les intégrales de l'équation (27)', qui sont indépendantes de η , on est conduit à une équation linéaire du second ordre dont les coefficients sont indépendants de η . Il existe donc deux intégrales distinctes de l'équation (27)' pour lesquelles on a $u = 0$; et inversement,

cela ne peut arriver que si les rapports des coefficients de $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, z sont

indépendants de η . En revenant à l'équation (27), on en conclut que, lorsque $A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2$ n'est pas nul, pour que la fonction $u = \alpha p + \beta q + \gamma z$ vérifie une équation du second ordre, il faut et il suffit que l'équation $\alpha p + \beta q + \gamma z = 0$ admette deux intégrales distinctes de l'équation (27). La forme générale de u est donc

$$u = \lambda(x, y) \begin{vmatrix} p & q & z \\ p_1 & q_1 & z_1 \\ p_2 & q_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

$\lambda(x, y)$ étant une fonction quelconque de x, y , et z_1, z_2 deux inté-

grales distinctes de (27). Les fonctions α, β, γ étant données, on peut reconnaître sans aucune intégration si u est de cette forme. Pour qu'il en soit ainsi, il faut en effet que les deux équations (27) et $u = 0$ admettent une intégrale commune $C_1 x_1 + C_2 x_2$, dépendant de deux constantes arbitraires, c'est-à-dire qu'elles forment un système complètement intégrable.

Si l'on a $A_1 = A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2 = 0$, il faudra que, dans l'équation (27)', le rapport des coefficients de $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ et de x soient indépendants de η . Si

le coefficient de $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ n'est pas nul, l'équation (27)' admet une intégrale pour laquelle on aura $u = 0$; l'équation (27) doit donc admettre aussi une intégrale pour laquelle on aura $xp + \beta q + \gamma x = 0$, et les rapports des coefficients seront définis par les deux relations

$$A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2 = 0, \quad xp_1 + \beta q_1 + \gamma x_1 = 0,$$

x_1 étant une intégrale quelconque de l'équation linéaire.

On a une troisième espèce de transformations en supposant que les coefficients de $\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}$ et de $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ sont nuls dans l'équation (27)'; on retrouve ainsi, il est facile de le voir, les deux transformations de Laplace, généralisées par Legendre (n° 113).

REMARQUE I. — Il peut arriver que, dans certains cas, la transformation (28) ramène à l'équation (27) elle-même; de toute intégrale de l'équation linéaire on peut alors déduire, par l'application répétée de la formule de transformation, une infinité d'autres intégrales. Par exemple, étant donnée une équation

$$s + ap + bq = 0,$$

si on prend pour inconnue $q = u$, l'équation en u est en général différente de l'équation en x ; pour que les invariants des deux équations pris dans le même ordre soient les mêmes, il faut et il suffit que l'équation proposée soit de la forme

$$s + XYp + X_1 q = 0.$$

X, X_1 étant des fonctions de x , et Y une fonction de y . Si x est une intégrale, $\frac{1}{Y} \frac{\partial x}{\partial y}$ est aussi une intégrale. Une équation du second ordre

$$s + ap + bq + cx = 0$$

peut être ramenée à la forme précédente, pourvu que les invariants h et k soient de la forme :

$$h = YF(x), \quad k = Y\Phi(x),$$

et inversement.

REMARQUE II. — Les transformations précédentes des équations linéaires ramènent, dans certains cas, l'intégration d'une équation linéaire à celle d'une équation plus simple, ou possédant des propriétés toutes différentes de celles de la première. L'exemple suivant offre un grand intérêt dans la théorie des surfaces. Étant donnée une équation de la forme

$$r - \lambda(x, y) t = 0,$$

si on la rapporte à ses caractéristiques, c'est-à-dire si on prend pour variables indépendantes deux fonctions $p(x, y)$, $p_1(x, y)$, telles que l'on ait

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sqrt{\lambda} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = -\sqrt{\lambda} \frac{\partial p_1}{\partial y},$$

la nouvelle équation a, en général, ses invariants h et k inégaux. Mais si, auparavant, on a pris comme nouvelle fonction inconnue une des dérivées partielles p ou q , puis qu'on rapporte la nouvelle équation à ses caractéristiques, on est conduit à une équation à invariants égaux. Le calcul se fait très simplement de la manière suivante ; de l'équation $r = \lambda$, on tire

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lambda \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

et, si on prend comme variables indépendantes p et p_1 , ces relations deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial p_1} \frac{\partial p}{\partial x} &= \lambda \left(\frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial p_1} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x}; \end{aligned}$$

en remplaçant $\frac{\partial p}{\partial x}$ par $\sqrt{\lambda} \frac{\partial p}{\partial y}$ et $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ par $-\sqrt{\lambda} \frac{\partial p_1}{\partial y}$, on en tire

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial p} &= \sqrt{\lambda} \frac{\partial q}{\partial p}, \\ \frac{\partial p}{\partial p_1} &= -\sqrt{\lambda} \frac{\partial q}{\partial p_1}, \end{aligned}$$

et l'élimination de l'une des fonctions p et q conduit à une équation à invariants égaux pour déterminer l'autre fonction inconnue.

Toute équation linéaire de la forme

$$r - t + 2Bs = 0,$$

dont les caractéristiques forment sur le plan des x, y un réseau orthogonal, se ramène à la forme $r = \lambda t$, en prenant pour nouvelles variables $x + iy$ et $x - iy$, et par suite à une équation de Laplace à invariants égaux.

REMARQUE III. — Il peut aussi arriver que l'on puisse combiner quelques-unes des transformations précédentes. Ainsi, étant donnée une équation linéaire

$$s + ap + bq = 0,$$

si l'on prend comme fonction inconnue le rapport des dérivées $u = \frac{q}{p}$, on en déduit pour u une seule équation du second ordre. La valeur de u peut, en effet, s'écrire, en tenant compte de l'équation elle-même,

$$u = -\frac{1}{b} \left\{ a + \frac{\partial \log p}{\partial y} \right\};$$

or, on a vu (n° 189) que, si on prend pour inconnue p , on a encore une équation linéaire de la forme de Laplace. Si, dans cette seconde équation, on prend ensuite comme inconnue $\frac{\partial \log p}{\partial y}$ (n° 190), on trouve une troisième équation du second ordre non linéaire. La suite de ces deux transformations est évidemment équivalente, en négligeant une transformation ponctuelle, à celle qui consiste à prendre $\frac{q}{p}$ pour nouvelle inconnue.

On peut arriver plus simplement à l'équation en u ; de l'équation proposée et de la relation $q = pu$, on tire en effet

$$d \log p = - \left(\frac{\partial \log u}{\partial x} + \frac{a + bu}{u} \right) dx - (a + bu) dy,$$

et la condition d'intégrabilité donne une équation du second ordre en u

$$\frac{\partial^2 \log u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a + bu}{u} \right) - \frac{\partial (a + bu)}{\partial x} = 0.$$

A toute intégrale de l'équation en x correspond une seule intégrale

de l'équation en u , tandis qu'à une intégrale de l'équation en u correspondent une infinité d'intégrales de l'équation en x , dépendant de deux constantes arbitraires; si x_1 est l'une d'elles, toutes les autres sont de la forme $Ax_1 + B$, A et B étant les deux constantes arbitraires.

194. L'étude des systèmes formés de deux équations simultanées du premier ordre à deux fonctions inconnues conduit aussi, dans certains cas, quand on élimine l'une des fonctions inconnues, à deux équations du second ordre qui s'intègrent en même temps. Soient

$$(29) \quad \begin{cases} F_1\left(x, y, z, u, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \\ F_2\left(x, y, z, u, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \end{cases}$$

deux équations simultanées du premier ordre à deux fonctions inconnues z et u . Pour éliminer l'inconnue z , imaginons les deux équations (29) résolues par rapport aux dérivées partielles de z ,

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = f_1\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} = f_2\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right); \end{cases}$$

la condition d'intégrabilité $\frac{df_1}{dy} = \frac{df_2}{dx}$, où

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dy} &= \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{df_2}{dx} &= \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial z} f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

nous conduit à une relation de la forme

$$(31) \quad \Phi\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0,$$

d'où on tirera z et, en écrivant que cette valeur de z vérifie les deux équations proposées, on a deux équations simultanées du troisième ordre auxquelles doit satisfaire la fonction u ; à toute solution de ce sys-

tème correspond une seule valeur de x qui est donnée par la formule (31).

On s'est borné, dans cet aperçu sommaire, aux circonstances les plus générales ; il nous faut maintenant examiner les cas particuliers qui peuvent conduire à une équation du second ordre. Nous supposons d'abord que les équations (29) peuvent être résolues par rapport aux dérivées partielles de x ; on peut toujours écrire la condition d'intégrabilité (31). Si cette condition renferme l'inconnue x et quelques-unes des dérivées du second ordre de u , nous retombons sur le cas qui vient d'être examiné. Si la fonction Φ ne renferme pas x , mais contient quelques-unes des dérivées du second ordre de u , on voit que la fonction inconnue u doit satisfaire à une seule équation du second ordre, et qu'à toute intégrale de cette équation correspondent une infinité de fonctions x , dépendant d'une constante arbitraire. Ce sont les deux seuls cas qui puissent se présenter lorsque la condition d'intégrabilité renferme quelques-unes des dérivées du second ordre de u ⁽¹⁾.

REMARQUE. — On peut former la condition d'intégrabilité (31) sans avoir à résoudre les équations (29) par rapport à $\frac{\partial x}{\partial x}$ et $\frac{\partial x}{\partial y}$. Si, en effet, on différentie ces relations par rapport à x et à y et qu'on élimine les trois dérivées du second ordre de x entre les quatre équations obtenues,

(1) Pour qu'aucune dérivée du second ordre de u ne figure dans la condition d'intégrabilité (31), il faut et il suffit que le système (30) soit de la forme

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y, z, u) \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x, y, z, u), \\ \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y, z, u) \frac{\partial u}{\partial y} + \psi(x, y, z, u); \end{cases}$$

si la condition d'intégrabilité renferme z , en écrivant que la valeur de z ainsi obtenue vérifie les deux équations (30), on a, pour déterminer u , deux équations du second ordre. Si la condition d'intégrabilité ne contient pas z , l'inconnue u doit satisfaire à une équation du premier ordre. Nous laissons de côté le cas exceptionnel et facile à examiner où la condition d'intégrabilité des équations (30) serait vérifiée identiquement.

Pour que les équations (29) puissent être ramenées à la forme (30), il faut que le déterminant ci-dessous, où l'on a mis p, q, p', q' , au lieu de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p} \lambda - \frac{\partial F_1}{\partial q} \mu & \frac{\partial F_1}{\partial p'} \lambda - \frac{\partial F_1}{\partial q'} \mu \\ \frac{\partial F_2}{\partial p} \lambda - \frac{\partial F_2}{\partial q} \mu & \frac{\partial F_2}{\partial p'} \lambda - \frac{\partial F_2}{\partial q'} \mu \end{vmatrix}$$

soit nul identiquement, quels que soient λ et μ . Les systèmes (29), pour lesquels ce déterminant est identiquement nul, forment une classe toute particulière, auxquels on ne peut appliquer les théorèmes généraux de Cauchy.

on aboutit à la relation suivante, en supposant que le déterminant fonctionnel de F_1 et de F_2 par rapport à $\frac{\partial x}{\partial p}$ et $\frac{\partial x}{\partial q}$ n'est pas nul.

$$(32) \quad \left(\frac{dF_1}{dx}\right) \frac{\partial F_2}{\partial p} + \left(\frac{dF_1}{dy}\right) \frac{\partial F_2}{\partial q} - \left(\frac{dF_2}{dx}\right) \frac{\partial F_1}{\partial p} - \left(\frac{dF_2}{dy}\right) \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0,$$

où on a $p = \frac{\partial x}{\partial p}$, $q = \frac{\partial x}{\partial q}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} p + \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \\ \left(\frac{d}{dy}\right) &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} q + \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

L'élimination de p et q entre les trois équations (29) et (32) conduira à la condition d'intégrabilité (31) ; si on peut éliminer à la fois les trois quantités p , q , x , on trouvera une équation du second ordre pour déterminer u .

Passons au cas où les deux équations (29) ne peuvent pas être résolues par rapport aux dérivées partielles de x . On en déduit alors, par l'élimination de ces dérivées, une nouvelle équation de la forme

$$(33) \quad \Phi \left(x, y, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0;$$

si cette relation ne contient pas x , l'intégration du système (29) est ramenée ainsi à l'intégration de deux équations du premier ordre successivement et, en particulier, la fonction inconnue u satisfait à une équation du premier ordre. Si la relation (33) contient x , on peut l'écrire

$$x = \varphi \left(u, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

et le système (29) peut être remplacé par un système de la forme suivante

$$(34) \quad \begin{cases} F_1 \left(u, y, x, u, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \\ x = \varphi \left(u, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right); \end{cases}$$

l'élimination de z conduit immédiatement à une équation du second ordre en u , à moins que φ ne dépende pas des dérivées de u , et à toute intégrale de l'équation en u correspond, d'après la seconde des formules (34), une fonction z bien déterminée de x, y .

On voit donc que, dans certains cas que nous venons de préciser, l'élimination de l'une des fonctions inconnues entre les deux équations (29) conduit à une équation du second ordre pour l'autre inconnue. Il peut arriver que le fait ait lieu, quelle que soit celle des deux inconnues que l'on élimine, et l'on a ainsi deux équations du second ordre liées de telle façon que l'intégration de l'une entraîne celle de l'autre. Plusieurs cas sont encore à distinguer : 1° il peut se faire que les intégrales des deux équations se correspondent une à une ; 2° il peut se faire qu'à une intégrale de l'une des équations, la première, par exemple, corresponde une seule intégrale de la seconde, tandis qu'à une intégrale de la seconde équation correspondent une infinité d'intégrales de la première, dépendant d'une constante arbitraire ; 3° enfin, la correspondance peut être telle qu'à toute intégrale de l'une des deux équations correspondent une infinité d'intégrales de l'autre équation, dépendant d'une constante arbitraire. Nous donnerons des exemples de ces trois cas.

195. Lorsque les intégrales des deux équations du second ordre se correspondent une à une, les équations (29) peuvent être mises sous la forme

$$(35) \quad \begin{cases} z = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ u = \varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right); \end{cases}$$

quelles que soient les fonctions f et φ , il est clair que l'élimination de z conduit à une équation du second ordre en u et l'élimination de u à une équation du second ordre en z , à moins que l'une de ces fonctions ne renferme aucune dérivée, et que les intégrales des deux équations se correspondent une à une. Par exemple, supposons que les fonctions f et φ soient linéaires

$$\begin{aligned} z &= au + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y}, \\ u &= a_1 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_1 \frac{\partial z}{\partial y}, \end{aligned}$$

a, b, c, a_1, b_1, c_1 , étant des fonctions de x, y ; en éliminant successivement les deux inconnues, on est conduit à deux équations linéaires du

second ordre, et la transformation par laquelle on passe de l'une à l'autre est identique, en réalité, à l'une des transformations de Laplace, sous sa forme la plus générale (n° 144). Pour avoir une transformation de Laplace proprement dite, il faudrait que les formules précédentes se réduisent à l'une des formes ci-dessous

$$\begin{aligned} x &= au + b \frac{\partial u}{\partial x}, & u &= a_1 x + \frac{\partial z}{\partial y}, \\ x &= au + b \frac{\partial u}{\partial y}, & u &= a_1 x + \frac{\partial z}{\partial x}. \end{aligned}$$

De même, en partant du système

$$x = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = \frac{1}{k} \log \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right),$$

où \log désigne le logarithme népérien, si on élimine x on trouve l'équation de Liouville, et si on élimine u , l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = kx \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Prenons un cas un peu plus général ; si les formules (35) sont de la forme

$$(36) \quad \begin{cases} x = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ u = \varphi\left(x, y, x, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \end{cases}$$

l'élimination de u conduit à une équation du second ordre

$$x = f\left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} p + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s\right),$$

qui, résolue par rapport à s , peut s'écrire

$$(37) \quad Ms + Np + P = 0,$$

M , N , P , étant des fonctions de x , y , x , q . Inversement, étant donnée une équation de la forme (37), cherchons s'il est possible de la rattacher à un système tel que (36). On voit d'abord, d'après la façon même dont on a obtenu l'équation (37), que la fonction $\varphi(x, y, x, q)$ doit satis-

faire à la condition

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{M} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{N};$$

supposons qu'on ait obtenu une fonction φ satisfaisant à cette condition, ce qui revient à intégrer l'équation différentielle du premier ordre $Mdq + Ndz = 0$, et soit μ la valeur commune des rapports précédents, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu M, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mu N.$$

Si on pose $u = \varphi(x, y, z, q)$, il vient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s = \mu (Ms + Np) + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

et l'équation (27) résulte de l'élimination de u entre les deux équations

$$(38) \quad \begin{cases} u = \varphi(x, y, z, q), \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu P = \psi(x, y, z, q); \end{cases}$$

si on substitue dans la seconde la valeur de q tirée de la première, on a une nouvelle relation

$$F\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

Lorsque z ne figure pas dans cette équation, on a une équation du premier ordre pour déterminer u , et l'équation proposée est intégrable par la méthode de Monge. Ce cas particulier écarté, on voit que le système (38) est équivalent à un système analogue au système (36); l'élimination de u conduit à l'équation proposée, tandis que l'élimination de z donne une équation du second ordre en u

$$M_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + N_1 \frac{\partial u}{\partial y} + P_1 = 0,$$

où M_1, N_1, P_1 sont des fonctions de $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}$ ⁽¹⁾.

(1) La transformation précédente a été indiquée par Imschenetzky (p. 250 de la traduction de Houël; *Archives de Grœnerl*, t. LIV).

Cet exemple a été généralisé comme il suit par M. Gomes Teixeira⁽¹⁾. Prenons le système suivant

$$(39) \quad \begin{cases} z = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ u = \varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right); \end{cases}$$

l'élimination de z conduit à une équation du second ordre en u , linéaire par rapport aux dérivées du second ordre

$$(40) \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C = 0,$$

A, B, C étant des fonctions de $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, tandis qu'en éliminant u on parvient à une équation en z

$$z = f\left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s, \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q + \frac{\partial \varphi}{\partial q} t\right),$$

qui, résolue par rapport à z , peut s'écrire

$$(41) \quad Ms + Np + \psi(x, y, z, q, t) = 0,$$

M et N étant des fonctions de x, y, z, q . Inversement, étant donnée une équation de la forme (41), pour qu'on puisse la rattacher à un système tel que (39), il faut d'abord que la fonction $\varphi(x, y, z, q)$ vérifie la relation $N \frac{\partial \varphi}{\partial q} - M \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, ou que l'on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \mu M, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mu N.$$

Soit $\varphi(x, y, z, q)$ une fonction satisfaisant à cette condition. Si on prend pour nouvelle inconnue $u = \varphi(x, y, z, q)$, il vient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s = \mu (Ms + Np) + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

⁽¹⁾ *Comptes Rendus*, t. XCIII, p. 702; 7 novembre 1931.

et l'équation (41) résulte de l'élimination de u entre les relations

$$u = \varphi(x, y, z, q),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - p\psi(x, y, z, q, t);$$

mais de la première on tire

$$q = \theta(x, y, z, u),$$

$$t = \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \theta + \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y},$$

et, en remplaçant q et t par ces valeurs dans la seconde, elle devient

$$F\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Si cette dernière relation contient z , on en tirera

$$z = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

et on aura bien un système de la forme (39), de sorte que u vérifiera une équation telle que (40). Si F ne contient pas z , on voit que u vérifie une équation du premier ordre, et l'équation proposée admet une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire. On peut énoncer ce résultat comme il suit

Soit l'équation

$$Ms + Np + \psi(x, y, z, q, t) = 0,$$

où M et N sont des fonctions de x, y, z, q ; si on pose

$$u = \varphi(x, y, z, q),$$

où φ désigne une solution de l'équation

$$N \frac{\partial \varphi}{\partial q} - M \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

u satisfait à une équation du second ordre, linéaire par rapport aux dérivées du second ordre, dont l'intégration entraîne celle de la proposée, ou à une équation du premier ordre.

198. Lorsque le système (35) est de la forme générale, c'est-à-dire lorsque f contient les deux dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et φ les deux dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, les équations du second ordre auxquelles conduit l'élimination de l'une des inconnues sont encore d'une forme particulière. D'une façon un peu plus générale, étant donnée une équation du second ordre

$$(42) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

proposons-nous de reconnaître si elle résulte de l'élimination d'une inconnue auxiliaire u entre deux équations de la forme

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \varphi \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right), \\ \Phi \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Il suffit, pour cela, de remarquer que, quand on élimine u , les dérivées du second ordre r, s, t ne figurent dans le résultat que par les deux combinaisons $\frac{\partial \varphi}{\partial p} r + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s$, $\frac{\partial \varphi}{\partial p} s + \frac{\partial \varphi}{\partial q} t$; l'équation proposée (42), quand on y regarde x, y, z, p, q comme des constantes données et r, s, t comme des coordonnées courantes, doit donc représenter un cylindre ayant ses génératrices parallèles à une droite située sur le cône qui a pour équation $s^2 - rt = 0$. Cette condition est suffisante; en effet, si elle est remplie, l'équation proposée peut s'écrire

$$(44) \quad F_1(Mr + Ns, Ms + Nt, x, y, z, p, q) = 0,$$

M et N étant des fonctions de x, y, z, p, q . Déterminons une fonction $\varphi(x, y, z, p, q)$ par la condition

$$N \frac{\partial \varphi}{\partial p} - M \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0,$$

et posons $u = \varphi(x, y, z, p, q)$; on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} p + \mu (Mr + Ns), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} q + \mu (Ms + Nt), \end{aligned}$$

μ étant une fonction de x, y, z, p, q , et l'équation (44) prend la forme

$$\Phi_1 \left(x, y, z, p, q, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

de sorte que l'équation (44) provient bien de l'élimination de u entre les deux relations

$$(45) \quad \begin{cases} u = \varphi(x, y, z, p, q), \\ \Phi_1 \left(x, y, z, p, q, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \end{cases}$$

Il pourra maintenant arriver, dans des cas très étendus, que l'élimination de z conduise aussi à une équation du second ordre en u ; c'est ce qui aura lieu si on peut éliminer p et q entre ces deux relations, ou p, q, z entre ces deux équations et la condition d'intégrabilité établie plus haut. Il en sera ainsi, par exemple, si l'équation proposée ne contient pas z et si on prend, ce qui est possible, la fonction φ indépendante de z .

Une équation linéaire par rapport aux dérivées du second ordre

$$(46) \quad Hr + 2Ks + Lt + M = 0$$

peut être considérée de deux manières différentes comme l'équation d'un cylindre ayant ses génératrices parallèles à une droite située sur le cône $s^2 - rt = 0$. Pour appliquer la recherche précédente, soit λ une racine de l'équation du second degré

$$\lambda^2 - 2K\lambda + HL = 0;$$

l'équation (46) peut s'écrire

$$(46)' \quad Hr + \lambda s + \frac{L}{\lambda} (Hs + \lambda t) + M = 0,$$

et il faudra déterminer la fonction $\varphi(x, y, z, p, q)$ par la condition que l'on ait

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p}}{H} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\lambda} = \mu.$$

La fonction φ ayant été choisie de cette façon, si on pose

$$u = \varphi(x, y, z, p, q),$$

l'équation linéaire (46) résulte de l'élimination de u entre les deux équations

$$u = \varphi(x, y, z, p, q),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} p + \frac{L}{\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} q \right) + \mu M = 0,$$

et on aura à examiner si l'élimination de z conduit aussi à une équation du second ordre en u ⁽¹⁾.

197. Lorsque les équations (29) peuvent être résolues par rapport à aux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, et ne peuvent pas l'être par rapport aux dérivées de z , en négligeant les cas exceptionnels que nous avons laissés de côté plus haut, le système (29) pourra s'écrire sous l'une ou l'autre des formes équivalentes ci-dessous

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, z, u, p, q), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x, y, z, u, p, q); \end{cases}$$

$$(48) \quad \begin{cases} z = \psi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \theta\left(x, y, u, p, q, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0; \end{cases}$$

l'élimination de z conduit toujours à une équation du second ordre en u de la forme considérée tout à l'heure. Si l'équation

$$\frac{df}{dy} = \frac{d\varphi}{dx}$$

ne contient pas u , on aura aussi pour z une équation du second ordre qui sera linéaire en r, s, t . C'est ce qui aura lieu certainement si les fonctions f et φ ne contiennent pas u . A toute intégrale de l'équation en u correspond une seule intégrale de l'équation en z , tandis qu'à une intégrale de l'équation en z correspondent une infinité d'intégrales de l'équation en u , dépendant d'une constante arbitraire.

⁽¹⁾ Le cas particulier où H, K, L, M ne dépendent pas de z , et où on prend aussi la fonction φ indépendante de z , a été considéré par M. R. Liouville (*Comptes Rendus*, t. XCVIII, p. 216, 569, 723; 1884). On trouvera d'autres cas particuliers étudiés dans un mémoire de M. Gomes Teixeira : « Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre » (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, 3^e série, t. III, p. 486; 1882).

A ce cas se rattachent les formules (18), qui établissent le passage de l'équation (15) à l'équation (17) (n° 190). Il en est de même des formules

$$\frac{\partial z}{\partial x} = u^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

qui conduiraient de l'équation (24) à l'équation (23).

Lorsque les équations (29) peuvent être résolues, soit par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, soit par rapport à $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, si l'élimination de chacune des deux inconnues conduit pour l'autre à une équation de second ordre, ces deux équations sont nécessairement linéaires par rapport aux dérivées du second ordre, et à toute intégrale de l'une d'elles correspondent une infinité d'intégrales de l'autre, dépendant d'une constante arbitraire. On obtient des transformations de cette espèce en partant des deux relations arbitraires entre $x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$,

$$\begin{aligned} f\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= 0, \\ \varphi\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= 0, \end{aligned}$$

pourvu que ces relations puissent être résolues, soit par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, soit par rapport à $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Un exemple remarquable et bien connu de cette dernière classe de transformations est fourni par le système

$$(49) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = \sin(x - u), \\ \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x + u). \end{cases}$$

qui se présente dans l'étude des surfaces à courbure constante⁽¹⁾. Quand on élimine u , on est conduit à l'équation

$$(50) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

(1) DARBOUX, *Théorie générale des Surfaces*, t. III, p. 432 et suivantes.

et, quand on élimine x , on est conduit de même à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \sin 2u;$$

de toute solution x de l'équation (30) on peut donc en déduire une infinité d'autres, dépendant d'une constante arbitraire, par l'intégration du système (49), où l'on considère u comme la fonction inconnue.

198. Après ces généralités, nous allons étudier plus spécialement le cas où les formules (29) sont linéaires par rapport aux deux fonctions inconnues x et u et à leurs dérivées. Nous pouvons tout d'abord écarter le cas déjà examiné (n° 195) où ce système ne pourrait être résolu par rapport aux dérivées partielles d'aucune des deux fonctions inconnues, et écrire ces équations

$$(51) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha u + \beta x + \gamma \frac{\partial x}{\partial x} + \delta \frac{\partial x}{\partial y} + \eta, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_1 u + \beta_1 x + \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial x} + \delta_1 \frac{\partial x}{\partial y} + \eta_1, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta_1, \eta_1$ étant des fonctions de x, y . Pour que l'élimination de u conduise à une équation du second ordre en x , il faut et il suffit, comme on le voit facilement, que l'on ait

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial x_1}{\partial x}, \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \alpha_1 = \frac{\partial \eta_1}{\partial y};$$

si on multiplie les deux équations (51) par e^{-u} , on peut les écrire, en posant $w = e^u$,

$$(52) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w}{w} \right) = \beta x + \gamma \frac{\partial x}{\partial x} + \delta \frac{\partial x}{\partial y} + \eta, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w}{w} \right) = \beta_1 x + \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial x} + \delta_1 \frac{\partial x}{\partial y} + \eta_1, \end{cases}$$

les coefficients $\beta, \gamma, \delta, \dots, \eta$, n'ayant plus les mêmes valeurs que plus haut; l'élimination de u conduit toujours à une équation linéaire du second ordre en x ; si on suppose qu'on ait fait disparaître le terme indépendant de x dans cette équation, en changeant x en $x + x_1$, on

aura $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \eta_1}{\partial x}$, ou

$$\eta = \frac{\partial w'}{\partial x}, \quad \eta_1 = \frac{\partial w'}{\partial y}$$

et en remplaçant u par $u + \omega\omega'$ on fera disparaître γ et γ_1 . On peut donc toujours, sans restreindre la généralité, supposer les formules qui définissent la transformation ramenées à la forme

$$(53) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{\omega} \right) = \beta x + \gamma \frac{\partial x}{\partial x} + \delta \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{\omega} \right) = \beta_1 x + \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial x} + \delta_1 \frac{\partial x}{\partial y} \end{cases}$$

Pour que l'élimination de x conduise aussi à une équation du second ordre en u , on a deux cas à distinguer suivant que $\gamma\delta_1 - \delta\gamma_1$ est nul ou ne l'est pas.

Si $\gamma\delta_1 - \delta\gamma_1 = 0$, il en sera toujours ainsi, car on pourra tirer x en fonction de u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et, en remplaçant x par cette valeur dans l'une des deux équations, on sera conduit à une équation du second ordre en u .

Étant donnée une équation linéaire du second ordre en x

$$(54) \quad Ax + Bs + Ct + Dp + Eq + Fx = 0,$$

pour trouver toutes les transformations de cette espèce qui conduisent de cette équation à une autre équation du second ordre en u , il faut l'identifier avec l'équation du second ordre

$$\gamma_1 r + (\delta_1 - \gamma)s - \delta t + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \beta_1 - \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) p + \left(\frac{\partial \delta_1}{\partial x} - \beta - \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) q + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) r = 0,$$

obtenue par l'élimination de u entre les formules (53) ; ce qui donne les relations

$$\frac{\gamma_1}{A} = \frac{\delta_1 - \gamma}{B} = \frac{-\delta}{C} = \frac{\beta_1 + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}}{D} = \frac{\frac{\partial \delta_1}{\partial x} - \beta - \frac{\partial \delta}{\partial y}}{E} = \frac{\frac{\partial \beta_1}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}}{F} = v,$$

auxquelles il faudra joindre la condition $\gamma\delta_1 - \gamma_1\delta = 0$. On tire de là

$$\gamma_1 = Av, \quad \delta_1 = \gamma + Bv, \quad \delta = -Cv$$

et par suite

$$\gamma^2 + B\gamma v + ACv^2 = 0,$$

ce qui nous donne les valeurs de γ , δ , γ_1 , δ_1 ,

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2} v, & \delta &= -Cv, \\ \gamma_1 &= Av, & \delta_1 &= \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2} v, \end{aligned}$$

les signes \pm étant pris en même temps dans γ et δ . Il vient ensuite

$$\beta_1 = Dv + \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial \delta_1}{\partial x} - \frac{\partial \delta}{\partial y} - Ev,$$

et, en portant ces valeurs de β , β_1 , γ , γ_1 , δ , δ_1 dans la dernière relation $\frac{\partial \beta_1}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = Fv$, il reste une équation linéaire pour déterminer l'inconnue auxiliaire v ,

$$(53) \quad \frac{\partial^2 (Av)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (Bv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (Cv)}{\partial y^2} - \frac{\partial (Dv)}{\partial x} - \frac{\partial (Ev)}{\partial y} + Fv = 0;$$

à toute intégrale de cette équation correspondent deux transformations distinctes de l'équation proposée (54).

L'équation (53) est appelée l'équation *adjointe* de l'équation linéaire (54); elle exprime que le produit

$$v (Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + Fx)$$

peut être mis sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

P et Q étant des fonctions de x , y , x , p , q ; on aurait pu l'écrire immédiatement en remarquant que le produit précédent doit être égal à

$$\frac{\partial \left(\beta_1 x + \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial x} + \delta_1 \frac{\partial x}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\beta x + \gamma \frac{\partial x}{\partial x} + \delta \frac{\partial x}{\partial y} \right)}{\partial y}.$$

Dans le cas d'une équation linéaire de la forme de Laplace

$$(56) \quad s + ap + bq + cx = 0,$$

on doit faire $A = C = 0$, $B = 1$, $D = a$, $E = b$, $F = c$, et l'équation adjointe devient

$$(57) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \right) v = 0.$$

Cette équation joue un grand rôle dans l'étude des équations linéaires, et nous renverrons le lecteur au chapitre iv du tome II de l'ouvrage

de M. Darboux. Je rappellerai seulement la propriété suivante qui se vérifie immédiatement; les invariants de l'équation adjointe sont les mêmes que ceux de l'équation proposée, pris dans l'ordre inverse, de sorte que, si la suite de Laplace relative à l'équation (56) se termine d'un côté après un certain nombre d'opérations, la suite de Laplace relative à l'équation adjointe se termine dans l'autre sens après le même nombre d'opérations.

Revenons au problème proposé; dans le cas de l'équation réduite (56), si v_1 est une intégrale particulière de l'équation adjointe, on a pour β , γ , δ , β_1 , γ_1 , δ_1 deux systèmes de valeurs

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\partial v_1}{\partial x} - b v_1, & \beta_1 &= a v_1, & \gamma &= \gamma_1 = \delta = 0, & \delta_1 &= v_1; \\ \beta &= -b v_1, & \beta_1 &= a v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial y}, & \gamma &= -v_1, & \gamma_1 &= \delta = \delta_1 = 0, \end{aligned}$$

et la formule qui donne u a l'une des formes suivantes

$$\begin{aligned} \frac{u}{\omega} &= \int \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - b v_1 \right) x dx + v_1 \left(a x + \frac{\partial x}{\partial y} \right) dy, \\ \frac{u}{\omega} &= \int -v_1 \left(b x + \frac{\partial x}{\partial x} \right) dx + \left(a v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) x dy, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit facilement que u vérifie une équation de même forme que x ⁽¹⁾.

199. Supposons maintenant que, dans les formules (53), $\gamma\delta_1 - \gamma_1\delta$ soit différent de zéro; on peut alors résoudre ces équations par rapport à $\frac{\partial x}{\partial x}$ et $\frac{\partial x}{\partial y}$, et former la condition pour que l'élimination de x conduise à une équation du second ordre en u . Cette condition peut s'obtenir très simplement comme il suit; si, en éliminant x , on obtient une équation en u du second ordre, il est clair que cette équation doit admettre l'intégrale particulière $u = \omega$. A cette valeur de u correspond une valeur de x , dépendant d'une constante arbitraire, qui doit satisfaire aux deux équations

$$\begin{aligned} \beta x + \gamma \frac{\partial x}{\partial x} + \delta \frac{\partial x}{\partial y} &= 0, \\ \beta_1 x + \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial x} + \delta_1 \frac{\partial x}{\partial y} &= 0; \end{aligned}$$

(1) Ces transformations ont été indiquées par M. Darboux (*Théorie générale des Surfaces*, t. II, p. 181), ainsi que des transformations beaucoup plus générales.

il faut donc que la condition d'intégrabilité de ce système soit vérifiée identiquement. Cette condition est suffisante; en effet, soit x , une intégrale de ce système différente de zéro: si on remplace x par xx , les coefficients β et β_1 de x disparaissent dans les nouvelles formules de transformation; on peut donc écrire les formules (53) sous la forme

$$(58) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{\omega} \right) = \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x_1} \right) + \delta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x_1} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{\omega} \right) = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x_1} \right) + \delta_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x_1} \right). \end{cases}$$

où γ , δ , γ_1 , δ_1 n'ont plus la même signification. Il est évident, d'après ces formules, qu'en éliminant x on arrivera à une équation du second ordre en u .

Étant donnée une équation en x telle que (54), pour trouver toutes les transformations de l'espèce précédente que l'on peut appliquer à cette équation, il faut l'identifier avec l'équation obtenue par l'élimination de u entre les deux relations (58). Pour faciliter le calcul, nous ferons d'abord le changement de fonction inconnue $x = x_1 x'$, et, en désignant par p' , q' , r' , s' , t' les dérivées de x' , et par p_1 , q_1 , r_1 , s_1 , t_1 les dérivées de x_1 , les deux équations à identifier sont les suivantes

$$(59) \quad x_1 (Ar' + Bs' + Ct') + (Dx_1 + 2Ap_1 + Bq_1)p' + (Ex_1 + Bp_1 + 2Cq_1)q' + (Ar_1 + Bs_1 + Ct_1 + Dp_1 + Eq_1 + Fx_1)x' = 0,$$

$$(60) \quad \gamma_1 r' + (\delta_1 - \gamma) s' - \delta t' + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) p' + \left(\frac{\partial \delta_1}{\partial x} - \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) q' = 0;$$

il faut d'abord que x_1 soit une intégrale particulière de l'équation proposée (54) et, de plus, que l'on ait

$$\frac{\gamma_1}{Ax_1} = \frac{\delta_1 - \gamma}{Bx_1} = \frac{-\delta}{Cx_1} = \frac{\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}}{2Ap_1 + Bq_1 + Dx_1} = \frac{\frac{\partial \delta_1}{\partial x} - \frac{\partial \delta}{\partial y}}{Bp_1 + 2Cq_1 + Ex_1} = v.$$

On en tire

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= Ax_1 v, & \delta_1 &= \gamma + Bx_1 v, & \delta &= -Cx_1 v, \\ \frac{\partial (Ax_1 v)}{\partial x} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} &= (2Ap_1 + Bq_1 + Dx_1) v, \\ \frac{\partial (Bx_1 v)}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial (Cx_1 v)}{\partial y} &= (Bp_1 + 2Cq_1 + Ex_1) v, \end{aligned}$$

et l'élimination de γ conduit à une équation du second ordre en v

$$\frac{\partial^2 (Av)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (Bv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (Cv)}{\partial y^2} - \frac{\partial (Dv)}{\partial x} - \frac{\partial (Ev)}{\partial y} + Fv = 0;$$

nous retrouvons encore l'équation adjointe de l'équation proposée. Connaissant v , on aura γ par une quadrature, et on en déduira ensuite γ_1 , δ , δ_1 . Ainsi, pour pouvoir appliquer une transformation de la forme (38) à une équation linéaire donnée, il suffit de connaître une intégrale particulière de l'équation proposée et une intégrale particulière de l'équation adjointe.

A tout couple de solutions (x_1, v_1) de l'équation proposée (34) et de son adjointe (35) correspondent encore une infinité de transformations différentes, dépendant d'une constante arbitraire, car γ est donné par une quadrature. Dans toutes les équations en u que l'on peut ainsi déduire d'une équation linéaire donnée, les rapports des coefficients des dérivées du second ordre sont les mêmes que les rapports des coefficients homologues dans l'équation en x , de sorte que les caractéristiques sont les mêmes pour toutes ces équations. Si l'on suppose que les deux familles de caractéristiques de l'équation proposée sont distinctes, quand on ramène cette équation à la forme

$$(61) \quad s + ap + bq + cx = 0,$$

par un changement de variables, l'équation en u prendra elle-même la forme

$$(62) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 u = 0,$$

et les formules (58) seront remplacées par des formules analogues, où l'on aura $\delta = \gamma_1 = 0$. Si la suite de Laplace relative à l'équation se termine d'un côté après n transformations, il résulte d'un théorème rappelé plus haut (n° 184) que la suite de Laplace relative à l'équation (62) se terminera dans le même sens après $n + 1$ transformations au plus ; mais il peut se faire aussi que cette suite se termine après n transformations seulement, ou même après moins de n transformations⁽¹⁾.

(1) On pourra consulter sur ce sujet un Mémoire de M. R. Liouville : « Sur les formes intégrables des équations linéaires du second ordre » (*Journal de l'École polytechnique*, LVI^e cahier, p. 7 ; 1846).

Voir aussi le Mémoire déjà cité de M. Burgatti (*Annali di Matematica*, t. XXIII, 2^e série).

Exemple. — Étant donnée une équation de la forme

$$(63) \quad r - t + \lambda(x, y) s = 0,$$

si x_1 est une intégrale particulière, $v_1 = \frac{\partial^2 x_1}{\partial x \partial y}$ est une intégrale de l'équation adjointe, comme cela résulte de l'identité

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x \partial y} [r - t + \lambda s] = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 x_1}{\partial x \partial y} p + \frac{\partial^2 x_1}{\partial y^2} q \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2} p + \frac{\partial^2 x_1}{\partial x \partial y} q \right\};$$

il suffit donc de connaître deux intégrales particulières ou même une seule de l'équation (63) pour pouvoir en déduire une transformation de la forme (58).

200. Bornons-nous maintenant au cas d'une équation réduite

$$(64) \quad s + ap + bq + cs = 0;$$

soient x_1 une intégrale particulière de cette équation et v_1 une intégrale particulière de l'équation adjointe

$$(65) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \right) v = 0;$$

on a

$$\gamma = \int x_1 \left(b v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) dx - v_1 (q_1 + a x_1) dy,$$

$$\gamma_1 = 0, \quad \delta_1 = \gamma + v_1 x_1, \quad \delta = 0,$$

et u est donné par une nouvelle quadrature

$$\frac{u}{\omega} = \int \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x_1} \right) dx + \delta_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x_1} \right) dy,$$

ce qui peut encore s'écrire, en remplaçant δ_1 par $\gamma + v_1 x_1$ et intégrant par parties,

$$\frac{u}{\omega} = \gamma \left(\frac{x}{x_1} \right) - \int x \left(b v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) dx - v_1 (q + a x) dy.$$

Poseons

$$w = \int x \left(b v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) dx - v_1 (q + ax) dy;$$

d'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, w satisfait à une équation linéaire de même forme que x , dont γ est une intégrale particulière w_1 , correspondante à l'intégrale particulière x_1 de l'équation proposée, et la formule qui donne w peut s'écrire

$$\frac{w}{w_1} = \frac{w_1 x - w x_1}{x_1} = \frac{w_1 \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{b v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x}} - w x_1}{x_1} = \frac{w_1 \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w_1}{\partial x}}{\frac{\partial w_1}{\partial x}};$$

la transformation par laquelle on passe de l'équation en x à l'équation en w est donc une combinaison de deux transformations déjà étudiées. A tout système de deux solutions particulières, l'une de l'équation en x , l'autre de l'équation adjointe, correspondent, comme on l'a déjà remarqué, une infinité de transformations de l'espèce précédente, dépendant d'un paramètre arbitraire, puisque γ ou w , dépend encore d'une constante arbitraire.

Étant données deux équations linéaires telles que l'on passe de l'une à l'autre par une transformation de la forme

$$(68) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{w} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x_1} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{w} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x_1} \right), \end{cases}$$

où, pour plus de symétrie, nous remplaçons γ et δ , par λ et μ , soient (E) l'équation en x , (E)' son adjointe, (E₁) l'équation en w et (E₁') son adjointe. Les invariants de l'équation (E) ont pour valeurs

$$h = \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y}}{\lambda - \mu} - \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial y}}{(\lambda - \mu)^2}, \quad k = \frac{\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y}}{\mu - \lambda} - \frac{\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial y}}{(\lambda - \mu)^2};$$

ces invariants ne changent pas quand on multiplie λ et μ par un même facteur constant ou qu'on leur ajoute une même constante. Remarquons maintenant que, si l'on échange λ et μ , ces deux invariants

ne font que s'échanger, et il en est évidemment de même pour les invariants de l'équation en u . Donc, si dans les formules (66) on échange λ et μ , les deux équations (E) et (E₁) sont remplacées par deux équations respectivement équivalentes à leurs adjointes; nous disons que deux équations sont équivalentes quand on passe de l'une à l'autre en multipliant la fonction inconnue par une fonction de x, y , convenablement choisie, c'est-à-dire quand elles ont les mêmes invariants.

En particulier, si on suppose $\mu = -\lambda$, les invariants de l'équation (E) ne changent pas quand on permute λ et μ ; elle est donc équivalente à son adjointe, c'est-à-dire à ses invariants égaux. Il en est évidemment de même de l'équation en u . Cette propriété est le point de départ des belles recherches de M. Moutard sur les équations à invariants égaux ⁽¹⁾.

La remarque qui précède conduit à une conséquence intéressante. Soit (E) une équation linéaire

$$s + ap + bq + cx = 0,$$

dont on connaît une intégrale particulière x_1 ; soit de même v_1 une intégrale particulière de l'équation adjointe (E)'

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \right) v = 0.$$

En appliquant la transformation considérée qui correspond aux deux solutions x_1, v_1 , et en fixant la constante d'intégration qui entre dans $\lambda = \gamma$, on parvient à une certaine équation (E₁). Supposons maintenant que l'on applique la transformation à l'équation adjointe en échangeant le rôle des deux solutions x_1, v_1 ; la nouvelle valeur γ_1 de γ est, comme le montre un calcul facile,

$$v_1 x_1 + \int x_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - b v_1 \right) dx + v_1 (q_1 + a x_1) dy = -\gamma - v_1 x_1 = -\delta_1,$$

et on aura de même, pour la nouvelle valeur de δ_1 ,

$$\gamma_1 + v_1 x_1 = -\gamma.$$

(1) MOUTARD : « Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes » (*Comptes Rendus*, t. LXX, p. 834; 1870); « Sur la construction des équations de la forme $\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda(x, y)$, qui admettent une intégrale générale explicite » (*Journal de l'Ecole polytechnique*, XLV^e cahier, 1878).

Voir aussi le chapitre sur les équations à invariants égaux dans le tome II de la *Théorie générale des Surfaces* de M. Darboux.

La nouvelle équation en u s'obtiendra donc en changeant λ en μ et μ en λ dans les formules (66) qui conduiraient à la première; elle aura par conséquent les mêmes invariants que l'adjointe de la première. Ainsi, quand on échange les deux équations (E) , (E') , ainsi que les deux intégrales x_1 , v_1 , les deux équations en u auxquelles on parvient sont telles que l'une d'elles est équivalente à l'adjointe de l'autre.

Par exemple, si l'équation (E) est identique à son adjointe, et si on prend $v_1 = x_1$, les deux transformations sont absolument identiques et conduisent, par conséquent, à la même équation en u ; cette équation, devant être équivalente à son adjointe, a donc ses invariants égaux. Nous retrouvons, sous une autre forme, le théorème de M. Moutard. L'équation étant de la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + cx = 0,$$

soit x_1 une intégrale particulière; si on prend $v_1 = x_1$, il vient

$$\gamma = - \int x_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} dx + x_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} dy, \quad \delta_1 = \gamma + x_1^2,$$

et, en prenant pour γ la valeur $-\frac{x_1^2}{2}$, il reste $\delta_1 = \frac{x_1^2}{2}$. Les formules de transformation deviennent alors, en remplaçant u par $-\frac{u}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{x_1} \right) &= x_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x_1} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{x_1} \right) &= -x_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x_1} \right); \end{aligned}$$

ce sont précisément les formules qui définissent la transformation de M. Moutard.

La proposition si curieuse de M. Moutard se trouve ainsi rattachée à une propriété générale de cette classe de transformations.

201. On peut se proposer, sur les transformations précédentes, un grand nombre de problèmes. Cherchons tous les cas où les deux équations que l'on ramène ainsi l'une à l'autre ont les mêmes invariants. Comme on peut multiplier les deux fonctions u et x par des fonctions quelconques de x , y , sans changer les invariants des équations linéaires

correspondantes, on peut écrire les formules de transformations

$$(67) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \frac{\partial x}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial x}{\partial y};$$

soient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial x}{\partial x} + b \frac{\partial x}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

les équations (E) et (E₁); on a

$$a = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial y}}{\lambda - \mu}, \quad b = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu - \lambda}, \quad a_1 = \frac{\mu}{\lambda} a, \quad b_1 = \frac{\lambda}{\mu} b,$$

et, pour que les invariants soient les mêmes, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial b_1}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial y},$$

c'est-à-dire que $a_1 - a$ soit une fonction de y , et $b_1 - b$ une fonction de x . On en déduit, pour λ et μ , les relations

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial y} = f(y), \quad \frac{\partial \log \mu}{\partial x} = f_1(x),$$

ce qui montre que λ et μ sont de la forme suivante

$$\lambda = F(x) \Phi(y), \quad \mu = F_1(x) \Phi_1(y).$$

Ces conditions sont suffisantes; on peut en effet écrire alors les formules (67)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = XY, \frac{\partial x}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = X_1 Y \frac{\partial x}{\partial y},$$

X et X_1 étant deux fonctions de x , et Y, Y_1 deux fonctions de y , ou, en remplaçant x par $\frac{1}{X_1 Y_1} x$, puis changeant X_1 en $\frac{1}{X_1}$ et Y_1 en $\frac{1}{Y_1}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X \frac{\partial (X_1 x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y \frac{\partial (Y_1 x)}{\partial y},$$

ou encore

$$\frac{\partial(X_1 Y_1 z)}{\partial x} = \frac{Y_1}{X} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial(X_1 Y_1 z)}{\partial y} = \frac{X_1}{Y} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Les deux fonctions x et u vérifient une même équation du second ordre

$$(68) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{Y Y_1}{X X_1 - Y Y_1} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{X X_1}{X X_1 - Y Y_1} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

et, si l'on connaît l'une de ces intégrales, on aura la seconde au moyen d'une quadrature

$$(69) \quad u = \int X \frac{\partial(X_1 z)}{\partial x} dx + Y \frac{\partial(Y_1 z)}{\partial y} dy,$$

$$(70) \quad z = \frac{1}{X_1 Y_1} \int \frac{Y_1}{X} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{X_1}{Y} \frac{\partial u}{\partial y} dy;$$

étant donnée une équation de la forme (68), si l'on connaît une intégrale particulière, l'emploi répété des formules (69) et (70) permettra, en général, de calculer une infinité d'autres intégrales de la même équation.

L'équation (68) peut encore s'écrire

$$z + \frac{F_1(y)}{\Phi(x) - \Phi_1(y)} p + \frac{F(x)}{\Phi(x) - \Phi_1(y)} q = 0;$$

si aucune des fonctions $\Phi(x)$, $\Phi_1(y)$ ne se réduit à une constante, et qu'on prenne $\Phi(x)$ et $\Phi_1(y)$ pour nouvelles variables indépendantes, l'équation en z prend la forme suivante

$$z + \frac{\phi(y)}{x - y} p + \frac{\psi(x)}{x - y} q = 0;$$

les équations de cette espèce ont été étudiées par M. Le Roux dans sa thèse ⁽¹⁾.

203. Les transformations des équations du second ordre que nous venons d'étudier (n° 194 et suivants) appartiennent à une classe plus générale de transformations considérées par M. Bäcklund ⁽²⁾. Étant

⁽¹⁾ *Annales de l'Ecole Normale*, 1893.

⁽²⁾ BÄCKLUND, « Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung » (*Mathematische Annalen*, t. XVII; 1880) et « Zur Theorie der Flächentransformationen » (*Ibid.*, t. XIX; 1882).

données deux équations simultanées du premier ordre

$$(71) \quad F_1(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0, \quad F_2(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0,$$

où z, z' sont les deux fonctions inconnues, p' et q' les dérivées partielles de z' , et un système d'intégrales

$$z = f(x, y), \quad z' = \varphi(x, y),$$

considérons les deux surfaces (Σ) et (Σ') représentées par ces deux équations respectivement. Si nous faisons correspondre les points de ces deux surfaces qui sont situés sur une même parallèle à l'axe des z , les équations proposées (71) établissent deux autres relations entre les éléments correspondants du premier ordre de ces deux surfaces. En généralisant la question, on est conduit au problème suivant, que s'est proposé M. Bäcklund : *(Σ) et (Σ') désignant deux surfaces distinctes, peut-on établir entre les points de ces deux surfaces une correspondance telle que les éléments correspondants du premier ordre des deux surfaces (x, y, z, p, q) et (x', y', z', p', q') vérifient quatre relations distinctes données à l'avance ?*

Soient

$$(72) \quad F_i(x, y, z, p, q, x', y', z', p', q') = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

ces quatre relations. Lorsque deux d'entre elles se réduisent à $x' = x, y' = y$, on retombe sur un système de deux équations simultanées du premier ordre à deux fonctions inconnues, et on voit qu'aucune des deux surfaces (Σ) et (Σ') ne peut être choisie arbitrairement. Il en est de même dans le cas général. Si on suppose, en effet, que z, x', y', z' aient été exprimées en fonction des deux variables indépendantes x et y , on déduit p' et q' des relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial z'}{\partial x} &= p' \frac{\partial x'}{\partial x} + q' \frac{\partial y'}{\partial x}, \\ \frac{\partial z'}{\partial y} &= p' \frac{\partial x'}{\partial y} + q' \frac{\partial y'}{\partial y}, \end{aligned}$$

et en remplaçant p' et q' par leurs valeurs tirées de ces formules dans les équations (72), on est conduit à un système de quatre équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, entre deux variables indépendantes x, y , et quatre fonctions inconnues z, x', y', z' . L'élimination des trois inconnues x', y', z' , conduira donc à une ou plusieurs

équations aux dérivées partielles auxquelles devra satisfaire z , considérée comme fonction de x, y . Ce sont ces équations qu'il s'agit de former.

Nous supposons que du système des quatre équations (72) on peut tirer les valeurs de quatre des variables x', y', z', p', q' , en fonction de x, y, z, p, q et de la cinquième variable du même groupe; autrement, l'élimination de x', y', z', p', q' conduirait à une ou plusieurs relations entre x, y, z, p, q , cas que nous écarterons. Il peut encore se présenter deux cas; si les équations (72) peuvent être résolues par rapport à p', q' et deux des variables x', y', z' , on peut supposer ces équations résolues par rapport à p', q', x', y' , car, si elles étaient résolues par rapport à p', q', x', z' , par exemple, il suffirait de prendre x' et z' pour variables indépendantes et de regarder y' comme fonction inconnue de ces deux variables pour être ramené à ce cas. Si on ne se trouve dans aucun des cas précédents, on peut tirer des équations (72) x', y', z' en fonction de x, y, z, p, q , et il reste une seule équation renfermant p' et q' .

$$(73) \quad \Phi(x, y, z, p, q; x', y', z', p', q') = 0;$$

on voit facilement que, dans ce cas particulier, qui est l'analogue du cas traité plus haut (n° 194), z , considérée comme fonction de x et de y , doit satisfaire à une équation du second ordre. En effet, des formules qui donnent x', y', z' ,

$$(74) \quad x' = \varphi_1(x, y, z, p, q), \quad y' = \varphi_2(x, y, z, p, q), \quad z' = \varphi_3(x, y, z, p, q),$$

on tire, en portant dans la relation $dz' = p'dx' + q'dy'$,

$$(75) \quad \begin{cases} \left(\frac{d\varphi_3}{dx}\right) = p' \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right) + q' \left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right), \\ \left(\frac{d\varphi_3}{dy}\right) = p' \left(\frac{d\varphi_1}{dy}\right) + q' \left(\frac{d\varphi_2}{dy}\right), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} p + \frac{\partial}{\partial p} r + \frac{\partial}{\partial q} s, \\ \left(\frac{d}{dy}\right) &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} q + \frac{\partial}{\partial p} s + \frac{\partial}{\partial q} t; \end{aligned}$$

si on porte maintenant les valeurs de x', y', z', p', q' , déduites des formules (74) et (75) dans l'équation $\Phi = 0$, on est conduit à une équation du second ordre pour déterminer z comme fonction de x, y . À toute surface (Σ) les formules (74) font correspondre une seule surface (Σ') .

Prenons le cas général où les équations (72) peuvent être résolues par rapport à x', y', p', q' ,

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y, z, p, q; z'), \\ y' &= f_2(x, y, z, p, q; z'), \\ p' &= f_3(x, . . . ; z'), \\ q' &= f_4(x, . . . ; z'); \end{aligned}$$

en remplaçant x', y', p', q' par f_1, f_2, f_3, f_4 dans la relation $dz' = p'dx' + q'dy'$, on arrive à une équation aux différentielles totales

$$(76) \quad Pdz' + Qdx + Rdy = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions de $x, y, z, x', p, q, r, s, t$. De plus, les dérivées du second ordre r, s, t ne figurent que dans Q et R et y entrent linéairement; en formant la condition d'intégrabilité de cette équation

$$(77) \quad F = 0,$$

on vérifie aisément que les dérivées partielles du troisième ordre de x disparaissent, et F est linéaire en $r, s, t, rt - s^2$. Il peut encore se présenter deux cas :

1° Si l'équation $F = 0$ contient x' , en écrivant que cette valeur de x' vérifie l'équation aux différentielles totales (76), on est conduit à deux équations simultanées du troisième ordre pour x . Toute intégrale de ces deux équations donnera une surface (Σ) , à laquelle correspondra une seule surface (Σ') ;

2° Si l'équation $F = 0$ ne contient pas x' , on a, pour déterminer x , une seule équation du second ordre linéaire en $r, s, t, rt - s^2$. Toute intégrale de cette équation donnera une surface (Σ) , et il lui correspondra une infinité de surfaces (Σ') , dépendant d'une constante arbitraire, qui s'obtiendraient par l'intégration de l'équation aux différentielles totales (76).

203. Pratiquement, il n'est pas nécessaire de résoudre les équations (72) par rapport à p', q', x', y' , et on peut obtenir la condition d'intégrabilité (77) par un procédé plus élégant⁽¹⁾. En différentiant les équations proposées (72), il vient

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF_i}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF_i}{dy}\right) dy + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x'} + p' \frac{\partial F_i}{\partial z'}\right) dx' \\ + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y'} + q' \frac{\partial F_i}{\partial z'}\right) dy' + \frac{\partial F_i}{\partial p'} dp' + \frac{\partial F_i}{\partial q'} dq' = 0; \end{aligned}$$

(1) Darboux, *Théorie générale des Surfaces*, t. III, p. 439 et suiv.

ces équations, résolues par rapport à dx , dy , dp' , dq' , nous donnent pour dp' et dq' des résultats de la forme suivante

$$\begin{aligned} Ndp' &= Hdx' + Kdy', \\ Ndq' &= Ldx' + Mdy', \end{aligned}$$

où H , K , L , M , N sont des fonctions linéaires de r , s , t , $rt - s^2$. Pour que p' et q' soient les dérivées partielles d'une même fonction inconnue par rapport à x' et y' , il faut évidemment que l'on ait $K = L$. En développant les calculs, on arrive à la condition suivante, qui a été donnée par M. Bäcklund,

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} &(12) [F_3, F_1] + (13) [F_4, F_2] + (14) [F_3, F_2] \\ &+ (34) [F_1, F_2] + (42) [F_1, F_3] + (23) [F_1, F_4] = 0, \end{aligned} \right.$$

où on a posé

$$(ik) = \left(\frac{dF_i}{dx} \right) \left(\frac{dF_k}{dy} \right) - \left(\frac{dF_i}{dy} \right) \left(\frac{dF_k}{dx} \right)$$

et où le crochet $[F_i, F_k]$ a le sens habituel

$$\begin{aligned} [F_i, F_k] &= \left(\frac{\partial F_i}{\partial x'} + p' \frac{\partial F_i}{\partial z'} \right) \frac{\partial F_k}{\partial p'} - \left(\frac{\partial F_k}{\partial x'} + p' \frac{\partial F_k}{\partial z'} \right) \frac{\partial F_i}{\partial p'} \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y'} + q' \frac{\partial F_i}{\partial z'} \right) \frac{\partial F_k}{\partial q'} - \left(\frac{\partial F_k}{\partial y'} + q' \frac{\partial F_k}{\partial z'} \right) \frac{\partial F_i}{\partial q'}. \end{aligned}$$

L'ensemble des cinq équations (72) et (78) forme un système équivalent aux équations (72) et (77). Si on peut résoudre ces cinq équations par rapport à x' , y' , z' , p' , q' , en écrivant que les valeurs trouvées satisfont à la relation

$$dz' = p'dx' + q'dy',$$

on est conduit à deux équations du troisième ordre en z ; si on peut éliminer x' , y' , z' , p' , q' , ce qui arrivera si, en tirant quatre de ces variables des relations (72) et les portant dans la condition (78), la cinquième variable du même groupe disparaît du résultat, on trouve pour z une seule équation du second ordre linéaire en r , s , t , $rt - s^2$.

204. On voit donc que, sous certaines conditions que nous venons de préciser, on déduira des équations (72) une seule équation du second ordre pour déterminer z comme fonction de x , y . Cela peut arriver dans deux circonstances différentes, qui se distinguent de la façon

suivante : dans un cas, à une surface (Σ) correspond une seule surface (Σ') qui se réduit de (Σ) sans aucune intégration; dans l'autre cas, à une surface (Σ) correspondent une infinité de surfaces (Σ') , dépendant d'une constante arbitraire, qui s'obtiennent par l'intégration d'une équation aux différentielles totales.

Les deux circonstances s'étaient déjà présentées dans la discussion du système (29) (n° 194).

Lorsqu'on trouve aussi pour z' une équation du second ordre, on a obtenu de cette façon deux équations du second ordre, en général très différentes l'une de l'autre, telles que l'intégration de l'une conduit à celle de l'autre, et la transformation définie par les formules (72) s'appelle une *transformation de Bäcklund*. Remarquons que, lorsqu'à une surface (Σ) correspondent une infinité de surfaces (Σ') , dépendant d'une constante arbitraire, l'équation du second ordre en z est une équation de Monge-Ampère. Lorsqu'à une surface (Σ) correspond une seule surface (Σ') , on voit aisément que l'équation qui définit z représente, quand on y considère x, y, z, p, q comme des paramètres et r, s, t comme des coordonnées courantes, une surface réglée ayant pour cône directeur le cône $s^2 - rt = 0$. En effet, avec ces conventions, les relations (73) représentent bien une droite parallèle à une génératrice de ce cône, cette droite dépendant de deux paramètres p' et q' liés par la relation (73). L'élimination de p' et de q' conduira donc à l'équation d'une surface réglée. Une équation du second ordre provenant d'une transformation de Bäcklund admet donc au moins un système de caractéristiques du premier ordre.

Remarque. — Si l'on se donne *a priori* les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 , les formules (72) ne définissent pas, en général, une transformation de Bäcklund entre deux équations du second ordre. Mais il est facile d'en former autant qu'on voudra; il suffira, par exemple, de prendre pour F_1, F_2, F_3, F_4 des fonctions où ne figurent pas une des trois variables x, y, z , ainsi qu'une des trois variables x', y', z' . En effet, l'élimination de p', q' et des deux variables (x', y') , ou (x', z') , ou (y', z') entre les cinq équations (72) et (77), conduira dans ce cas à une seule équation du second ordre en x, y, z ; et on trouvera de même une seule équation du second ordre en x', y', z' .

205. En dehors des cas examinés plus haut (n° 194 et suivants), on n'a étudié jusqu'ici qu'un petit nombre d'exemples de la transformation générale. M. Bäcklund a appliqué sa théorie à la recherche de deux surfaces $(\Sigma), (\Sigma')$, se correspondant de telle façon que la distance de deux points correspondants M, M' soit constante, et que les deux plans

tangents en M et en M' passent par la droite MM' et fassent un angle constant ⁽¹⁾, M. Darboux a ensuite généralisé le problème, en cherchant les couples de surfaces se correspondant de telle façon que les plans tangents en M , M' et la droite MM' forment un système invariable; ce qui conduit à des surfaces parallèles à des surfaces à courbure constante ou à des surfaces minima. On doit à M. E. Cosserat ⁽²⁾ un autre exemple remarquable, qui se rattache à la théorie de la déformation des surfaces. Considérons la transformation définie par les quatre équations

$$(79) \quad \begin{cases} x = \frac{\partial w}{\partial x'}, & \frac{2z}{x-y} + p - q = q', \\ \frac{2}{x-y} = p', & \frac{z^2 + (x-y)^2 pq}{2} = \frac{\partial w}{\partial y'}, \end{cases}$$

où w est une fonction donnée des seules variables x' , y' . Ces formules définissent bien une transformation de Bäcklund, car elles ne contiennent pas x' , et, si l'on prend pour variables $x_1 = x - y$ et $y_1 = x + y$ à la place de x et y , la lettre y , n'y figurera pas non plus.

Pour former l'équation du second ordre en x' , remarquons qu'on tire des équations (79)

$$p+q = \sqrt{q'^2 - 2p'q' \frac{\partial w}{\partial x'} + 2p'^2 \frac{\partial w}{\partial y'}}, \quad p-q = q' - p' \frac{\partial w}{\partial x'}, \quad x-y = \frac{2}{p'}, \quad z = \frac{\partial w}{\partial x'};$$

si, dans la relation

$$dx = p dx + q dy = \frac{p+q}{2} d(x+y) + \frac{p-q}{2} d(x-y),$$

on remplace x , $p+q$, $p-q$, $x-y$ par leurs expressions, il reste l'équation aux différentielles totales

$$\left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \frac{q' - p' \frac{\partial w}{\partial x'}}{p'^2} r' \right\} dx' + \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial y'} + \frac{q' - p' \frac{\partial w}{\partial x'}}{p'^2} s' \right\} dy' \\ = \frac{1}{2} \sqrt{q'^2 - 2p'q' \frac{\partial w}{\partial x'} + 2p'^2 \frac{\partial w}{\partial y'}} d(x+y).$$

⁽¹⁾ BÄCKLUND, « Om ytor med konstant negativ krökning » (*Lunds Universitets Årsskrift*, t. XIX; 1883).

⁽²⁾ COSSERAT (Édouard), « Sur la déformation de certains paraboloides et sur le théorème de M. Weingarten » (*Comptes Rendus*, t. CXXIV, p. 741-744; avril 1897).

qui définit $x + y$ en fonction de x', y' . En écrivant la condition d'intégrabilité, on est conduit à une équation du second ordre définissant s' en fonction de x', y' , et on trouve qu'elle est identique à l'équation bien connue à laquelle satisfait le résultat de la substitution, dans le premier membre de l'équation d'un plan isotrope, des coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point d'une surface dont l'élément linéaire est déterminé par l'équation

$$(80) \quad ds^2 = du^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial u} du dv + 2 \frac{\partial w}{\partial v} dv^2,$$

où u et v désignent les variables indépendantes x' et y' ⁽¹⁾.

Pour obtenir l'équation du second ordre en s , on tirera des équations (79) les valeurs de x', y', p', q'

$$(81) \quad x' = \frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial x}, \quad y' = \frac{\partial \varphi(x, p)}{\partial p}, \quad p' = \frac{2}{x-y}, \quad q' = \frac{2x}{x-y} + p - q,$$

où on a posé

$$p = \frac{x^2 + (x-y)^2 pq}{2},$$

et où φ est une fonction des seules variables x et p . En portant ces valeurs de x', y', p', q' dans la relation $ds' = p'dx' + q'dy'$, et écrivant la condition d'intégrabilité, on obtient pour s l'équation du second ordre

$$(82) \quad Hr + 2Ks + Lr + M + N(r^2 - s^2) = 0,$$

où on a posé

$$H = \frac{(x-y)^2}{2} q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}, \quad L = - \frac{(x-y)^2}{2} p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2},$$

$$2K = x(x-y)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + (x-y)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial p}, \quad M = (x-y)^2 pq \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + 2x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}$$

$$N = - \frac{(x-y)^4}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}.$$

Cette dernière équation peut se ramener à l'équation considérée par M. Weingarten par une transformation de contact. Si l'on considère, en

⁽¹⁾ O. BONNET, *Journal de l'École polytechnique*, XLII^e cahier; DARBOUX, *Théorie générale des Surfaces*, t. III, p. 261.

effet, la surface-enveloppe du plan

$$(1 - xy) X + i(1 + xy) Y + (x + y) Z - (x - y) s = 0,$$

où X, Y, Z sont les coordonnées courantes et où s désigne une solution de l'équation (82), on trouve pour ces surfaces l'équation aux dérivées partielles

$$(83) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} - (\rho' + \rho'') \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + \rho' \rho'' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0,$$

dont M. Weingarten ⁽¹⁾ a fait dépendre la recherche des surfaces admettant l'élément linéaire donné par la formule (80); ρ', ρ'' sont les rayons de courbure principaux, p est la distance de l'origine au plan tangent, et q la moitié du carré de la distance de l'origine à un point de la surface.

Si l'on considère, de même, la transformation définie par les quatre équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = \frac{\partial w}{\partial x'}, & px - qy + \frac{x+y}{x-y} s = q', \\ \frac{x+y}{x-y} = p', & s^2 + (x-y)^2 pq = 2 \frac{\partial w}{\partial y'}, \end{array} \right.$$

elle conduit pour s à la même équation (82) que la précédente; s' est également définie par une équation aux dérivées partielles du second ordre, qui n'est autre que l'équation connue, à laquelle satisfont les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point d'une surface dont l'élément linéaire est défini par l'équation (80). L'équation de M. Weingarten se trouve ainsi reliée aux équations établies par O. Bonnet et par Bour dans le problème de la déformation.

206. Étant données deux équations du second ordre $(E), (E')$ qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Bäcklund, et deux surfaces intégrales correspondantes $(\Sigma), (\Sigma')$, les caractéristiques se correspondent sur les deux surfaces.

Prenons d'abord le cas où à la surface (Σ) correspond une seule surface (Σ') , dont les coordonnées s'expriment en fonction de x, y, s, p, q par les formules

$$(84) \quad x' = \varphi_1(x, y, s, p, q), \quad y' = \varphi_2(x, y, s, p, q), \quad s' = \varphi_3(x, y, s, p, q).$$

⁽¹⁾ WEINGARTEN, « Sur la théorie des surfaces applicables » (*Comptes Rendus*, t. CXII, p. 607 et 706; 1891).

Soit (Γ) une caractéristique de la surface (Σ) , et (Γ') la courbe correspondante de (Σ') . Des formules (84) on déduit les valeurs de p' , q' en fonction de x , y , z , p , q , r , s , t , et, d'une manière générale, les dérivées partielles d'ordre n de z' par rapport à x' et y' s'expriment au moyen de x , y , z et des dérivées partielles de z par rapport à x et y jusqu'à celles d'ordre $n + 1$ inclusivement. Or, la courbe (Γ) étant une caractéristique de la surface (Σ) , il existe une infinité d'intégrales de l'équation (E) ayant un contact d'ordre m avec la surface (Σ) le long de la courbe (Γ) , aussi grand que soit le nombre entier m . A chacune de ces intégrales correspond une intégrale de l'équation (E') ayant un contact d'ordre $m - 1$ avec la surface (Σ') le long de (Γ') , ce qui prouve que cette courbe (Γ') est bien une caractéristique.

Lorsqu'à une surface (Σ) correspondent une infinité de surfaces (Σ') , ces surfaces s'obtiennent (n° 202) par l'intégration d'une équation aux différentielles totales

$$(83) \quad Pdz' + Qdx + Rdy = 0,$$

où P , Q , R sont des fonctions de x , y , z , z' , p , q , r , s , t , et il suffit de se donner la valeur z'_0 de z' qui correspond à un point particulier (x_0, y_0, z_0) de (Σ) pour que la surface (Σ') soit complètement déterminée. Soit (Γ) une caractéristique de (Σ) ; comme le point (x_0, y_0, z_0) est arbitraire, nous pouvons supposer que cette caractéristique passe par le point (x_0, y_0, z_0) . La courbe (Γ') correspondante de la surface (Σ') s'obtiendra en intégrant une équation différentielle du premier ordre

$$dz' = f(x, z') dx,$$

que l'on formera en remplaçant dans l'équation (83) x , y , z , p , q , r , s , t , par leurs valeurs en fonction de x le long de (Γ) , et en se servant en outre des formules qui donnent x' , y' , p' , q' en fonction de x , y , z , p , q , z' (p. 285). Remarquons que cette courbe (Γ') , ainsi que le plan tangent en chaque point, ne dépend que des valeurs de x , y , z , p , q , r , s , t le long de (Γ) et de la constante d'intégration z'_0 .

A toute intégrale de l'équation (E) ayant un contact du second ordre avec (Σ) le long de (Γ) correspond, par conséquent, une intégrale de l'équation (E') ayant un contact du premier ordre avec (Σ') le long de (Γ') ; on en conclut, comme tout à l'heure, que la courbe (Γ') est une caractéristique.

Le même raisonnement prouve que, si l'on sait résoudre le problème de Cauchy pour l'une des deux équations (E), (E'), on saura aussi le résoudre pour la seconde.

Si l'une des deux équations est intégrable par la méthode de M. Darboux, il résulte d'une proposition générale déjà établie (n° 183) qu'il en est de même de la seconde. Mais il est à remarquer que les invariants des deux équations ne sont pas nécessairement du même ordre. Ainsi, étant donnée une équation linéaire intégrable par la méthode de Laplace, une suite de transformations de Laplace, c'est-à-dire de transformations de Bäcklund particulières, permet de la ramener à une équation qui admet deux invariants du premier ordre, pour un même système de caractéristiques. Le même fait a lieu aussi pour l'équation de M. Biondon (n° 192). On peut encore ajouter la remarque suivante : Étant donnée une équation linéaire pour laquelle la suite de Laplace est terminée dans les deux sens, l'application de la transformation de Laplace diminue l'ordre d'un invariant d'une unité, mais augmente d'une unité l'ordre d'un invariant de l'autre système de caractéristiques. Il existe aussi des transformations qui permettent de diminuer l'ordre d'un invariant dans chacun des systèmes. Ainsi, étant donnée une équation à invariants égaux $s = \lambda(x, y)x$, pour laquelle la suite de Laplace est limitée dans les deux sens, une suite de transformations de M. Moutard permet de la ramener à l'équation élémentaire $s = 0$.

Il serait intéressant d'examiner si ces propriétés ne peuvent pas être rattachées à une théorie générale, et de rechercher à quelles conditions une équation intégrable par la méthode de M. Darboux peut être ramenée, par une suite de transformations de Bäcklund, à une équation intégrable par la méthode de Monge.

207. Les transformations de Bäcklund ne sont pas les plus générales que nous ayons eu l'occasion d'appliquer. Ainsi nous avons vu (n° 187-188) que l'équation

$$(86) \quad r + X_1 p + X_2 s + F(x, y, q, s, t) = 0$$

se ramène à l'équation

$$(87) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + X_2 u + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

en posant $q = u$. La transformation précédente n'est pas une transformation de Bäcklund, puisque les intégrales de l'équation en s qui correspondent à une intégrale de l'équation en u dépendent de deux constantes arbitraires. Ce n'est pas non plus, au moins en général, une combinaison de transformations de Bäcklund, puisque toute équation

provenant d'une pareille transformation doit représenter, quand on regarde r, s, t comme des coordonnées courantes, une surface réglée ayant ses génératrices parallèles à celles du cône $s^2 - rt = 0$; ce qui n'a pas lieu évidemment pour l'équation (86), si la fonction F est quelconque.

On peut remplacer l'équation (86) par un système de trois équations du premier ordre à trois inconnues, analogue au système (29),

$$(88) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} + X_1 v + X_2 s + F\left(x, y, s, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial x} = v, & \frac{\partial s}{\partial y} = u. \end{cases}$$

Si on élimine v et u , on retrouve l'équation (86), tandis que l'élimination de v et de s conduit à l'équation (87).

Ceci nous conduit à envisager d'une manière encore plus générale les transformations des équations du second ordre. Considérons un système de m équations du premier ordre

$$(89) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots, F_m = 0,$$

entre deux variables indépendantes x, y et n fonctions inconnues x_1, x_2, \dots, x_n ($n \leq m$). L'élimination de toutes les fonctions inconnues, sauf l'une d'elles, conduira en général à plusieurs équations simultanées pour déterminer la dernière. Imaginons que toutes les dérivées partielles de x_2, x_3, \dots, x_n puissent, au moyen des équations (89) et de celles qu'on en déduit en les différentiant, s'exprimer, à partir d'un certain ordre, au moyen des dérivées partielles d'ordre inférieur et des dérivées partielles de x_1 . Si, en écrivant les conditions d'intégrabilité, on est conduit à une seule équation du second ordre en x_1 ,

$$(90) \quad G\left(x, y, x_1, \frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_1}{\partial y}, \frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 x_1}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 x_1}{\partial y^2}\right) = 0,$$

l'intégration du système (89) est ramenée à l'intégration de l'équation (90). À toute intégrale de cette équation correspondent des intégrales du système (89), dépendant d'un nombre fini de constantes arbitraires, qui s'obtiennent par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Maintenant, il peut se faire que cette réduction du système (89) à une équation du second ordre puisse être effectuée de plusieurs façons essentiellement distinctes. Par exemple, imaginons qu'après avoir effectué au besoin un changement de

variables dans les équations (89) l'élimination de $n - 1$ des inconnues nouvelles conduise, pour la dernière inconnue, à une équation du second ordre

$$(91) \quad G, \left(x', y', \frac{\partial u_1}{\partial x'}, \frac{\partial u_1}{\partial y'}, \dots \right) = 0;$$

on a ainsi établi, entre les deux équations (90) et (91), une correspondance telle que l'intégration de l'une entraîne celle de l'autre. D'une façon plus précise, à toute intégrale de l'une d'elles correspondent des intégrales de l'autre dépendant d'un nombre fini de constantes arbitraires et s'obtenant par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Si l'une des deux équations est intégrable par la méthode de M. Darboux, il en est de même de la seconde (n° 182). Il est clair que toutes les transformations que nous avons étudiées ne sont que des cas très particuliers de la transformation générale qui vient d'être définie.

Les transformations dont il s'agit constituent un moyen de recherches beaucoup plus puissant que les transformations de contact. Nous avons déjà fait observer qu'on pouvait, dans certains cas, ramener ainsi une équation, intégrable par la méthode de M. Darboux, à une équation intégrable par la méthode de Monge. Mais ces transformations s'appliquent aussi avec avantage aux équations non intégrables, au moins dans certains cas, en permettant de les ramener à une *forme canonique*. Par exemple, étant donnée une équation du second ordre linéaire par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées

$$Ar + 2Br + Cr + Dp + Eq + Fz = 0,$$

cette équation admet toujours un groupe d'ordre infini de transformations de contact, car, si on remplace z par $z + z_1$, z_1 étant une intégrale particulière quelconque, l'équation ne change pas. Il en est évidemment de même de toute équation du second ordre qui se déduit d'une équation linéaire par une transformation de contact. Une condition nécessaire pour qu'une équation du second ordre puisse être ramenée à une équation linéaire par une transformation de contact est donc la suivante : cette équation doit se reproduire par une infinité de transformations de contact, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires. Mais, si l'on emploie des transformations de Bäcklund ou des transformations plus générales, cette condition n'est plus nécessaire. Ainsi, nous avons pu ramener à une équation linéaire l'équation $z^2 = 4\lambda pq$, et il est facile de voir que les transformations de con-

tact qui reproduisent cette équation ne dépendent que d'un nombre fini de constantes, lorsque λ n'est pas nul. (Note de la page 196.)

Prenons encore l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure totale constante. M. Sophus Lie a démontré que les transformations de contact qu'admet cette équation ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres; il est donc impossible de ramener cette équation à une équation linéaire par une transformation de contact. Mais rien ne nous permet jusqu'ici d'affirmer qu'une transformation de Bäcklund, par exemple, ne permettrait pas de la ramener à une équation linéaire.

On a pu voir, par cet exposé rapide, combien nous sommes loin de posséder une théorie vraiment générale de ce sujet, et combien de questions encore obscures restent à élucider. Je n'ai pu qu'indiquer sommairement l'état actuel de nos connaissances sur ce sujet difficile.

CHAPITRE X

GÉNÉRALISATIONS DIVERSES

Problème de Cauchy pour une équation d'ordre n . — Caractéristiques d'ordre n et d'ordre supérieur. — Extension des théorèmes établis pour le second ordre. — Caractéristiques d'ordre $n - 1$. — Équations linéaires. — Équations de Natani. — Généralisation de la méthode de M. Darboux. — Systèmes du premier ordre à n inconnues. — Caractéristiques du premier ordre. — Extension de la méthode de Monge. — Systèmes singuliers. — Équations de Jacobi. — Systèmes linéaires. — Caractéristiques d'ordre nul. — Caractéristiques d'ordre supérieur. — Généralités sur les équations à plus de deux variables indépendantes.

208. La notion de caractéristiques s'étend sans difficulté aux équations d'ordre supérieur ou aux systèmes d'un nombre quelconque d'équations, pourvu que le nombre des variables indépendantes soit égal à deux. La méthode d'intégration de M. Darboux, qui repose sur la théorie des caractéristiques, s'étend aussi, comme on peut le prévoir, sans autre difficulté que la complication croissante des calculs. Pour plus de netteté, je me borne, dans ce chapitre, à deux cas particulièrement importants, celui d'une équation unique d'ordre n et celui d'un système de n équations du premier ordre à n inconnues. M. Hamburger a consacré à cette étude deux importants Mémoires ⁽¹⁾; la marche que j'ai adoptée est tout à fait différente de celle suivie par ce géomètre et me paraît plus

⁽¹⁾ *Zur Theorie der Integration eines Systems von n linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen* (Journal de Crelle, t. LXXXI, p. 243-280).

Zur Theorie der Integration eines Systems von n nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen (Crelle, t. XCIII, p. 188-214).

Je n'ai pu utiliser pour la rédaction de ce chapitre deux mémoires récents de M. E. von Weber (*Mathematische Annalen*, t. XLIX et *Journal de Crelle*, t. CXVIII) dont je n'ai eu connaissance qu'au moment de la correction des épreuves.

Étant donnée une équation aux dérivées partielles d'ordre n

le problème de Cauchy généralisé consiste à déterminer une intégrale de cette équation admettant tous les éléments d'une orientation d'ordre $n - 1$ donnée, et régulière dans le voisinage de l'un de ces éléments. En d'autres termes, supposons que $x, y, z, p_1, \dots, p_{n-1}$, et toutes les dérivées partielles jusqu'à celles d'ordre $n - 1$ inclusivement soient des fonctions connues d'une variable auxiliaire λ :

ces fonctions satisfaisant aux conditions

il s'agit de déterminer une intégrale (S) de l'équation (1), passant par la courbe (C) représentée par les formules

et telle en outre que les dérivées partielles de x par rapport à x et à y , jusqu'à celles d'ordre $n - 1$ inclusivement, aient en chaque point de la courbe (C) les valeurs données par les formules (3).

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} dp_{n-1,0} = p_{n,0} dx + p_{n-1,1} dy, \\ dp_{n-2,1} = p_{n-1,1} dx + p_{n-2,2} dy, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ dp_{0,n-1} = p_{1,n-1} dx + p_{0,n} dy; \end{array} \right.$$

ces $n + 1$ équations déterminent, en général, un ou plusieurs systèmes de valeurs pour les $n + 1$ dérivées $p_{n,0}, p_{n-1,1}, \dots, p_{0,n}$. Prenons un de ces systèmes en particulier et proposons-nous de calculer ensuite les

$$(5) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + P_{n,0}p_{n+1,0} + P_{n-1,1}p_{n,1} + \dots + P_{0,n}p_{1,n} = 0, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + P_{n,0}p_{n,1} + P_{n-1,1}p_{n-1,2} + \dots + P_{0,n}p_{0,n+1} = 0; \end{cases}$$
$$\begin{aligned} \left(\frac{dF}{dx}\right)dx + \Delta_n\left(\frac{dy}{dx}\right)dp_{n,n} - \Delta_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)dp_{n-1,1} + \dots + (-1)^{n-1}\Delta_1\left(\frac{dy}{dx}\right)dp_{1,n-1} &= 0, \\ \left(\frac{dF}{dy}\right)dy + \Delta_n\left(\frac{dy}{dx}\right)dp_{n-1,1} - \Delta_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)dp_{n-2,2} + \dots + (-1)^{n-1}\Delta_1\left(\frac{dy}{dx}\right)dp_{n,n} &= 0, \end{aligned}$$
[illegible]
$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = 0, \quad dx = p_{1,n}dx + p_{n,1}dy, \quad dy = \lambda dx, \\ dp_{i,k} = p_{i+1,k}dx + p_{i,k+1}dy, \quad (i+k \leq n-1), \\ \left(\frac{dF}{dx}\right)dx + \Delta_n(\lambda)dp_{n,0} - \Delta_{n-1}(\lambda)dp_{n-1,1} + \dots + (-1)^{n-1}\Delta_1(\lambda)dp_{1,n-1} = 0, \\ \left(\frac{dF}{dy}\right)dx + \Delta_n(\lambda)dp_{n-1,1} - \Delta_{n-1}(\lambda)dp_{n-2,2} + \dots + (-1)^{n-1}\Delta_1(\lambda)dp_{0,n} = 0. \end{array} \right.$$

Les $\frac{n(n+1)}{2} + 4$ équations (6) se réduisent en réalité à $\frac{n(n+1)}{2} + 3$ équations distinctes, car on obtient $dP = 0$ en combinant les deux dernières relations. Il y figure en tout $\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 2$ variables, de sorte qu'on a n variables de plus que d'équations ; une caractéristique dépend donc de $n - 1$ fonctions arbitraires d'une variable.

Pour simplifier l'exposition, nous supposons que l'équation aux dérivées partielles proposée est résolue par rapport à la dérivée $p_{n,0}$, ce qui ne diminue pas la généralité des résultats. Soit

$$(7) \quad p_{n,0} + f(x, y, z, p_{1,0}, p_{0,1}, \dots; p_{n-1,1}, \dots, p_{0,n}) = 0$$

cette équation; en la différentiant un nombre quelconque de fois par rapport à x et à y , on pourra exprimer toutes les dérivées partielles de z au moyen des dérivées $p_{i,k}$ où l'indice i ne dépasse pas $n-1$. Nous supposons, dans la suite, qu'on n'a laissé que ces dérivées dans les formules. Les caractéristiques sont alors définies par les équations

$$(8) \quad \begin{cases} p_{n,0} + f = 0, & dx = p_{1,0}dx + p_{0,1}dy, & dy = \lambda dx, \\ dp_{i,k} = p_{i+1,k}dx + p_{i,k+1}dy, & (i+k \leq n-1), \\ \left(\frac{df}{dy}\right)dx + dp_{n-1,1} - \Delta_{n-1}(\lambda)dp_{n-2,2} + \dots + (-1)^{n-1}\Delta_1(\lambda)dp_{0,n} = 0, \end{cases}$$

λ étant une racine de l'équation caractéristique

$$(9) \quad \Delta(\lambda) = \lambda^n - P_{n-1,1}\lambda^{n-1} + P_{n-2,2}\lambda^{n-2} \dots + (-1)^nP_{0,n} = 0,$$

où
$$P_{i,k} = \frac{\partial f}{\partial p_{i,k}}$$

On peut aussi considérer la suite des valeurs prises par toutes les dérivées partielles jusqu'à un certain ordre le long d'une caractéristique, et définir des caractéristiques d'un ordre quelconque supérieur à n . En opérant comme tout à l'heure, on voit que les caractéristiques d'ordre $n+k$ sont définies par les équations

$$(10) \quad \begin{cases} dy = \lambda dx, & dx = p_{1,0}dx + p_{0,1}dy, \\ dp_{i,k} = p_{i+1,k}dx + p_{i,k+1}dy, & \left(\begin{matrix} i \leq n-1 \\ i+k \leq n+k-1 \end{matrix} \right), \\ \left(\frac{d^{n+k}f}{dy^{n+k}}\right)dx + dp_{n-1,k+1} - \Delta_{n-1}(\lambda)dp_{n-2,k+2} + \dots + (-1)^{n-1}\Delta_1(\lambda)dp_{0,n+k} = 0, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre les relations qui permettent d'exprimer toutes les dérivées où l'indice i est supérieur à $n-1$ en fonction des autres. On remarquera qu'il y a toujours n équations de moins que de variables.

Toute caractéristique d'ordre $n+k+1$ renferme une caractéristique d'ordre $n+k$, et une caractéristique donnée d'ordre $n+k$ appartient, en général, à une infinité de caractéristiques d'ordre

$n + h + 1$, dépendant d'une constante arbitraire. Démontrons-le, par exemple, pour $h = 0$. Les dérivées jusqu'à celles d'ordre n inclusivement étant supposées des fonctions connues d'un paramètre, on a, pour déterminer les dérivées d'ordre $n + 1$, les relations

$$\left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right) dx + dp_{n-1,2} - \Delta_{n-1}(\lambda) dp_{n-2,2} + \dots + (-1)^{n-1} \Delta_1(\lambda) dp_{0,n+1} = 0,$$

$$dp_{n-1,1} = p_{n,1} dx + p_{n-1,2} dy,$$

$$dp_{n-2,2} = p_{n-1,2} dx + p_{n-2,3} dy,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$dp_{0,n} = p_{1,n} dx + p_{0,n+1} dy.$$

On tire de ces dernières :

$$p_{1,n} = \frac{dp_{0,n}}{dx} - p_{0,n+1} \lambda,$$

$$p_{2,n-1} = \frac{dp_{1,n-1}}{dx} - \frac{dp_{0,n}}{dx} \lambda + p_{0,n+1} \lambda^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p_{n-1,2} = \frac{dp_{n-2,2}}{dx} - \frac{dp_{n-3,2}}{dx} \lambda + \dots + (-1)^{n-1} p_{0,n+1} \lambda^{n-1},$$

et, en substituant dans la première équation, on arrive à une équation différentielle du premier ordre pour déterminer $p_{0,n+1}$, où le coefficient de $\frac{dp_{0,n+1}}{dx}$ est, au signe près,

$$\lambda^{n-1} + \Delta_{n-1}(\lambda) \lambda^{n-2} + \dots + \Delta_2(\lambda) \lambda + \Delta_1(\lambda) = \Delta'(\lambda).$$

Par conséquent, si λ est racine simple de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$, on voit bien que $p_{0,n+1}$ dépend d'une constante arbitraire; on peut se donner la valeur de cette dérivée en un point de la caractéristique d'ordre n , et la caractéristique d'ordre $n + 1$ est alors complètement déterminée. Les conséquences sont analogues à celles qui ont été établies pour les équations du second ordre (I, n° 81):

Si λ est racine simple de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$: 1° une caractéristique d'ordre $n + h$ ($h \geq 0$) est renfermée dans une infinité de caractéristiques d'ordre $n + h + 1$, dépendant d'une constante arbitraire; 2° une caractéristique d'ordre $n + h$ est renfermée dans une infinité de caractéristiques d'ordre $n + h + i$, dépendant de i constantes arbitraires; 3° si deux intégrales admettent tous les éléments d'une caractéristique, l'ordre du contact est le même tout le long de la caractéristique commune.

$$(11) \quad p_{n-k,k} = F(x, y, z, p_{1,0}, \dots; p_{n,0}, p_{n-1,1}, \dots, p_{k,n})$$
$$P_{n,0} = 0, \quad P_{n-1,1} = 0, \quad \dots, \quad P_{n-k+1,k-1} = 0,$$
$$\begin{aligned} p_{n+j+1-k,k} &= P_{n-k-1,k+1} p_{n+j-k,k+1} + \dots + P_{0,n} p_{j+1,n} + \dots \\ p_{n+j-k,k+1} &= P_{n-k-1,k+1} p_{n+j-k-1,k+2} + \dots + P_{0,n} p_{j,n+1} + \dots \\ &\vdots \\ p_{n-k+1,k+j} &= P_{n-k-1,k+1} p_{n-k,k+j+1} + \dots + P_{0,n} p_{1,n+j} + \dots \\ p_{n-k,k+j+1} &= P_{n-k-1,k+1} p_{n-k-1,k+j+2} + \dots + P_{0,n} p_{0,n+j+1} + \dots \end{aligned}$$

Soit

$$x_0, y_0, z_0, (p_{1,0})_0, (p_{2,1})_0, \dots, (p_{n,0})_0, (p_{n-1,1})_0, \dots, (p_{0,n})_0,$$

et où les dérivées partielles de la fonction F par rapport à

$$p_{n,0}, p_{n-1,1}, \dots, p_{n-h+1,h-1}$$

sont nulles pour ces valeurs; soient de plus

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{h-1}(x),$$

h fonctions de x , holomorphes dans le voisinage du point x_0 et telles que l'on ait, pour $x = x_0$,

$$\varphi_0(x_0) = x_0, \left(\frac{\partial^k \varphi_i(x)}{\partial x^k} \right)_{x_0} = (p_{i,k})_0 \quad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, 2, \dots, h-1, \\ i+k \leq n \end{matrix} \right);$$

soient de même

$$\psi_0(y), \psi_1(y), \dots, \psi_{n-h-1}(y)$$

$n-h$ fonctions de y , holomorphes dans le voisinage du point y_0 , et telles que l'on ait, pour $y = y_0$,

$$\psi_0(y_0) = x_0, \left(\frac{\partial^k \psi_i(y)}{\partial y^k} \right)_{y_0} = (p_{i,k})_0 \quad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, 2, \dots, n-h-1, \\ i+k \leq n \end{matrix} \right).$$

Il existe une intégrale de l'équation proposée, régulière dans le domaine du point (x_0, y_0) , et telle que, pour $y = y_0$, on ait

$$x = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \varphi_1(x), \dots, \frac{\partial^{h-1} x}{\partial y^{h-1}} = \varphi_{h-1}(x),$$

et, pour $x = x_0$,

$$x = \psi_0(y), \quad \frac{\partial x}{\partial x} = \psi_1(y), \dots, \frac{\partial^{n-h-1} x}{\partial x^{n-h-1}} = \psi_{n-h-1}(y).$$

La connaissance des n fonctions $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{h-1}(x), \psi_0(y), \dots, \psi_{n-h-1}(y)$ entraîne la connaissance des valeurs initiales de toutes les dérivées partielles $(p_{i,k})_0$, où les indices satisfont à l'une des conditions $i \leq n-h-1, k \leq h-1$. Nous venons de voir comment on peut en déduire de proche en proche les valeurs initiales de toutes les autres dérivées partielles de la fonction inconnue, pour $x = x_0, y = y_0$, et cela au moyen d'additions et de multiplications seulement. On peut donc, pour démontrer la convergence du développement ainsi obtenu, employer la méthode des fonctions majorantes. Mais on peut auparavant remplacer les conditions initiales par des conditions plus simples. D'abord, il est permis de supposer $x_0 = y_0 = 0$, car il suffit de rempla-

cer x et y par $x_0 + x$ et $y_0 + y$ respectivement pour être ramené à ce cas. Si nous remplaçons ensuite x par $\Phi(x, y) + u$, u étant la nouvelle inconnue, et $\Phi(x, y)$ une fonction holomorphe dans le domaine du point $x=0, y=0$, qui satisfait aux mêmes conditions initiales que x ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi_0(x), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \varphi_1(x), \dots, \frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial y^{k-1}} = \varphi_{k-1}(x), \quad \text{pour } y=0, \\ \Phi &= \psi_0(y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \psi_1(y), \dots, \frac{\partial^{n-k-1} \Phi}{\partial x^{n-k-1}} = \psi_{n-k-1}(y), \quad \text{pour } x=0, \end{aligned}$$

la nouvelle fonction u devra être nulle, ainsi que ses $k-1$ premières dérivées par rapport à x pour $y=0$; elle devra être nulle également, ainsi que ses $n-k-1$ premières dérivées par rapport à y pour $x=0$, de sorte que tous les termes du développement de u en série entière devront être divisibles par $x^k y^{n-k}$. L'équation proposée est donc remplacée par une équation de même forme, où, pour ne pas multiplier les notations, nous conserverons la lettre x pour désigner la fonction inconnue

$$(13) \quad p_{n-k,k} = F(x, y, x, p_{1,0}, p_{0,1}, \dots, p_{n,0}, \dots, p_{0,n});$$

le second membre est holomorphe dans le voisinage des valeurs

$$x = y = x = p_{1,0} = \dots = p_{0,n} = 0,$$

et les dérivées partielles de la fonction F par rapport à

$$p_{n,0}, p_{n-1,1}, \dots, p_{n-k+1,k-1}$$

sont nulles pour ces valeurs. Tout revient donc à démontrer que cette nouvelle équation admet une intégrale holomorphe dans le domaine de

(1) Il existe évidemment une infinité de fonctions $\Phi(x, y)$ satisfaisant à ces conditions. Pour en former une, imaginons un tableau à double entrée dont le terme général a_{ik} sera pris égal à (p_{ik}) , si l'indice i n'est pas supérieur à $n-k-1$ ou l'indice k supérieur à $k-1$, et sera nul si aucune de ces inégalités n'est vérifiée. La série

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{ik} \frac{x^i y^k}{i! k!}$$

est convergente dans le voisinage de l'origine et représente une fonction satisfaisant aux conditions voulues.

l'origine et satisfaisant aux conditions suivantes

$$\begin{aligned} x=0, \frac{\partial x}{\partial y} = 0, \dots, \frac{\partial^{h-1} x}{\partial y^{h-1}} = 0, \quad \text{pour } y=0, \\ x=0, \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \dots, \frac{\partial^{h-1} x}{\partial z^{h-1}} = 0, \quad \text{pour } z=0. \end{aligned}$$

Le développement de la fonction F est, en n'écrivant pas les termes de degré supérieur au premier,

$$a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + b_{1,0} p_{1,0} + \dots + b_{n-h-1,h-1} p_{n-h-1,h-1} + \dots + b_{n,n} p_{n,n} + \dots$$

les coefficients des dérivées $p_{n,0}, p_{n-1,1}, \dots, p_{n-h+1,h-1}$ étant tous nuls. On peut encore faire disparaître le terme constant a_0 en remplaçant x par $x + a_0 \frac{x^{n-h} y^h}{h! (n-h)!}$. Toutes ces réductions faites, la fonction F admet pour fonction majorante une fonction de la forme

$$\Phi(x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{n,n}) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x+y+z+p_{1,0}+\dots+p_{n,n-1}}{\rho}\right) \left(1 - \frac{p_{n,n}+\dots+p_{n,n}}{R}\right)} - M \left\{ 1 + \frac{p_{n,n}+\dots+p_{n-h+1,h-1}}{R} \right\},$$

M, ρ, R étant des nombres positifs convenablement choisis; si, dans cette fonction, on remplace x par $\frac{x}{\alpha}$, α étant un nombre positif moindre que l'unité, on augmente tous les coefficients, et la fonction ainsi obtenue est, à plus forte raison, majorante pour F . Le théorème en question sera donc établi, si on montre que l'équation

$$p_{n-h,h} = \frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{x}{\alpha} + y + z + p_{1,0} + \dots + p_{n,n-1}}{\rho}\right) \left(1 - \frac{p_{n,n} + \dots + p_{n,n}}{R}\right)} - M \left(1 + \frac{p_{n,n} + \dots + p_{n-h+1,h-1}}{R}\right)$$

admet une intégrale holomorphe dont tous les termes sont divisibles par $x^h y^{n-h}$ et, à plus forte raison, si on montre que cette équation admet une intégrale représentée par une série entière dont tous les coefficients sont réels et positifs. Pour démontrer ce dernier point, cherchons une intégrale qui soit fonction de la seule variable

$$u = x + \alpha y,$$

$$z = f(x + \alpha y);$$

on a

$$p_{i,k} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial u^{i+k}} \alpha^k,$$

et l'équation devient

$$\alpha^A \frac{\partial^A z}{\partial u^A} = \frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{x}{\alpha} + z + \frac{\partial z}{\partial u}(1 + \alpha) + \dots}{\rho}\right) \left(1 - \frac{\frac{\partial^A z}{\partial u^A} 1 + \alpha + \dots + \alpha^{A-1} + \alpha^{A+1} + \dots + \alpha^A}{R}\right)} \\ - M \left\{ 1 + \frac{1 + \alpha + \dots + \alpha^{A-1}}{R} \frac{\partial^A z}{\partial u^A} \right\}$$

ou encore

$$(14) \quad A \frac{\partial^A z}{\partial u^A} - B \left(\frac{\partial^A z}{\partial u^A} \right)^2 = \Psi \left(u, z, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial u^{n-1}} \right),$$

Ψ désignant une série entière dont tous les coefficients sont réels et positifs et sans terme constant, et les coefficients A et B ayant les valeurs suivantes

$$A = \alpha^A - \frac{M}{R} (\alpha^{A+1} + \dots + \alpha^n), \\ B = \frac{1 + \alpha + \dots + \alpha^{A-1} + \alpha^{A+1} + \dots + \alpha^n}{R} \left\{ \alpha^A + M \frac{1 + \alpha + \dots + \alpha^{A-1}}{R} \right\}.$$

Le coefficient B est toujours positif et, en prenant α assez petit, il en est de même du coefficient A; α étant choisi de cette façon, l'équation (14) admet une intégrale qui est nulle, ainsi que ses n premières dérivées, pour $u = 0$, et dont tous les autres coefficients, comme on le démontre aisément de proche en proche, sont positifs. Le théorème énoncé est donc établi.

§11. Pour appliquer ce théorème général à la théorie des caractéristiques, effectuons d'abord une transformation ponctuelle, comme au n° 83, de façon que les équations de la caractéristique considérée soient

$$y = 0, z = 0, p_{i,k} = 0, (i + k \leq n),$$

et choisissons l'origine des coordonnées de telle façon que le premier membre de l'équation proposée

$$F(x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{0,n}) = 0$$

soit holomorphe dans le voisinage des valeurs précédentes. Pour que l'axe des x soit une direction de caractéristique, il faut d'abord que l'on ait $P_{n,0} = 0$, et, si cette caractéristique provient d'une racine simple de l'équation (9), comme nous le supposons, on doit avoir au contraire $P_{n-1,1}$ différent de zéro. On peut donc résoudre l'équation proposée par rapport à la dérivée $p_{n-1,1}$ et l'écrire sous la forme

$$(15) \quad p_{n-1,1} = F(x, y, z, p_{1,0}, \dots, p_{n,0}, \dots, p_{0,n}),$$

le second membre étant développable en une série entière ordonnée suivant les puissances croissantes de $x, y, z, p_{1,0}$. Ce second membre doit d'ailleurs être nul, quel que soit x , pourvu que y, z et toutes les dérivées $p_{i,0}$ soient nulles; il faut, pour cela, qu'il n'y ait aucun terme en x^m . D'autre part, les dérivées $p_{n+1,0}, p_{n,1}, \dots, p_{1,n}$ doivent être nulles le long de l'axe ox ; si on différentie l'équation précédente par rapport à x et par rapport à y , on voit que $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial p_{0,n}}$ doivent aussi être nuls, quel que soit x , de sorte que le développement du second membre ne doit contenir non plus aucun terme en yx^m , ni en $p_{0,n}x^m$.

Cela posé, soit $\psi(y)$ une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine, nulle, ainsi que ses n premières dérivées, pour $y = 0$. D'après le théorème général qui vient d'être démontré, l'équation (15) admet une intégrale, régulière dans le domaine du point $x = 0, y = 0$, se réduisant à $\psi(y)$ pour $x = 0$, et nulle, ainsi que ses $n - 2$ premières dérivées, pour $y = 0$. On démontre, comme au n° 83, que le développement en série de cette intégrale est divisible par y^{n+1} , de sorte que tous les éléments de la caractéristique considérée appartiennent à cette intégrale, quelle que soit la fonction $\psi(y)$. *Tous les éléments d'une caractéristique d'ordre n , correspondant à une racine simple de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$, appartiennent donc à une infinité de surfaces intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires. Ces constantes arbitraires sont précisément les coefficients de la série entière $\psi(y)$, à partir du coefficient de y^{n+1} . On en conclut encore que l'on peut trouver une infinité de surfaces intégrales, ayant un contact d'un ordre aussi élevé qu'on le veut avec une surface intégrale donnée le long d'une caractéristique.*

Les théorèmes qui viennent d'être établis vont plus loin que les théorèmes correspondants du chapitre IV. En effet, dans ce chapitre, on s'est borné à établir qu'une intégrale d'une équation du second ordre est déterminée quand on se donne une caractéristique du second ordre et une autre courbe admettant un élément du second ordre de cette

caractéristique et tangente à la seconde caractéristique située dans cet élément. Ici, au contraire, nous voyons qu'une intégrale d'une équation d'ordre n est déterminée par une caractéristique d'ordre n , et une autre courbe *quelconque* admettant un élément d'ordre n de cette caractéristique. Nous disons, pour abréger, qu'une courbe admet un élément d'ordre n lorsqu'elle a un contact d'ordre n avec toute surface admettant cet élément.

Bien qu'il y ait une grande analogie, dans les raisonnements et les résultats, entre le cas d'une équation d'ordre n et le cas d'une équation du second ordre, nous devons signaler cependant une différence essentielle. Nous avons reconnu que deux caractéristiques de systèmes différents d'une équation du second ordre, ayant un élément commun du second ordre, appartiennent à une même surface intégrale. Au contraire, dans le cas d'une équation d'ordre $n > 2$, deux caractéristiques d'ordre n , de systèmes différents, ayant un élément commun d'ordre n , n'appartiennent pas en général à une même surface intégrale. Nous verrons une confirmation de ce fait un peu plus loin.

§12. Étant donnée, sur une surface intégrale (S), une caractéristique (C), il existe, nous venons de le voir, une infinité d'intégrales ayant un contact d'ordre n au moins avec la surface (S), tout le long de la caractéristique. Il est naturel de se demander s'il n'existe pas des équations possédant des caractéristiques d'ordre $n - 1$, comme cela a lieu pour les équations du second ordre, de telle sorte qu'il existe une infinité d'intégrales, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires, ayant un contact d'ordre $n - 1$ seulement le long de la caractéristique. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le problème de Cauchy, relatif à cette multiplicité d'éléments d'ordre $n - 1$, conduise à une indétermination pour l'une des dérivées d'ordre n . Supposons que x, y, z et les dérivées $p_{i,k}$ soient des fonctions connues d'un paramètre λ ($i + k \leq n - 1$) vérifiant les relations

$$dp_{i,k} = p_{i+1,k} dx + p_{i,k+1} dy; \quad (i + k \leq n - 2);$$

on a, pour déterminer les dérivées d'ordre n , les $n + 1$ équations

$$F = 0$$

$$dp_{n-1,0} = p_{n,0} dx + p_{n-1,1} dy, \quad \dots \quad dp_{0,n-1} = p_{1,n-1} dx + p_{0,n} dy.$$

Si on tire n des dérivées d'ordre n des dernières relations et qu'on les porte dans $F = 0$, on doit arriver à une identité, pour avoir une

caractéristique. On obtiendra des équations admettant une famille de caractéristiques d'ordre $n - 1$ de la manière suivante ; partons de deux relations de forme arbitraire

$$(16) \quad \begin{cases} H(dx, dy; dp_{n-1}, dp_{n-2}, \dots, dp_{n-n}) = 0, \\ H_1(dx, dy; dp_{n-1}, dp_{n-2}, \dots, dp_{n-n}) = 0, \end{cases}$$

où H et H_1 sont homogènes par rapport aux différentielles et renferment en outre les variables $x, y, z, p_1, \dots, p_{n-1}$, d'une façon quelconque. Si l'on remplace $dp_{i,k}$ par $p_{i+1,k}dx + p_{i,k+1}dy$, puis qu'on élimine le rapport $\frac{dy}{dx}$ entre les deux relations obtenues, on aboutit à une équation d'ordre n , admettant une famille de caractéristiques d'ordre $n - 1$, définies par les formules (16) et les suivantes :

$$dx = p_{i,0}dx + p_{0,1}dy, dp_{i,k} = p_{i+1,k}dx + p_{i,k+1}dy \quad (i + k \leq n - 2).$$

Nous nous bornerons au cas où les formules (16) sont linéaires par rapport aux différentielles, et, comme nous n'écrirons que les relations entre les dérivées d'ordre n et d'ordre $n - 1$, nous modifierons un peu la notation employée en posant

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}, & \pi_2 &= \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-2} \partial y}, & \dots, & \pi_n &= \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}, \\ q_1 &= \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, & q_2 &= \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, & \dots, & q_{n+1} &= \frac{\partial^n z}{\partial y^n}. \end{aligned}$$

Les formules (16) étant linéaires en $dx, dy, d\pi_1, \dots, d\pi_n$, examinons d'abord le cas où elles sont de la forme

$$(17) \quad \begin{cases} dy = \lambda dx, \\ a_1 d\pi_1 + a_2 d\pi_2 + \dots + a_n d\pi_n = \mu dx, \end{cases}$$

$a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda, \mu$ étant des fonctions de x, y, z et des dérivées partielles de z jusqu'à celles d'ordre $n - 1$. L'élimination du rapport $\frac{dy}{dx}$ conduit à l'équation linéaire par rapport aux dérivées d'ordre n

$$(18) \quad a_1(q_1 + q_2\lambda) + a_2(q_2 + q_3\lambda) + \dots + a_n(q_n + q_{n+1}\lambda) = \mu.$$

Inversement, étant donnée une équation linéaire d'ordre n ,

$$(19) \quad A_1 q_1 + A_2 q_2 + \dots + A_{n+1} q_{n+1} = A,$$

où $A, A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$, dépendent de x, y, z et des dérivées d'ordre inférieur à n , pour qu'elle provienne de l'élimination de $\frac{dy}{dx}$ entre les relations (17), il faut pouvoir déterminer $a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda, \mu$ par les conditions

$$a_1 = A_1, \quad a_1\lambda + a_2 = A_2, \quad a_2\lambda + a_3 = A_3, \dots, a_n\lambda = A_{n+1}, \quad \mu = A,$$

et l'élimination de a_1, a_2, \dots, a_n conduit à l'équation de degré n en λ

$$(20) \quad A_1\lambda^n - A_2\lambda^{n-1} + A_3\lambda^{n-2} \dots + (-1)^n A_{n+1} = 0;$$

c'est précisément l'équation qui détermine les caractéristiques, comme on devait s'y attendre. Une équation linéaire d'ordre n admet donc, en général, n familles distinctes de caractéristiques d'ordre $n - 1$, qui sont définies par des équations linéaires par rapport aux différentielles. On peut donc étendre immédiatement aux équations linéaires d'ordre n la méthode employée par Monge pour les équations du second ordre⁽¹⁾. Nous n'insisterons pas sur cette méthode, qui sera généralisée tout à l'heure.

Lorsque le coefficient A_1 est nul, l'équation (20) en λ a une racine infinie, et les formules (17) sont remplacées par les suivantes

$$dx = 0, \quad A_2 dx_1 + \dots + A_n dx_{n-1} + A_{n+1} dx_n = A dy.$$

Passons au cas où les caractéristiques d'ordre $n - 1$ sont définies par des formules linéaires quelconques

$$(21) \quad \begin{cases} a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n + \lambda_1 dx + \lambda_2 dy = 0, \\ b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + \dots + b_n dx_n + \mu_1 dx + \mu_2 dy = 0; \end{cases}$$

l'élimination du rapport $\frac{dy}{dx}$ conduit à l'équation suivante

$$(22) \quad \Sigma(a_i b_k - b_i a_k)(q_i q_{k+1} - q_{i+1} q_k) + \mu_2 \Sigma a_i q_i - \lambda_2 \Sigma b_i q_i \\ + \lambda_1 \Sigma b_k q_{k+1} - \mu_1 \Sigma a_k q_{k+1} + \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0,$$

qui est de la forme

$$(23) \quad \Sigma B_{ik}(q_i q_{k+1} - q_{i+1} q_k) + A_1 q_1 + A_2 q_2 + \dots + A_{n+1} q_{n+1} = A.$$

(1) NATAN, *Die höhere Analysis*, p. 300.

Inversement, étant donnée une équation de cette espèce, pour qu'elle provienne de l'élimination de $\frac{dy}{dx}$ entre les deux relations (21), il faut pouvoir l'identifier avec l'équation (22). On voit que l'identification n'est pas toujours possible, dès que n est supérieur à 3, en remarquant que, les $2n$ inconnues $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ sont déterminées par les conditions

$$a_i b_k - b_i a_k = B_{i,k},$$

les quantités $B_{i,k}$ vérifiant les relations

$$B_{i,i} = 0, \quad B_{i,k} + B_{k,i} = 0;$$

pour que les équations précédentes soient compatibles, il faut en outre que l'on ait, comme on s'en assure par un calcul facile, les relations suivantes, bien connues dans la théorie de la droite, entre les quantités $B_{i,k}$

$$B_{i,k} B_{k,l} + B_{i,l} B_{l,k} + B_{i,k} B_{k,l} = 0, \quad (i, k, l = 1, 2, \dots, n).$$

Pratiquement, on peut s'assurer si l'identification est possible et calculer les coefficients de la façon suivante. L'une au moins des quantités $B_{i,k}$ n'étant pas nulle, supposons, pour fixer les idées, que $B_{1,2}$ ne soit pas nul; comme $B_{1,2} = a_1 b_2 - b_1 a_2$, il s'ensuit que les équations (21) sont résolubles par rapport à dx_1 et à dx_2 ; on peut alors, sans diminuer la généralité, supposer

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = 1, \quad B_{1,2} = 1.$$

Si l'on fait $i = 1$ dans la relation générale

$$a_i b_k - b_i a_k = B_{i,k},$$

il reste $b_k = B_{1,k}$; si l'on fait, au contraire, $k = 2$, il vient $a_i = B_{i,2}$, et il n'y a plus qu'à examiner si ces valeurs des coefficients a_i, b_k satisfont aux autres conditions.

Lorsqu'il en est ainsi, il reste $n + 2$ équations pour déterminer les quatre coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, $n + 1$ de ces équations étant linéaires, et la dernière étant du second degré. Il faudra encore que ces équations soient compatibles, ce qui n'a pas lieu, en général, lorsque n est supérieur à 2. Les équations de la forme (19) peuvent être considérées comme une généralisation de l'équation d'Ampère, mais on voit, d'après

ce qui précède, qu'elles n'admettent de caractéristiques d'ordre $n - 1$ que si les coefficients satisfont à certaines conditions ⁽¹⁾.

213. La méthode d'intégration de M. Darboux s'étend sans difficulté aux équations d'ordre quelconque à deux variables indépendantes. L'extension de la méthode de Monge, quand elle est possible, est comprise comme cas particulier dans l'exposition qui va suivre. Étant donnée une équation de la forme

$$(24) \quad p_{n,0} + f(x, y, z; p_{1,0}, p_{0,1}, \dots; p_{n-1,1}, \dots, p_{0,n}) = 0,$$

cherchons d'abord s'il existe des combinaisons intégrables pour les équations différentielles des caractéristiques d'ordre n . Soit $d\varphi = 0$ une combinaison intégrable, φ ne renfermant pas $p_{n,0}$; si, dans $d\varphi$, on remplace dy , dz , $dp_{1,0}$, ..., $dp_{0,n-1}$, et $dp_{n-1,1}$ par leurs valeurs tirées des équations (8), il vient

$$\begin{aligned} d\varphi = & \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial z} (p_{1,0} + \lambda p_{0,1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{1,0}} (p_{2,0} + p_{1,1} \lambda) + \dots \right. \\ & \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n-1}} (p_{1,n-1} + p_{0,n} \lambda) \right] dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-2,2}} dp_{n-2,2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n}} dp_{0,n} \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1,1}} \left\{ \Delta_{n-1}(\lambda) dp_{n-2,2} - \Delta_{n-2}(\lambda) dp_{n-2,3} + \dots \right. \\ & \left. + (-1)^n \Delta_1(\lambda) dp_{0,n} - \left(\frac{df}{dy} \right) dx \right\}. \end{aligned}$$

Il faudra donc que les coefficients de dx , $dp_{n-2,2}$, ..., $dp_{0,n}$ soient nuls séparément, c'est-à-dire que l'on ait

$$(25) \quad \begin{cases} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) + \lambda \left(\frac{d\varphi}{dy} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1,1}} \left(\frac{df}{dy} \right) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-2,2}} + \Delta_{n-1}(\lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1,1}} = 0, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial p_{0,n}} + (-1)^n \Delta_1(\lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1,1}} = 0, \end{cases}$$

et on aura à rechercher si ces équations linéaires simultanées admettent une solution commune. Les relations de la dernière ligne ont une signification importante. L'équation qui détermine les caractéristiques de l'équation $\varphi = C$ est, en divisant par dx et posant $dy = \mu dx$,

$$\mu^{n-1} + \Delta_{n-1}(\lambda) \mu^{n-2} + \dots + \Delta_1(\lambda) = 0,$$

⁽¹⁾ Cette extension de l'équation d'Ampère a été aussi indiquée par Natani (*Die Äthere Analysis*, p. 367).

s'est-à-dire, en se reportant à l'expression de $\Delta_1, \Delta_2, \dots$,

$$\frac{\Delta(\mu)}{\mu - \lambda} = 0.$$

On voit que l'équation $\phi = C$ doit admettre comme directions de caractéristiques les $n - 1$ directions de caractéristiques de l'équation proposée, autres que celle qui donne les caractéristiques considérées.

De même, pour qu'il existe une combinaison intégrable pour une famille de caractéristiques d'ordre $n + h$,

$$d\phi(x, y, z; p_{10}, \dots, p_{n+h}) = 0,$$

la fonction ϕ ne renfermant que les dérivées $p_{i,k}$ pour lesquelles l'indice i ne dépasse pas $n - 1$, on trouve que la fonction ϕ doit vérifier les équations simultanées

$$(26) \quad \begin{cases} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + \lambda \left(\frac{d\phi}{dy} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial p_{n-1,h+1}} \left(\frac{d^{h+1}f}{dy^{h+1}} \right) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial p_{n-2,h+2}} + \Delta_{n-1}(\lambda) \frac{\partial \phi}{\partial p_{n-1,h+1}} = 0, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial p_{0,n+h}} + (-1)^n \Delta_1(\lambda) \frac{\partial \phi}{\partial p_{n-1,h+1}} = 0, \end{cases}$$

dont les dernières ont la même signification que plus haut. On opérerait de la même façon pour reconnaître si les équations différentielles des caractéristiques d'ordre $n - 1$, quand il en existe, admettent des combinaisons intégrables.

Cela posé, considérons une équation d'ordre n admettant n systèmes de caractéristiques différents, et soient

$$du_1 = 0, \quad du_2 = 0, \quad \dots, \quad du_{n-1} = 0$$

$n - 1$ combinaisons intégrables appartenant respectivement à $n - 1$ de ces systèmes, u_1, u_2, \dots, u_{n-1} renfermant les dérivées de x jusqu'à l'ordre $n + h$ au plus. Les n équations

$$p_{n,0} + f = 0, \quad u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad \dots, \quad u_{n-1} = C_{n-1},$$

où C_1, C_2, \dots, C_{n-1} sont des constantes quelconques, forment un système en involution. Par toute orientation d'éléments d'ordre $n + h$, dont les coordonnées vérifient ces équations et celles qu'on déduit de $p_{n,0} + f = 0$ par des différentiations, il passe une intégrale commune. En effet, l'intégrale (S) de $p_{n,0} + f = 0$, qui passe par cette multiplicité d'éléments, peut être considérée de $n - 1$ manières différentes

comme un lieu de caractéristiques. En particulier, on peut la regarder comme le lieu des caractéristiques de la famille qui admet la combinaison intégrable $du_1 = 0$, ces caractéristiques étant issues des divers éléments de l'orientation précédente. Comme u_1 est constant tout le long de chacune de ces caractéristiques, il s'ensuit que l'on a bien $u_1 = C_1$ en chaque point de la surface (S), et on démontrerait de la même façon que cette surface (S) satisfait aux autres relations $u_2 = C_2, \dots, u_{n-1} = C_{n-1}$.

Cette intégrale commune (S) peut être obtenue par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. D'après ce qui précède, en chaque élément de (S), les n équations

$$p_{n,0} + f = 0, \quad u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad \dots, \quad u_{n-1} = C_{n-1}$$

ont une direction de caractéristique commune, de sorte que (S) est aussi un lieu de caractéristiques communes à ces n équations, et il nous suffira de déterminer ces caractéristiques communes. Soit λ_n la racine de $\Delta(\lambda) = 0$ qui correspond à ces caractéristiques; on a, pour déterminer les valeurs des dérivées d'ordre $n + h$ le long d'une de ces caractéristiques, n équations

$$\begin{cases} dp_{n-1,h+1} - \Delta_{n-1}(\lambda_n)dp_{n-2,h+2} + \dots + (-1)^{n-1}\Delta_1(\lambda_n)dp_{0,n+h} \dots = 0, \\ dp_{n-1,h+1} - \Delta_{n-1}(\lambda_i)dp_{n-2,h+2} + \dots + (-1)^{n-1}\Delta_1(\lambda_i)dp_{0,n+h} \dots = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n-1, \end{cases}$$

dont la première n'est autre que l'une des relations (10) et dont les autres se déduisent de $u_1 = C_1, \dots, u_{n-1} = C_{n-1}$, en tenant compte des conditions (26). On vérifie sans peine que ces équations peuvent être résolues par rapport à $dp_{n-1,h+1}, \dots, dp_{0,n+h}$, si les racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont distinctes, comme nous le supposons. En ajoutant les relations

$$dy = \lambda_n dx, \quad dz = (p_{1,0} + p_{0,1}\lambda_n)dx, \quad dp_{i,h} = (p_{i+1,h} + p_{i,h+1}\lambda_n)dx, \\ i + h < n + h,$$

on forme un système d'équations différentielles ordinaires, permettant de déterminer complètement ces caractéristiques communes, quand on en connaît un élément d'ordre $n + h$. L'intégration de ce système donnera l'intégrale cherchée (S).

Plaçons-nous toujours dans le cas où les n systèmes de caractéristiques sont distincts et supposons, de plus, que, pour $n - 1$ de ces systèmes, il existe deux combinaisons intégrables distinctes. On peut reprendre sans modification les raisonnements qui ont été faits pour le

second ordre; l'équation proposée admet $n - 1$ intégrales intermédiaires distinctes

$$u_1 = \varphi_1(v_1), \quad u_2 = \varphi_2(v_2), \quad \dots, \quad u_{n-1} = \varphi_{n-1}(v_{n-1}),$$

et la solution du problème de Cauchy est ramenée à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Lorsque les n systèmes de caractéristiques admettent chacun deux combinaisons intégrables distinctes, on a n intégrales intermédiaires distinctes

$$u_1 = \varphi_1(v_1), \quad \dots, \quad u_n = \varphi_n(v_n),$$

et on pourrait démontrer, par des considérations analogues à celles qui nous ont servi pour le second ordre, que ces équations, jointes à $F = 0$, forment un système complètement intégrable,

REMARQUE. — Nous avons dit plus haut (n° 211) que deux caractéristiques d'ordre n , de systèmes différents, n'appartiennent pas en général à une même surface intégrale. Il est facile de le vérifier. Soit (C) , (C') ces deux caractéristiques; supposons que les équations différentielles d'un des autres systèmes de caractéristiques admettent deux combinaisons intégrables distinctes d'ordre n , $du = 0$, $dv = 0$, de sorte que l'équation proposée admette l'intégrale intermédiaire

$$u = \varphi(v).$$

Le long de la caractéristique (C) , u et v sont des fonctions d'une seule variable, et toutes les surfaces intégrales qui admettent les éléments de cette caractéristique satisfont à une même équation $u = \varphi_1(v)$, où la fonction φ_1 a une forme déterminée. De même, toutes les surfaces intégrales qui admettent tous les éléments de la caractéristique (C') satisfont à une équation $u = \varphi_2(v)$, où la fonction φ_2 ne dépend que de cette caractéristique. Pour que la même surface intégrale contienne à la fois les éléments des deux caractéristiques, il faudra donc que l'on ait $\varphi_1 = \varphi_2$, ce qui n'aura pas lieu évidemment, si ces caractéristiques sont quelconques.

214. Nous étudierons encore rapidement un système de n équations du premier ordre à deux variables indépendantes x, y , et à n fonctions inconnues x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$(27) \quad F_i(x, y, x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n; q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$p_i = \frac{\partial x_i}{\partial x}, \quad q_i = \frac{\partial x_i}{\partial y}.$$

On définit les caractéristiques en se posant un problème analogue au problème de Cauchy. Donnons-nous les valeurs de x_1, x_2, \dots, x_n pour une suite de valeurs des variables vérifiant une relation $\varphi(x, y) = 0$, et proposons-nous de trouver un système d'intégrales prenant les valeurs précédentes; en langage géométrique, cela revient à chercher n surfaces associées

$$x_1 = f_1(x, y), x_2 = f_2(x, y), \dots, x_n = f_n(x, y),$$

passant respectivement par n courbes données $(\Gamma_1), (\Gamma_2), \dots, (\Gamma_n)$ situées sur un même cylindre ayant ses génératrices parallèles à ox . Le long de ces courbes, x, y, x_1, \dots, x_n sont des fonctions connues d'un paramètre variable, et les valeurs de $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$ s'obtiendront par la résolution des $2n$ équations

$$(28) \quad \begin{cases} F_1 = 0, \dots, F_n = 0, \\ dx_1 = p_1 dx + q_1 dy, dx_2 = p_2 dx + q_2 dy, \dots, dx_n = p_n dx + q_n dy; \end{cases}$$

les valeurs obtenues pour les variables p_i et q_i seront aussi des fonctions régulières du paramètre variable, à moins que le déterminant fonctionnel des $2n$ équations précédentes par rapport à $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$ ne soit nul. Ce jacobien a pour expression

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \frac{\partial F_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_n} & \frac{\partial F_1}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial p_1} & \frac{\partial F_n}{\partial q_1} & \frac{\partial F_n}{\partial p_2} & \frac{\partial F_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial p_n} & \frac{\partial F_n}{\partial q_n} \\ dx & dy & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix};$$

en multipliant toutes les colonnes d'ordre impair par dy , celles d'ordre pair par dx , et retranchant chaque colonne d'ordre pair de la précédente on remplace, à une puissance de dy près, ce déterminant par le suivant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} dy - \frac{\partial F_1}{\partial q_1} dx & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} dy - \frac{\partial F_1}{\partial q_2} dx & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_n} dy - \frac{\partial F_1}{\partial q_n} dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial p_1} dy - \frac{\partial F_n}{\partial q_1} dx & \frac{\partial F_n}{\partial p_2} dy - \frac{\partial F_n}{\partial q_2} dx & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial p_n} dy - \frac{\partial F_n}{\partial q_n} dx \end{vmatrix}$$

Cela posé, nous définirons les caractéristiques comme il suit. Étant donné un système d'intégrales

$$x_1 = f_1(x, y), \quad x_2 = f_2(x, y), \quad \dots, \quad x_n = f_n(x, y),$$

nous appellerons *éléments associés* du premier ordre les éléments de ces n intégrales

$$(x, y, x_1, p_1, q_1), \quad (x, y, x_2, p_2, q_2), \quad \dots, \quad (x, y, x_n, p_n, q_n),$$

qui correspondent à un même système de valeurs pour x et y . Une caractéristique du premier ordre de ce système d'intégrales est une suite simplement infinie d'éléments associés du premier ordre, définie par l'équation différentielle du premier ordre

$$(29) \quad \Delta = 0,$$

où l'on suppose qu'on a remplacé $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$ par leurs expressions en fonction de x, y . On voit que tout système d'intégrales possède n familles, en général distinctes, de caractéristiques.

Le rôle important de ces caractéristiques tient toujours à la propriété suivante. Soit μ une racine de l'équation $\Delta = 0$, où l'on regarde $\frac{dy}{dx}$ comme l'inconnue ; le long d'une caractéristique correspondant à cette racine, on a, entre les éléments associés du premier ordre, les relations

$$(30) \quad \begin{cases} F_1 = 0, & F_2 = 0, & \dots, & F_n = 0, \\ dy = \mu dx, & dx_1 = p_1 dx + q_1 dy, & \dots, & dx_n = p_n dx + q_n dy. \end{cases}$$

Nous allons montrer que l'on peut ajouter à ces relations évidentes une autre équation indépendante du système d'intégrales qui nous a servi à définir les caractéristiques. On a, en effet,

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dx} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \frac{dp_n}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dx} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dx} = 0.$$

en posant

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} p_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} p_n;$$

si on remplace $\frac{\partial q_k}{\partial x}$ par $\frac{\partial p_k}{\partial y}$ et $\frac{\partial p_k}{\partial x}$ par $\frac{dp_k}{dx} - \frac{\partial p_k}{\partial y} \frac{dy}{dx}$, il vient,

en multipliant par dx ,

$$(31) \quad \left(\frac{dF_i}{dx} \right) dx + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} dp_k + \sum \frac{\partial p_k}{\partial y} \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial q_k} dx - \frac{\partial F_i}{\partial p_k} dy \right\} = 0.$$

Imaginons écrites ces n relations où l'on aurait fait successivement $i = 1, 2, \dots, n$; on peut éliminer de ces n relations les termes qui contiennent les dérivées du second ordre $\frac{\partial p_k}{\partial y}$. En effet, si le rapport $\frac{dy}{dx}$ satisfait à l'équation $\Delta = 0$, on pourra trouver n coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ différents de zéro, satisfaisant aux n conditions

$$(32) \quad \begin{cases} \lambda_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_1} dx - \frac{\partial F_1}{\partial p_1} dy \right) + \dots + \lambda_n \left(\frac{\partial F_n}{\partial q_1} dx - \frac{\partial F_n}{\partial p_1} dy \right) = 0, \\ \dots \\ \lambda_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_n} dx - \frac{\partial F_1}{\partial p_n} dy \right) + \dots + \lambda_n \left(\frac{\partial F_n}{\partial q_n} dx - \frac{\partial F_n}{\partial p_n} dy \right) = 0; \end{cases}$$

si on ajoute les n équations (31), après les avoir multipliées respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, il reste

$$(33) \quad \left\{ \lambda_1 \left(\frac{dF_1}{dx} \right) + \lambda_2 \left(\frac{dF_2}{dx} \right) + \dots + \lambda_n \left(\frac{dF_n}{dx} \right) \right\} dx + \sum_{k=1}^n \left\{ \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_k} + \dots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial p_k} \right\} dp_k = 0.$$

On verrait de même que l'on a

$$(34) \quad \left[\lambda_1 \left(\frac{dF_1}{dy} \right) + \dots + \lambda_n \left(\frac{dF_n}{dy} \right) \right] dy + \sum_{k=1}^n \left[\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_k} + \dots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_k} \right] dq_k = 0,$$

en posant

$$\left(\frac{dF_i}{dy} \right) = \frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial x_1} q_1 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} q_n.$$

On peut donc définir les caractéristiques comme une suite simplement infinie d'éléments du premier ordre satisfaisant aux équations simultanées (30), (33) et (34). Ces $2n + 3$ équations entre $2n + 2$ variables se réduisent d'ailleurs à $2n + 2$ équations distinctes, car, en ajoutant les relations (33) et (34), il vient

$$\lambda_1 dF_1 + \lambda_2 dF_2 + \dots + \lambda_n dF_n = 0,$$

de sorte qu'il y a n variables de plus que d'équations. Par exemple, si les équations proposées (27) peuvent être résolues par rapport à p_1, p_2, \dots, p_n , on pourra ne laisser dans les équations différentielles des caractéristiques que les variables $x, y, x_1, x_2, \dots, x_n, q_1, q_2, \dots, q_n$.

Cela posé, l'extension de la méthode de Monge et d'Ampère se fait toujours d'après les mêmes principes. Si les n systèmes de caractéristiques sont distincts et si chacun d'eux admet une combinaison intégrable, les n équations

$$(35) \quad F_1 = 0, \dots, F_n = 0, \quad u_1 = C_1, \dots, u_n = C_n,$$

où $du_i = 0$ est la combinaison qui correspond au i^{me} système, forment un système complètement intégrable. Si on résout ces $2n$ équations par rapport à $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, les conditions d'intégrabilité du système d'équations aux différentielles totales

$$dx_i = p_i dx + q_i dy \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sont vérifiées identiquement, quelles que soient les constantes C_1, C_2, \dots, C_n . Je renverrai, pour la démonstration, au Mémoire de M. Hamburger ⁽¹⁾. Lorsque chacun des systèmes de caractéristiques admet deux combinaisons intégrables distinctes, le système proposé admet n intégrales intermédiaires distinctes

$$u_1 = \varphi_1(v_1), \quad u_2 = \varphi_2(v_2), \quad \dots, \quad u_n = \varphi_n(v_n),$$

et l'intégration du système proposé est ramenée à celle d'un système complètement intégrable

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots, \quad F_n = 0, \quad u_1 = \varphi_1(v_1), \dots, u_n = \varphi_n(v_n)$$

avec n fonctions arbitraires $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Si $n - 1$ seulement des systèmes de caractéristiques admettent deux combinaisons intégrables distinctes, la solution du problème analogue à celui de Cauchy se ramène encore à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Pour plus de simplicité, supposons les équations (27) résolues par rapport à p_1, \dots, p_n , et soient $\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_n(y)$ les fonctions auxquelles doivent se réduire x_1, x_2, \dots, x_n respectivement pour $x = x_0$.

Les valeurs de $3n$ fonctions x_i, p_i, q_i , étant connues pour $x = x_0$, on en déduira, comme on l'a déjà expliqué plusieurs fois, la forme des

⁽¹⁾ *Journal de Crelle*, t. XCIII, p. 193 et suivantes.

$n - 1$ fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$, de sorte que le système d'intégrales cherché doit satisfaire aux $2n - 1$ équations

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_n = 0, u_1 = \varphi_1(v_1), \dots, u_{n-1} = \varphi_{n-1}(v_{n-1});$$

on obtiendra ce système d'intégrales en cherchant les caractéristiques du système qui n'a pas encore été employé. Ces caractéristiques sont définies par le système d'équations connues, auquel on ajoutera les $n - 1$ relations

$$u_1 = \varphi_1(v_1), \dots, u_{n-1} = \varphi_{n-1}(v_{n-1}),$$

de façon que le nombre des variables ne dépasse que d'une unité le nombre des équations.

215. Telle est, dans ses grandes lignes, l'extension de la méthode de Monge aux systèmes d'équations simultanées du premier ordre. Cette extension suggère un grand nombre de questions; nous examinerons quelques-unes des plus importantes. Remarquons d'abord que le déterminant Δ , qui joue le rôle fondamental dans cette étude, est un invariant, relativement à un changement quelconque des variables indépendantes. Soient x', y' un nouveau système de variables indépendantes, définies en fonction des anciennes par les formules

$$x = \varphi(x', y'), \quad y = \psi(x', y');$$

les dérivées p'_1, q'_1 de s_1 par rapport aux nouvelles variables ont pour valeurs

$$p'_1 = p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial x'},$$

$$q'_1 = p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y'} + q_1 \frac{\partial \psi}{\partial y'}.$$

L'équation $F_1 = 0$ se change en une nouvelle équation

$$G_1(x', y', s_1, s_2, \dots, s_n; p'_1, p'_2, \dots, p'_n; q'_1, q'_2, \dots, q'_n) = 0,$$

et l'on a

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_1} = \frac{\partial G_1}{\partial p'_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + \frac{\partial G_1}{\partial q'_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_1} = \frac{\partial G_1}{\partial p'_1} \frac{\partial \psi}{\partial x'} + \frac{\partial G_1}{\partial q'_1} \frac{\partial \psi}{\partial y'},$$

d'où l'on déduit l'identité

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_1} dy - \frac{\partial F_1}{\partial q_1} dx = \left(\frac{\partial G_1}{\partial p'_1} dy' - \frac{\partial G_1}{\partial q'_1} dx' \right) \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x', y')}.$$

Quand on effectue le changement de variables précédent, un élément quelconque de Δ est multiplié par le jacobien $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x', y)}$; on a donc, en désignant par Δ' le nouveau déterminant,

$$\Delta = \Delta' \left\{ \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x', y)} \right\}^n.$$

Cette remarque nous permet de montrer que le problème de Cauchy, tel qu'il a été posé plus haut pour un système de n équations du premier ordre à n inconnues, admet une solution lorsque le déterminant Δ n'est pas nul. Supposons que l'on connaisse la suite d'éléments associés du premier ordre, correspondant aux valeurs de x, y , vérifiant une relation donnée $\Phi(x, y) = 0$, et satisfaisant aux équations proposées (27). Les éléments appartiennent à un système unique d'intégrales holomorphes, pourvu que Δ ne soit pas nul pour tous ces éléments. Prenons, en effet, pour nouvelles variables indépendantes, $x' = \Phi(x, y)$, $y' = \Psi(x, y)$, la fonction Ψ étant distincte de Φ ; on aura $dx' = 0$, et le nouveau déterminant Δ' se réduira à

$$\frac{D(G_1, G_2, \dots, G_n)}{D(p'_1, p'_2, \dots, p'_n)};$$

ce nouveau déterminant étant différent de zéro, comme le premier Δ , on pourra résoudre les nouvelles équations par rapport à p'_1, p'_2, \dots, p'_n et appliquer au nouveau système le théorème de Cauchy sous sa forme habituelle.

REMARQUE I. — La méthode d'intégration qui fait l'objet du paragraphe précédent ne s'applique pas aux intégrales telles que le déterminant Δ soit identiquement nul, quels que soient dx et dy , pour tous les éléments de ces intégrales; nous les appellerons des *intégrales singulières*.

REMARQUE II. — Il peut se faire que le déterminant Δ soit identiquement nul, pour toutes les intégrales du système (27), alors même que les équations du système ont été mises sous la forme la plus simple. La théorie des surfaces nous offre des exemples remarquables de pareils systèmes singuliers. Tel est le système

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = u(x, y), p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = v(x, y), q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = w(x, y);$$

qui se présente dans la recherche des surfaces applicables sur une

Si on applique à ce système la théorie générale, on voit qu'il possède une seule famille de caractéristiques pour laquelle on a

$$\frac{dx}{A_1} = \frac{dy}{A_2};$$

en tenant compte des équations elles-mêmes, les relations

$$dx_i = p_i dx + q_i dy$$

nous donnent un système de $n + 1$ équations différentielles ordinaires

$$(39) \quad \frac{dx}{A_1} = \frac{dy}{A_2} = \frac{dx_1}{B_1} = \dots = \frac{dx_n}{B_n},$$

entre x, y, x_1, \dots, x_n seulement. On voit que l'on peut négliger ici les équations qui renferment les dérivées p_i et q_i . Convenons, pour abréger, d'appeler caractéristique d'ordre zéro toute suite simplement infinie de valeurs de (x, y, x_1, \dots, x_n) vérifiant les relations (39); le calcul précédent prouve que tout système d'intégrales des équations proposées s'obtient en prenant une infinité simple de caractéristiques d'ordre zéro.

Soit

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \dots, u_n = C_n, \quad u_{n+1} = C_{n+1},$$

l'intégrale générale des équations (39). Toute intégrale des équations proposées satisfait à des relations de la forme

$$(40) \quad u_1 = \varphi_1(u_{n+1}), \dots, u_n = \varphi_n(u_{n+1})$$

et inversement, quelles que soient les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, un calcul direct prouve que les fonctions x_1, x_2, \dots, x_n , définies par ces formules, satisfont bien aux équations (38) ⁽¹⁾.

317. Lorsque les équations du système (27) sont linéaires par rapport aux dérivées p_i, q_i , on peut déduire des équations différentielles des caractéristiques deux relations au moins ne contenant que x, y, x_1 ,

(¹) Le résultat précédent est dû à Jacobi (*Journal de Crelle*, t. II, p. 331), qui a aussi étendu la méthode aux équations simultanées

$$A_1 \frac{\partial x_i}{\partial x_1} + \dots + A_r \frac{\partial x_i}{\partial x_r} = B_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

à un nombre quelconque de variables indépendantes.

faisant aux deux équations

$$(44) \quad \begin{cases} dy = \mu dx, \\ A_1 dx + \dots + A_n dx_n = B dx; \end{cases}$$

un système linéaire possède donc, en général, n systèmes de caractéristiques d'ordre nul, correspondant aux n racines de $\Delta(\mu) = 0$, définis par des formules analogues aux précédentes (44).

Les équations (44) admettent au plus deux combinaisons intégrables distinctes. Lorsqu'il en est ainsi, le système proposé admet une intégrale première de la forme

$$u = \varphi(v),$$

u et v étant des fonctions de x, y, x_1, \dots, x_n . Si le même fait a lieu pour les n systèmes de caractéristiques, on a n intégrales premières distinctes

$$u_1 = \varphi_1(v_1), \dots, u_n = \varphi_n(v_n),$$

et l'intégrale générale est représentée par les formules précédentes, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ étant des fonctions arbitraires. Si l'on a en tout r intégrales premières ($r < n$)

$$u_1 = \varphi_1(v_1), \dots, u_r = \varphi_r(v_r),$$

on pourra exprimer x_1, x_2, \dots, x_n au moyen de x, y , et de $n - r$ inconnues nouvelles, et on ramènera le système proposé à un système linéaire de $n - r$ équations, dépendant de r fonctions arbitraires.

Lorsque μ est racine multiple d'ordre s de $\Delta(\mu) = 0$, on peut déduire des formules (42) s équations au plus indépendantes de q_1, q_2, \dots, q_n . Les caractéristiques correspondantes sont définies par $r + 1$ équations

$$(45) \quad \begin{cases} dy = \mu dx, \\ A'_1 dx_1 + A'_2 dx_2 + \dots + A'_n dx_n = B' \end{cases}$$

où $i = 1, 2, \dots, r, \quad 1 \leq r \leq s.$

Ces équations admettent au plus $s + 1$ combinaisons intégrables distinctes, dans le cas le plus favorable où $r = s$. Par suite, les caractéristiques correspondant à une racine multiple d'ordre s de $\Delta(\mu) = 0$ fournissent au plus s intégrales premières du système proposé. Si ce nombre maximum est atteint pour chaque famille de caractéristiques, on aura l'intégrale générale du système; sinon, on pourra en diminuer l'ordre.

on a d'abord les relations

$$(47) \quad \begin{cases} dy = \mu dx, & dx_i = -f_i dx + q_i dy, \\ d\left(\frac{\partial^{m-h} x_i}{\partial y^{m-h}}\right) = \frac{\partial^{m-h+1} x_i}{\partial x \partial y^{m-h}} dx + \frac{\partial^{m-h+1} x_i}{\partial y^{m-h+1}} dy \\ i = 1, 2, \dots, n, \\ h = 1, 2, \dots, m-1, \end{cases}$$

où μ est l'une des racines de l'équation

$$(48) \quad \Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \mu & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_1} & \frac{\partial f_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial q_n} - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Aux formules (47) on peut en ajouter au moins une autre, indépendante du système d'intégrales qui a servi pour la définition. En différentiant m fois de suite par rapport à y la première des équations (46), il vient

$$\left(\frac{\partial^m f_1}{\partial y^m}\right) + \frac{\partial^{m+1} x_1}{\partial x \partial y^m} + \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \frac{\partial^{m+1} x_1}{\partial y^{m+1}} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \frac{\partial^{m+1} x_n}{\partial y^{m+1}} = 0;$$

multiplions par dx et remplaçons $\frac{\partial^{m+1} x_1}{\partial x \partial y^m} dx$ par

$$d\left\{\frac{\partial^m x_1}{\partial y^m}\right\} - \frac{\partial^{m+1} x_1}{\partial y^{m+1}} dy,$$

nous trouvons

$$(49) \quad \left(\frac{\partial^m f_1}{\partial y^m}\right) dx + d\left\{\frac{\partial^m x_1}{\partial y^m}\right\} + dx \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \mu\right) \frac{\partial^{m+1} x_1}{\partial y^{m+1}} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \frac{\partial^{m+1} x_n}{\partial y^{m+1}} \right] = 0,$$

En opérant de même avec les autres équations (46), on arrive à n équations, entre lesquelles on pourra éliminer les dérivées d'ordre $m+1$

$$\frac{\partial^{m+1} x_1}{\partial y^{m+1}}, \dots, \frac{\partial^{m+1} x_n}{\partial y^{m+1}},$$

pourvu que μ soit racine de l'équation $\Delta(\mu) = 0$. Cette élimination

nous fournit une ou plusieurs équations de la forme

$$(50) \quad \left(\lambda_1 d \left(\frac{\partial^m x_1}{\partial y^m} \right) + \dots + \lambda_n d \left(\frac{\partial^m x_n}{\partial y^m} \right) + \left[\lambda_1 \left(\frac{\partial^m f_1}{\partial y^m} \right) + \dots + \lambda_n \left(\frac{\partial^m f_n}{\partial y^m} \right) \right] dy = 0, \right.$$

que l'on devra ajouter aux équations (47). Dans le cas général, où μ est racine simple de $\Delta(\mu) = 0$, cette élimination ne peut se faire que d'une façon, et le nombre des variables qui figurent dans les équations différentielles des caractéristiques dépasse toujours de n unités le nombre des équations. On montrera encore de la même façon qu'une caractéristique d'ordre m est contenue dans une infinité de caractéristiques d'ordre $m + 1$, dépendant d'une constante arbitraire.

Une fois les caractéristiques d'ordre supérieur définies, l'extension de la méthode de M. Darboux se fait toujours d'après les mêmes principes, et son application ne présente que des difficultés de calcul, du moins lorsque les n systèmes de caractéristiques sont distincts.

219. On voit donc qu'en définitive toutes les méthodes développées dans cet ouvrage reposent sur la considération de certaines multiplicités à une dimension, ou multiplicités caractéristiques, qui jouissent de propriétés particulières relativement à une équation donnée. Pour étendre ces méthodes aux équations à plus de trois variables indépendantes, il semble donc que le premier pas à faire consisterait à étendre d'abord la notion si féconde des caractéristiques. Cette extension peut se faire de plusieurs façons, suivant la propriété des caractéristiques que l'on regarde comme la plus importante. On peut, par exemple, partir du problème de Cauchy généralisé ; c'est ce qu'a fait récemment M. Beudon pour les équations du second ordre à un nombre quelconque de variables indépendantes ⁽¹⁾. Il arrive ainsi à définir des multiplicités à $n - 1$ dimensions d'éléments du second ordre, appartenant à une infinité d'intégrales, et qui sont les analogues des multiplicités caractéristiques à une dimension pour une équation à deux variables. Mais ces multiplicités sont définies par des relations quadratiques par rapport aux dérivées, ce qui ne permet pas l'application de la méthode de M. Darboux.

On pourrait partir d'une autre propriété pour essayer cette extension. Étant donnée une équation du second ordre à deux variables indépendantes

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

⁽¹⁾ J. Beudon, « Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles » (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV, p. 102-120).

soit (S) une surface intégrale ; si on considère sur cette surface une famille de courbes définies par l'équation différentielle

$$dy = \mu dx,$$

où l'on prend pour μ une fonction convenablement choisie de x, y, z, p, q, r, s, t , nous avons vu qu'on pouvait ajouter à l'équation précédente une autre relation de la forme

$$A dr + B ds + C dt + D dp + \dots = 0,$$

différente de $dF = 0$ et indépendante de l'intégrale considérée. Tous les raisonnements que nous avons faits sont basés sur l'existence de cette nouvelle équation linéaire en dr, ds, dt, dp, dq, dx , que l'on peut ajouter à $dy = \mu dx$. Étant donnée alors une équation du second ordre, à trois variables, par exemple,

$$(51) \quad F(x_1, x_2, x_3, z; p_1, p_2, p_3; p_{11}, p_{12}, \dots, p_{33}) = 0,$$

où on pose

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

et une intégrale de cette équation, considérons, sur cette intégrale, une famille de multiplicités à une dimension définies par deux relations

$$(52) \quad \frac{dx_1}{\lambda_1} = \frac{dx_2}{\lambda_2} = \frac{dx_3}{\lambda_3},$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des fonctions de $x_1, x_2, x_3, \dots, p_{33}$. Si, en choisissant convenablement ces fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on pouvait déduire de l'équation proposée une relation linéaire en dp_{11}, \dots, dp_{33} , autre que $dF = 0$, indépendante de l'intégrale considérée, l'analogie serait complète avec une équation du second ordre à deux variables indépendantes, et les méthodes employées dans ce cas particulier s'étendraient d'elles-mêmes. Mais il est facile de vérifier que la chose n'est pas possible, du moins si la fonction F est quelconque ; de sorte qu'on ne sera conduit par cette voie qu'à des équations à trois variables d'une forme particulière.

Natani ⁽¹⁾ avait déjà indiqué une extension possible de la méthode de Monge à des équations linéaires du second ordre à un nombre quelconque de variables, en se plaçant à un point de vue analogue. Bornons-nous toujours, pour fixer les idées, à une équation à trois variables

(1) NATANI, *Die höhere Analysis*, p. 303.

indépendantes :

$$(53) \quad A_{11}p_{11} + A_{12}p_{12} + A_{13}p_{13} + A_{22}p_{22} + A_{23}p_{23} + A_{33}p_{33} = B,$$

où A_{11}, \dots, B sont des fonctions de $x_1, x_2, x_3, x, p_1, p_2, p_3$; par analogie avec l'équation de Monge

$$Ar + 2Bs + Ct + D = 0,$$

cherchons si l'équation (53) ne proviendrait pas de l'élimination des rapports $\frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}$ entre trois équations de la forme :

$$\frac{dx_1}{\lambda_1} = \frac{dx_2}{\lambda_2} = \frac{dx_3}{\lambda_3}$$

$$adp_1 + bdp_2 + cdp_3 + fdx_1 = 0.$$

Il faut pour cela l'identifier avec l'équation

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} a\lambda_1 p_{11} + (a\lambda_2 + b\lambda_1)p_{12} + (a\lambda_3 + c\lambda_1)p_{13} + b\lambda_2 p_{22} \\ + (b\lambda_3 + c\lambda_2)p_{23} + c\lambda_3 p_{33} + f\lambda_1 = 0; \end{array} \right.$$

on en tire :

$$\begin{array}{llll} a\lambda_1 = A_{11}, & a\lambda_2 + b\lambda_1 = A_{12}, & a\lambda_3 + c\lambda_1 = A_{13}, & b\lambda_2 = A_{22}, \\ & b\lambda_3 + c\lambda_2 = A_{23}, & c\lambda_3 = A_{33}, & f\lambda_1 = -B. \end{array}$$

Supposons que A_{11} n'est pas nul; on peut alors prendre $\lambda_1 = 1$, et on tire des conditions précédentes :

$$\begin{aligned} a &= A_{11}, & b &= A_{12} - A_{11}\lambda_2, & c &= A_{13} - A_{11}\lambda_3, & f &= -B, \\ A_{22} &= \lambda_2 (A_{12} - A_{11}\lambda_2), & A_{23} &= \lambda_2 (A_{13} - A_{11}\lambda_3), \\ A_{33} &= A_{12}\lambda_2 + A_{13}\lambda_3 - 2A_{11}\lambda_2\lambda_3; \end{aligned}$$

pour que l'identification soit possible, il faut donc que les trois dernières relations soient compatibles en λ_2, λ_3 , ce qui exige que les coefficients A_{1k} de l'équation (53) vérifient une certaine condition⁽¹⁾. Plus généralement, en partant de trois équations linéaires quelconques en $dx_1, dx_2, dx_3, dp_1, dp_2, dp_3$,

$$\begin{aligned} a_{11}dp_1 + a_{21}dp_2 + a_{31}dp_3 + b_{11}dx_1 + b_{21}dx_2 + b_{31}dx_3 &= 0, \\ a_{12}dp_1 + a_{22}dp_2 + a_{32}dp_3 + b_{12}dx_1 + b_{22}dx_2 + b_{32}dx_3 &= 0, \\ a_{13}dp_1 + a_{23}dp_2 + a_{33}dp_3 + b_{13}dx_1 + b_{23}dx_2 + b_{33}dx_3 &= 0, \end{aligned}$$

(¹) Cette condition s'obtient en égalant à zéro le discriminant de la forme quadratique :

$$A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{13}x_1x_3 + A_{23}x_2x_3.$$

l'élimination de dx_1, dx_2, dx_3 conduit à une équation du second ordre analogue à l'équation d'Ampère.

A cette catégorie appartenant, comme il est facile de s'en assurer, les équations qui admettent une intégrale intermédiaire du premier ordre

$$u_3 = \varphi(u_1, u_2),$$

u_1, u_2, u_3 étant des fonctions déterminées de $x_1, x_2, x_3, x, p_1, p_2, p_3$, et φ une fonction arbitraire. On pourra consulter sur ce sujet un travail récent de M. G. Vivanti : *Sulle equazioni a derivate parziali del second'ordine a tre variabili indipendenti* (*Mathematische Annalen*, t. XLVIII, p. 474-513; 1897).

NOTE I

SUR L'ÉQUATION AUXILIAIRE

Solent

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

une équation du second ordre, et z_1 une intégrale non singulière de cette équation. Il existe, comme on sait, une infinité d'intégrales infiniment voisines de celle-là, et dépendant d'autant de paramètres arbitraires qu'on le veut. Prenons, en particulier, une famille d'intégrales dépendant d'un seul paramètre arbitraire ϵ ; ces intégrales sont représentées par un développement en série de la forme

$$(2) \quad z = z_1 + \epsilon z' + \epsilon^2 z'' + \dots = \Phi(x, y, \epsilon),$$

qui se réduit à z_1 , pour $\epsilon = 0$. Si on substitue cette expression de z dans l'équation proposée et qu'on développe suivant les puissances croissantes de ϵ , en égalant à 0 le coefficient de ϵ , on obtient, pour déterminer z' , l'équation linéaire suivante :

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial z_1} z' + \frac{\partial F}{\partial p_1} p' + \frac{\partial F}{\partial q_1} q' + \frac{\partial F}{\partial r_1} r' + \frac{\partial F}{\partial s_1} s' + \frac{\partial F}{\partial t_1} t' = 0,$$

où on a posé

$$\begin{array}{lllll} p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x}, & q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y}, & r_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}, & s_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y}, & t_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}, \\ p' = \frac{\partial z'}{\partial x}, & q' = \frac{\partial z'}{\partial y}, & r' = \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}, & s' = \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y}, & t' = \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}. \end{array}$$

L'équation (3) a été considérée pour la première fois par M. Darboux⁽¹⁾, qui lui a donné le nom d'*équation auxiliaire* de l'équation proposée. Nous nous proposons de montrer comment on peut utiliser cette équation dans l'application de la méthode de M. Darboux.

Prenons d'abord une équation de la forme

$$(4) \quad s = F(x, y, s, p, q),$$

et supposons cette équation intégrable par la méthode de M. Darboux. Toute intégrale s , satisfait à une relation, telle que

$$(5) \quad f(x, y, s, p_1, p_2, \dots, p_n) = \varphi(\omega),$$

ou à une relation analogue, obtenue en remplaçant $p_1, p_2, \dots, p_n, \omega$ par q_1, q_2, \dots, q_n, y respectivement. (Les notations employées sont celles du n° 145.) Dans cette formule $f(x, y, s, p_1, \dots, p_n)$ est une fonction déterminée, et $\varphi(\omega)$ une fonction arbitraire dont la forme varie avec l'intégrale que l'on considère. Une intégrale infiniment voisine de la première doit vérifier une relation de même forme, où $\varphi(\omega)$ est remplacée par une autre fonction

$$\varphi(\omega) + \varepsilon \varphi_1(\omega) + \varepsilon^2 \varphi_2(\omega) + \dots$$

Si on remplace dans f l'intégrale s par l'expression (3) et qu'on égale les coefficients de ε dans les deux membres, on voit que s' doit satisfaire aussi à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial s} s' + \frac{\partial f}{\partial p_1} p'_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial p_n} p'_n = \varphi_1(\omega),$$

ce qui montre que l'équation auxiliaire

$$(6) \quad s' = \frac{\partial F}{\partial s} s' + \frac{\partial F}{\partial p} p' + \frac{\partial F}{\partial q} q'$$

est intégrable par la méthode de Laplace (n° 140, 168).

Pour reconnaître si l'équation (4) est intégrable par la méthode de M. Darboux, on peut donc procéder comme il suit : on formera les invariants successifs de l'équation linéaire (6), où on considère s comme

(1) « Sur les équations aux dérivées partielles » (Comptes Rendus, t. XCVI, p. 766 ; 19 mars 1883).

Voir aussi la note XI du t. IV des *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*, p. 366.

une fonction de x, y , satisfaisant à l'équation (4). Grâce à cette équation, on peut exprimer tous ces invariants successifs au moyen de x, y, z , et des dérivées p et q . Il faudra qu'en allant assez loin dans un sens ou dans l'autre on arrive à un invariant identiquement nul. Ce procédé de récurrence offre l'avantage de permettre d'utiliser les calculs déjà faits pour pousser les essais plus loin.

Comme vérification, reprenons l'équation de Liouville, $s = \sigma^2$, l'équation auxiliaire est ici $s' = \sigma^2 s'$; on a pour les invariants

$$h = k = \sigma^2,$$

et par suite $h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y} = \sigma^2 - \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = 0$. Plus généralement, cherchons à quelles conditions l'invariant h de l'équation auxiliaire sera nul. On a pour expression de cet invariant

$$h = -\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} r - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} - \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial z} p - \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} F + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial z};$$

pour que cet invariant soit nul pour toute intégrale de l'équation (4), il faut d'abord que l'on ait $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 0$, c'est-à-dire que F soit de la forme

$$F = C(x, y, z, q) p + D(x, y, z, q),$$

et la condition $h = 0$ devient

$$\frac{\partial D}{\partial z} + C \frac{\partial D}{\partial q} = \frac{\partial C}{\partial x} + D \frac{\partial C}{\partial q},$$

comme on l'a déjà obtenu directement (I, n° 46).

On démontrera de la même façon que, si une équation du second ordre de forme quelconque est intégrable par la méthode de M. Darboux, l'équation auxiliaire (3) est intégrable par la méthode de Legendre (n° 113-115).

NOTE II

SUR LES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES

1. Nous établirons d'abord le théorème auxiliaire suivant
Soit un système de n équations,

[illegible]

où les seconds membres f_1, f_2, \dots, f_n sont des fonctions holomorphes dans le voisinage d'un certain système de valeurs

$$x_0, y_0, (x_1)_0, \dots, (x_n)_0; (p_{l+1})_0, \dots, (p_n)_0; (q_1)_0, \dots, (q_l)_0$$

et où les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_k}{\partial p_{i+1}}, \quad \frac{\partial f_k}{\partial p_{i+2}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f_k}{\partial p_n}, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

sont nulles simultanément pour ces valeurs initiales.

Soient, de plus,

$$q_1(y), q_2(y), \dots, q_l(y).$$

à fonctions de y , holomorphes pour $y = y_0$, et telles que

$$\begin{aligned} \varphi_1(y_0) &= (x_1)_0, & \varphi_2(y_0) &= (x_2)_0, \dots, \varphi_l(y_0) = (x_l)_0, \\ \varphi'_1(y_0) &= (q_1)_0, & \varphi'_2(y_0) &= (q_2)_0, \dots, \varphi'_l(y_0) = (q_l)_0. \end{aligned}$$

et

$$\psi_{i+1}(\omega), \quad \psi_{i+2}(\omega), \quad \dots, \quad \psi_n(\omega),$$

$n - i$ fonctions de ω , holomorphes pour $\omega = \omega_0$, et telles que

$$\begin{aligned} \psi_{i+1}(\omega_0) &= (x_{i+1})_0, & \dots, & & \psi_n(\omega_0) &= (x_n)_0, \\ \psi'_{i+1}(\omega_0) &= (p_{i+1})_0, & \dots, & & \psi'_n(\omega_0) &= (p_n)_0. \end{aligned}$$

Les équations (1) admettent un système d'intégrales x_1, \dots, x_n , holomorphes dans le voisinage du point (x_0, y_0) , et telles que, pour $\omega = \omega_0$, x_1, x_2, \dots, x_i se réduisent respectivement à $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_i(y)$, tandis que, pour $y = y_0$, x_{i+1}, \dots, x_n se réduisent à $\psi_{i+1}(\omega), \psi_{i+2}(\omega), \dots, \psi_n(\omega)$.

Les fonctions φ et ψ étant données, on connaît par là même les valeurs initiales de toutes les dérivées partielles par rapport à y des i fonctions x_1, x_2, \dots, x_i , ainsi que de toutes les dérivées partielles par rapport à ω des $n - i$ fonctions x_{i+1}, \dots, x_n . Les valeurs initiales de toutes les autres dérivées partielles s'en déduiront ensuite de proche en proche, comme on le voit facilement, par les seules opérations d'addition et de multiplication. Il est donc permis d'employer la méthode des fonctions majorantes pour établir la convergence des développements en série entière ainsi obtenus. En procédant comme on l'a déjà fait plusieurs fois (n° 82 et 210), on est ramené à démontrer que le système auxiliaire

$$(2) \left\{ \begin{aligned} p_1 = p_2 = \dots = p_i = q_{i+1} = \dots = q_n &= \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\alpha + y + x_1 + \dots + x_n}\right) \left(1 - \frac{q_1 + \dots + q_i + p_{i+1} + \dots + p_n}{R}\right)} \\ &- M \left(1 + \frac{p_{i+1} + \dots + p_n}{R}\right), \end{aligned} \right.$$

où M , ρ et R sont des nombres positifs déterminés et α un nombre positif quelconque inférieur à l'unité, admet un système d'intégrales holomorphes dans le domaine du point $\omega = y = 0$, et représentées par des développements en série dont tous les coefficients sont réels et positifs. Cherchons, pour cela, à satisfaire à ce système en posant

$$u = \omega + \alpha y, \quad x_1 = x_2 = \dots = x_i = f(x + \alpha y), \quad x_{i+1} = \dots = x_n = \frac{1}{\alpha} f(x + \alpha y);$$

on en tire

$$\begin{aligned} p_1 = p_2 = \dots = p_i = q_{i+1} = \dots = q_n &= \frac{\partial f}{\partial u}, \\ q_1 = q_2 = \dots = q_i = \alpha \frac{\partial f}{\partial u}, & \quad p_{i+1} = \dots = p_n = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial u}, \end{aligned}$$

Nous dirons qu'une racine μ de l'équation caractéristique

$$(6) \quad \Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} dy - \frac{\partial F_1}{\partial q_1} dx & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_n} dy - \frac{\partial F_1}{\partial q_n} dx \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial p_1} dy - \frac{\partial F_n}{\partial q_1} dx & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial p_n} dy - \frac{\partial F_n}{\partial q_n} dx \end{vmatrix} = 0,$$

où $dy = \mu dx$, est de rang r lorsque cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ annule tous les mineurs à $n - r + 1$ lignes de Δ , sans annuler tous les mineurs à $n - r$ lignes ; ce rang est au plus égal à l'ordre de multiplicité de la racine. Pour une racine simple, on a $r = 1$.

Nous allons établir que toute caractéristique du système, provenant d'une racine dont le rang r est égal à l'ordre de multiplicité, appartient à une infinité de systèmes d'intégrales, dépendant de r fonctions arbitraires. En particulier, toute caractéristique provenant d'une racine simple appartient à une infinité de systèmes d'intégrales dépendant d'une fonction arbitraire.

Étant donnée une caractéristique provenant d'une racine de l'équation $\Delta(\mu) = 0$, dont nous désignerons l'ordre et le rang par $n - i$, imaginons que l'on effectue une transformation ponctuelle de façon que les équations finies de cette caractéristique soient

$$x = 0, \quad x_i = p_i = q_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Dans le déterminant Δ , faisons $dx = 0$, $dy = 1$; le déterminant ainsi obtenu

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

doit être nul, ainsi que tous ses mineurs à $i + 1$ lignes, sans que tous les mineurs à i lignes soient nuls.

Nous pouvons supposer, par exemple, que le mineur

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_i)}{D(p_1, p_2, \dots, p_i)}$$

n'est pas nul pour $x = y = x_i = p_i = q_i = 0$, et résoudre les i pro-

nières équations par rapport à p_1, p_2, \dots, p_i :

$$(7) \quad \begin{cases} p_1 = f_1(x, y, x_1, \dots, x_n; p_{i+1}, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n), \\ \dots \\ p_i = f_i(x, y, x_1, \dots, x_n; p_{i+1}, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n). \end{cases}$$

Les fonctions f_1, \dots, f_i étant supposées régulières dans le voisinage des valeurs $x = y = x_i = p_i = q_i = 0$, on peut admettre, sans diminuer la généralité, que les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_k}{\partial p_{i+1}} \dots \frac{\partial f_k}{\partial p_n} \quad (k = 1, 2, \dots, i)$$

sont nulles pour ces valeurs. Il suffirait, en effet, de remplacer x_1, x_2, \dots, x_i par de nouvelles inconnues, en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= Z_1 + \alpha_{i+1} x_{i+1} + \dots + \alpha_n x_n, \\ x_2 &= Z_2 + \beta_{i+1} x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n, \\ &\dots \end{aligned}$$

pour être ramené à ce cas, en choisissant convenablement les constantes $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}, \dots$. Pour ne pas multiplier les notations, nous supposons les équations (7) ramenées à cette forme.

La caractéristique considérée provenant d'une racine d'ordre $n - i$ de $\Delta(\mu) = 0$, le déterminant Δ doit être divisible par dx^{n-i} et ne doit pas être divisible par dx^{n-i+1} . Or, à l'origine, ce déterminant se réduit à

$$\begin{vmatrix} dy + \frac{\partial f_1}{\partial q_1} dx, \frac{\partial f_1}{\partial q_2} dx, \dots, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial q_n} dx \\ \dots \\ \frac{\partial f_i}{\partial q_1} dx, \frac{\partial f_i}{\partial q_2} dx, \dots, dy + \frac{\partial f_i}{\partial q_i} dx, \frac{\partial f_i}{\partial q_{i+1}} dx, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial q_n} dx \\ - \frac{\partial F_{i+1}}{\partial q_1} dx, \dots, \frac{\partial F_{i+1}}{\partial p_{i+1}} dy - \frac{\partial F_{i+1}}{\partial q_{i+1}} dx, \dots, \dots \\ \dots \\ - \frac{\partial F_n}{\partial q_1} dx, \dots, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial p_n} dy - \frac{\partial F_n}{\partial q_n} dx. \end{vmatrix}$$

D'autre part, quand on fait dans ce déterminant $dy = 1, dx = 0$, tous les mineurs à $i + 1$ lignes doivent être nuls, ce qui exige que l'on

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE V

La méthode de Laplace

Les deux cas d'intégrabilité par la méthode de Monge. — Transformations de Laplace. — Définition des invariants. — Étude de la suite de Laplace. — Recherche des cas où la suite de Laplace est terminée dans un sens ou dans les deux sens. — Retour sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima. — Proposition permettant de reconnaître, dans certains cas, que la suite de Laplace est limitée. — Application aux surfaces à lignes de courbure planes. — Extension de la méthode de Laplace aux équations linéaires de forme quelconque, d'après Legendre. — Classification des équations linéaires en trois types.....

Pages.

1-39

CHAPITRE VI

Les systèmes en involution

Généralités sur les équations simultanées dont l'intégrale générale dépend d'un nombre fini de constantes arbitraires. — Intégrales communes à une équation du premier ordre et à une équation du second ordre. — Intégrales communes aux deux équations $r + f = 0$, $t + \varphi = 0$. — Systèmes en involution. — Multiplicités caractéristiques. — Systèmes linéaires. — Exemples divers. — Étude du système formé par deux équations du second ordre de forme quelconque. — Recherche des intégrales communes à une équation du second ordre et à une équation d'ordre n . — Extension des résultats précédents. — La méthode de M. Sophus Lie. — Remarque de M. de Tannenberg. — Théorèmes de M. J. König sur les systèmes complètement intégrables.....

40-114

CHAPITRE VII

La méthode de M. Darboux

Rappel des théorèmes énoncés par M. Darboux. — Étude du cas où les deux familles de caractéristiques admettent deux combinaisons intégrables. — Application à divers exemples. — Cas où

une seule des familles de caractéristiques admet deux combinaisons intégrables. — Solution du problème de Cauchy. — Comparaison avec la méthode d'Ampère. — Théorèmes divers sur les invariants. — Détermination des équations intégrables, ne possédant qu'un système de caractéristiques. — Retour sur les équations linéaires. — Discussion de l'équation $s = f(s)$, d'après M. Sophus Lie. — Autres exemples. — Application de la théorie des groupes infinis. — La méthode de M. Julius König..

115-200

CHAPITRE VIII

Les équations de la première classe

Définition de l'intégrale générale, d'après Ampère. — Examen de cette définition. — Équations de la première classe. — Propositions de M. Darboux. — Énoncés de différents problèmes auxquels conduit la méthode de M. Darboux. — Recherches de M. Moutard. — Théorème de M. Maurice Lévy.....

200-240

CHAPITRE IX

Transformations des équations du second ordre

Recherche des équations du second ordre telles que l'une des dérivées premières de la fonction inconnue vérifie une seule équation du second ordre. — Applications à divers exemples. — Généralités sur les systèmes de deux équations du premier ordre à deux fonctions inconnues. — Cas où l'élimination de l'une des inconnues conduit à une équation du second ordre. — Exemples de transformations. — Cas des équations linéaires. — Équation adjointe. — Transformations de M. Bäcklund. — Exemple de M. E. Cosserat. — Comparaison avec la méthode de M. Darboux. — Généralités sur les transformations des équations du second ordre.....

241-296

CHAPITRE X

Généralisations diverses

Problème de Cauchy pour une équation d'ordre n . — Caractéristique d'ordre n et d'ordre supérieur. — Extension des théorèmes établis pour le second ordre. — Caractéristiques d'ordre $n-1$. — Équations linéaires. — Équations de Natani. — Généralisation de la méthode de M. Darboux. — Systèmes du premier ordre à n inconnues. — Caractéristiques du premier ordre. — Extension de la méthode de Monge. — Systèmes singuliers. — Équations de Jacobi. — Systèmes linéaires. — Caractéristiques d'ordre nul. — Caractéristiques d'ordre supérieur. — Généralités sur les équations à plus de deux variables indépendantes

Note I. — Sur l'équation auxiliaire.....

Note II. — Sur les caractéristiques des équations simultanées....

296-333

334-336

337-342

1250

XX

